Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 7

Termín odovzdania: 5. apríl 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (36.1) V lekcii 27 sa poukázalo na to, že vlastné hodnoty symetrickej matice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sú stacionárnymi hodnotami Rayleighovho podielu $r(x) = (x^T Ax)/(x^T x)$ pre $x \in \mathbb{R}^n$. Ukážte, že Ritzove hodnoty v n-tom kroku Lanczosovho iterovania zodpovedajú stacionárnym hodnotám $r(x)$ v rámci podpriestoru $\mathcal{K}_n$.

2. (36.2) Uvažujme polynóm $p \in P^n$, t.j. $p(z) = \Pi_{k=1}^n (z - z_k)$ pre nejaké $z_k \in \mathbb{C}$.
a) Vyjadrite $\log |p(z)|$ ako súčet n členov zodpovedajúcich bodom z_k.
b) Vysvetlite, prečo sa dá člen obsahujúci z_k interpretovať ako potenciál zodpovedajúci jednotkovému zápornému bodovému náboju umiestnenému v z_k, ak sa náboje odpudzujú proporčne vzhľadom na prevrátenú hodnotu ich vzdialenosti. Preto sa dá $\log |p(z)|$ považovať za potenciál v bode z indukovaný n bodovými nábojmi.
c) Nahradením náboja veľkosti -1 nábojom $-1/n$ a zoberúc $n \to \infty$ dostaneme spojitú distribúciu náboja $\mu(\zeta)$ s integrálom -1, pre ktorú môžeme očakávať vzťah s limitnou hustotou koreňov polynómov $p \in P^n$ pre $n \to \infty$. Nájdite integrál reprezentujúci potenciál $\phi(z)$ zodpovedajúci distribúcii $\mu(\zeta)$ a vysvetlite jeho súvis s $|p(z)|$.
d) Nech S je uzavretá, ohraničená podmnožina $\mathbb{C}$ neobsahujúca izolované body. Povedzme, že hľadáme distribúciu $\mu(\zeta)$ s nosičom v S, ktorá bude minimalizovať $\max_{z \in S} \phi(z)$. Zdôvodnite (nemusí to byť rigorózne), prečo by malo platiť $\phi(z) = \textit{konšt.}$ v celom S. Vysvetlite, prečo toto znamená, že "náboje" sú v ekvilibriu, t.j. nepôsobí na ne žiadna celková sila. Inými slovami, S sa správa ako dvojrozmerný vodič v rámci ktorého sa celkový náboj veľkosti -1 rozdistribuoval voľne. Až na aditívnu konštantu, $\phi(z)$ je *Greenova funkcia* pre S.
e) Ako krok k zdôvodneniu pravidla zo str. 279 predpokladajme, že A je reálna symetrická matica s husto distribuovaným spektrom v $[a, b] \cup \{c\} \cup [d, e]$ pre $a < b < c < d < e$. Teda interval $[b, d]$ zodpovedá oblasti s "príliš malým nábojom" v rámci množiny $S = [a, e]$. Vysvetlite, prečo sa dá očakávať rýchla konvergencia Ritzových hodnôt k c a odhadnite rýchlosť konvergencie vzhľadom na potenciál ekvilibria $\phi(z)$ zodpovedajúceho množine $S' = [a, b] \cup [d, e]$.

3. (36.3) Nech A je 1000×1000 symetrická matica, ktorej zložky sú nulové, okrem $a_{ii} = \sqrt{i}$ na diagonále, $a_{ij} = 1$ na vedľajších dvoch diagonálach a $a_ij = 1$ na stých vedľajších diagonálach, t.j. pre $|i - j| = 100$. Určite najmenšiu vlastnú hodnotu matice A pomocou Lanczosovho iterovania s presnosťou na šesť desatinných miest.

4. (37.1) Štandardný rekurentný vzťah pre Legendrove polynómy má tvar

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{x} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x),$$

s počiatočnými hodnotami $P_0(x) = 1$ a $P_1(x) = 1$.
a) Overte, že takto dostaneme plynómy $P_2(x)$ a $P_3(x)$ nájdené v kapitole 7, (7.11).
b) Keďže $\{P_n(x)\}$ a $\{q_{n+1}(x)\}$ sú normalizované rôzne, rekurencia v tomto príklade sa líši od vzorca (37.5), v ktorom máme koeficienty dané predpisom (37.6). Napíšte obe príslušné tridiagonálne matice a odvoďte vzťah medzi nimi.
c) Použite časť b) pre nájdenie vzorca pre $q_{n+1}(1)$, alebo, ekvivalentne, pre $\|P_n(x)\|$.

5. (37.2) Využijúc ortogonalitu polynómov ukážte, že $q_{n+1}(x)$ má n navzájom rôznych koreňov, ktoré sa všetky nachádzajú v otvorenom intervale $(-1, 1)$. (Fakt, že korene sú rôzne vyplýva aj z riešenia úlohy 25.1, ale tu použite priamy argument.)