Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 5

Termín odovzdania: 22. marec 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (33.2) Predpokladajme, že Algoritmus 33.1 beží pre nejakú maticu A a štartovací vektor b až do momentu, keď v n-tom kroku dôjdeme k $h_{n+1,n} = 0$.

a) Ukážte, ako sa dá v tomto prípade zjednodušiť rovnosť (33.13). Čo to vypovedá o štruktúre plnej $m \times m$ Hessenbergovej redukcie $A = QHQ^*$ matice A?

b) Ukážte, že $\mathcal{K}_n$ je invariantným podpriestorom matice A, t.j. $A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$.

c) Ukážte, že ak Krylovove podriestory generované A a b sú dané ako $\mathcal{K}_k = \langle b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\rangle$ (ako v 33.5), potom $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_{n+2} = \ldots$.

d) Ukážte, že každá vlastná hodnota matice H_n je vlastnou hodnotou matice A.

e) Ukážte, že ak je A regulárna, potom riešenie systému $Ax = b$ leží v $\mathcal{K}_n$.

Výskyt zložky $h_{n+1,n} = 0$ sa nazýva *zlyhaním* Arnoldiho iterovania, ale takéto zlyhanie je pomerne neškodné. Pre aplikácie výpočtu vlastných hodnôt (Lekcia 34) alebo riešenia systému lineárnych rovníc (Lekcia 35), vďaka častiam d) a e), zlyhanie znamená, že došlo ku konvergencii k presnému riešeniu a iterovanie sa môže zastaviť. Alternatívne, môžeme zvoliť nový ortonormálny vektor q_{n+1} náhodne a pokračovať v iterovaní.

2. (33.3) a) Predpokladajme, že Algoritmus 33.1 beží pre nejaké A a b a zbehne až do konca ($n = m$) bez zlyhania popísaného v predošlom príklade. Ukážte, že to znamená, že minimálny polynóm matice A je stupňa m.

b) Obrátene, predpokladajme, že minimálny polynóm matice A je stupňa m. Ukážte, že to nutne neznamená, že pre nejakú voľbu štartovacieho vektora b Algoritmus 33.1 zbehne až do konca.

c) Vysvetlite prečo výsledok časti a) nie je v rozpore s Príkladom 25.1 b)

3. (34.1) Predpokladajme, že pre dané $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^m$ a $p \in P^n$ chceme vypočítať $p(A)b$. Potom je prirodzené začať s Hornerovou schémou:

$$p(z) = c_0 + z(c_1 + z(c_2 + \cdots + z(c_{m-1} + z)\ldots)).$$

a) Napíšte **for** cyklus založený na tejto schéme (na papieri, nie v počítači), ktorý najprv spočíta $p(A)$ a následne vynásobí výsledok vektorom b. Určite počet flopov pre tento algoritmus s presnosťou na rád vedúceho člena.

b) Napíšte oveľa lepší **for** cyklus pre výpočet $p(A)b$, v ktorom sa b objaví hneď na začiatku. Opäť určite počet potrebných flopov s presnosťou na rád vedúceho člena.

c) V úvodných kurzoch numerickej matematiky sa spomína, že Hornerova schéma je vhodnejšia pre vyhodnocovanie polynómov, lebo je rýchlejšia ako priamočiara metóda, ktorá vypočíta mocniny z^k, vynásobí ich koeficientami c^k a následne sčíta. Ukážte, že pri výpočte $p(A)$ alebo $p(A)b$ Hornerova schéma nebude významne rýchlejšia ako priamočiary výpočet.

4. (34.2) V prednáške sme videli, že Arnoldiho polynóm p^n minimalizuje $\|p^n(A)b\|$. Iný polynóm, ktorý by mohol obsahovať čistejšiu informáciu o vlastných hodnotách matice A by bol *ideálny Arnoldiho polynóm*, tiež známy ako *Čebyševov polynóm matice* A – jednoznačný $p^* \in P^n$, ktorý minimalizuje $\|p^n(A)\|$. (Takýto polynóm sa v praxi nepoužíva, pretože neexistuje rýchly spôsob ako ho nájsť.)

a) Ukážte, že p^* existuje.

b) Ukážte, že ak $p^*(A) \neq 0$, tak p^* je určený jednoznačne.

(Nápoveda: Predpokladajme, že p_1 a p_2 sú dva rôzne ideálne Arnoldiho polynómy pre danú maticu A a n. Zvoľme $p = (p_1 + p_2)/2$ a uvažujme singulárne vektory matice $p(A)$ zodpovedajúce maximálnej singulárnej hodnote. Toto je ťažký problém.)