Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 4

Termín odovzdania: 15. marec 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra.*

1. (31.3) Ukážte, že ak sú všetky zložky na oboch hlavných diagonálach bidiagonálnej matice nenulové, potom sú singulárne hodnoty tejto matice navzájom rôzne. (Pozri príklad 25.1)

2. (31.4) Nech A je $m \times m$ horná trojuholníková matica so zložkami 0.1 na hlavnej diagonále a 1 všade nad ňou. Napíšte program, ktorý nájde najmenšiu singulárnu hodnotu A dvoma spôsobmi: použijúc štandardnú zabudovanú SVD procedúru, resp. ako odmocninu z najmenšej vlastnej hodnoty súčinu A^*A. Zbehnite program pre $1 \leq m \leq 30$ a zobrazte výsledok ako dve krivky na logaritmickej škále. Zodpovedajú výsledky tomu, čo sme o týchto algoritmoch povedali počas prednášky?

3. (31.5) Nech A je $m \times n$ matica, ktorej zložky sú nezávislé výbery z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ – stredná hodnota 0, rozptyl 1 (pozri tiež príklad 12.3). Nech B je bidiagonálna matica

$$B = \begin{bmatrix} x_m & y_{n-1} & & & \\ & x_{m-1} & y_{n-2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x_{m-(n-2)} & y_1 \\ & & & & x_{m-(n-1)} \end{bmatrix},$$

kde každé x alebo y je kladná odmocnina z nezávislého výberu z distribúcie χ^2, ktorej stupeň voľnosti zodpovedá príslušnému dolnému indexu. (Distribúcia *chí kvadrát* χ^2 so stupňom voľnosti k zodpovedá distribúcii súčtu štvorcov k-tich nezávislých výberov z $N(0,1)$.)

a) Ukážte, že distribúcie singulárnych hodnôt matíc A a B sú rovnaké.

b) Overte tento výsledok experimentom. Špeciálne, zvoľte $m = 100$ a $n = 50$, zostrojte náhodné matice A a B a zobrazte singulárne hodnoty matice A vzhľadom na singulárne hodnoty matice B.

4. (32.2) Uvažujme blokový maticový súčin

$$\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

kde pre jednoduchosť predpokladáme, že všetky matice $A, B, \dots, Y, Z$ sú štvorcové rovnakého typu.

a) Koľko (i) maticových sčítaní a (ii) maticových násobení je potrebných pre výpočet W, X, Y, Z zo zadaných $A, B, \dots, G, H$ v štandardnom algoritme?

b) Strassen ukázal, že W, X, Y, Z sa dajú vypočítať aj pomocou formúl

$$\begin{aligned} P_1 &= (A+D)(E+H), & P_5 &= (A+B)H, \\ P_2 &= (C+D)E, & P_6 &= (C-A)(E+F), \\ P_3 &= A(F-H), & P_7 &= (B-D)(G+H), \\ P_4 &= D(G-E), & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= P_1 + P_4 - P_5 + P_7, & Y &= P_2 + P_4, \\ X &= P_3 + P_5, & Z &= P_1 + P_3 - P_2 + P_6. \end{aligned}$$

Koľko (i) maticových sčítaní/odčítaní a (ii) maticových násobení je potrebných teraz?

c) Ukážte, že rekurzívnou aplikáciou Strassenových formúl sa dá dosiahnuť algoritmus pre násobenie matíc veľkosti $m = 2^k$, ktorého počet operácií bude $O(m^{\log_2(7)})$ pre $m \to \infty$.

d) Napíšte rekurzívny program, ktorý použije túto myšlienku a poskytnite výsledky numerických experimentov, ktoré overia jeho výpočtovú zložitosť.