Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 10

Termín odovzdania: 10. máj 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*, resp. článku *Randomized Numerical Linear Algebra: Foundations & Algorithms* od P-G. Martinssona a J. A. Troppa.

1. *(Vyberový odhad stopy I)*:
Pre maticu A z 36.3 (DÚ č. 7) a matice B_τ z príkladu 38.1 (DÚ č. 8) pre $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ nájdite ich stopy. Nájdite aj ich Frobeniove normy. Použite algoritmus 1 (str. 12 v Martinsson-Trop) pre odhad stopy. Nájdite hodnotu estimátora $\bar{X}_k$ a rozptylu vzorky S_k pre všetkých päť matíc a $k = 10, 20, 50$. Náhodný testovací vektor ω najprv berte z rozdelenia $\texttt{NORMAL}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ a potom z $\texttt{UNIF}\{\pm 1\}^n$. Porovnajte nájdený rozptyl vzorky S_k s teoretickými (ne)rovnosťami pre $\mathrm{Var}[\bar{X}_k]$ uvedenými v príkladoch 4.1 a 4.2.

2. *Optimálne meracie systémy (Optimal measurement systems)*:
Ukážte, že ak $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ je optimálny merací systém (t.j. splĺňa rovnosť 4.5), tak náhodná premenná $X = \omega^*(A\omega)$, pre náhodný testovací vektor $\omega = \sqrt{n}u$, kde u vyberáme rovnomerne z $\mathcal{U}$, bude naozaj estimátor stopy A s varianciou určenou rovnosťou 4.7.

3. *Rovnoúhle priamky (equiangular lines)*:
a) Doplňte náčrt dôkazu, že maximálny počet rovnoúhlych priamok v $\mathbb{C}^n$ je n^2:

- majme rovnoúhle vektory $x_1, \ldots, x_D$ s normou 1 v $\mathbb{C}^n$,
- $|\langle x_i, x_j\rangle| = a \iff \mathrm{Tr}((x_i x_i^*)(x_j x_j^*)) = a^2 \implies$ hermitovské projekčné matice $x_i x_i^*$ sú pre $i = 1, \ldots, D$ lineárne nezávislé v n^2-rozmernom reálnom VP hermitovských matíc typu $n \times n$.

(Pre detaily pozri napr. `https://symomega.files.wordpress.com/2009/11/perth.pdf`)
b) ukážte, že systém n^2 rovnoúhlych priamok v $\mathbb{C}^n$ (príklad 4.7.2 (1) v Martinsson-Tropp) je optimálnym meracím systémom (Def 4.7.1) a naozaj splĺňa rovnosti 4.5, 4.6 a 4.7.

4. *(Vyberový odhad stopy II – Stochastická Lanczosova kvadratúra)*:
a) Pre maticu A z 36.3 (DÚ č. 7) nájdite jej stopu a Frobeniovu normu. Nájdite aj inverznú maticu A^{-1} a jej stopu, podobne aj pre maticu A^8. Použite algoritmy 5 a 6 (str. 22-24 v Martinsson-Trop) pre odhady $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^{-1})$, $\mathrm{tr}(A^2)$, $\mathrm{tr}(A^8)$ a $\det A$ (cez $\sum \log(\lambda_i)$) pre počty iterácií $q = 10, 20, 30$, resp. počty reštartov (a veľkosti priemerov) $k = 1, 2, 5$ a 10.
b) Keďže matica A nie je kladne definitná (najmenšia vlastná hodnota je cca. -0.300962), nemôžeme očakávať že SLQ algoritmus zbehne dobre pre funkcie $1/x$ a $\log(x)$. Skúste to isté s maticou $A + I$, ktorá už bude kladne definitná. Porovnajte s a).
c) Spravte to isté s maticami B_τ z príkladu 38.1 (DÚ č. 8) pre $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$. Pre $\tau = 0.2$ opäť matica nebude kladne definitná a SLQ algoritmus by mal znova prestať fungovať pre odhad $\mathrm{tr}(A^{-1})$ a $\det(A)$.
d) Porovnajte kvalitu odhadov stôp, resp. Frobeniovej normy cez $\mathrm{tr}(A^2) = \|A\|_F^2$, s príkladom č. 1.