

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyd N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (Pozri Lekcia 15, str. 110) V MATLAB-e alebo OCTAVE naprogramujte funkciu, ktorá vypočíta pre zadanú  $2 \times 2$  maticu  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  jej vlastné hodnoty ako korene charakteristického polynómu  $\chi(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ . Na príkladoch  $\begin{bmatrix} 1+5 \times 10^{-14} & -5 \times 10^{-14} \\ -5 \times 10^{-14} & 1+5 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1+5,01 \times 10^{-14} & -5,01 \times 10^{-14} \\ -5,01 \times 10^{-14} & 1+5,01 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} 1+5 \times 10^{-15} & -5 \times 10^{-15} \\ -5 \times 10^{-15} & 1+5 \times 10^{-15} \end{bmatrix}$  nájdite presné vlastné hodnoty a pozorujte, akú (ne)presnosť vieme dosiahnuť použitím procedúry EIG, riešením kvadratickej rovnice pomocou procedúry ROOTS, či priamym dosadením do vzorca pre korene kvadratickej rovnice.

2. (25.1.) (a) Nech  $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  je tridiagonálna a hermitovská s nenulovými zložkami na vedľajších diagonálach. Ukážte, že vlastné hodnoty matice  $A$  sú navzájom rôzne.

(Návod: Ukážte, že pre každé  $\lambda \in \mathbb{C}$  má matica  $A - \lambda I$  hodnotu aspoň  $m - 1$ .)

(b) Predpokladajme, že  $A$  je v hornom Hessenbergovom tvare, pričom všetky zložky na dolnej vedľajšej diagonále sú nenulové. Nájdite príklad matice, ktorá bude mať viacnásobnú vlastnú hodnotu.

3. (25.3.) Predpokladajme, že máme  $3 \times 3$  maticu, pre ktorú chceme vynulovať niektoré jej zložky ľavým a/alebo pravým násobením unitárnymi maticami  $Q_j$ , ako sú Householderove reflektory alebo Givensove rotácie. Uvažujme nasledujúce tri maticové štruktúry:

$$(a) \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Pre každú rozhodnite, ktorá z nasledujúcich situácií nastáva a zdôvodnite.

- (i) Dá sa dosiahnuť postupnosťou ľavých násobení maticami  $Q_j$ ;
- (ii) Neplatí (i), ale dá sa dosiahnuť postupnosťou ľavých a pravých násobení maticami  $Q_j$ ;
- (iii) Nedá sa dosiahnuť žiadnou postupnosťou pravých a ľavých násobení maticami  $Q_j$ .

4. (26.1.) Veta 26.1 a jej obdoby v nasledujúcich kapitolách hovoria, že dokážeme numericky vypočítať približné vlastné hodnoty  $\{\tilde{\lambda}_j\}$  matice  $A$ , ktoré sú presnými vlastnými hodnotami matice  $A + \delta A$  s  $\|\delta A\|/\|A\| = O(\epsilon_{\text{machine}})$ . Znamená to, že sú blízko presným vlastným hodnotám  $\{\lambda_j\}$  matice  $A$ ? Takouto otázkou sa zaoberá teória perturbácií vlastných hodnôt.

Pri jej skúmaní môžeme postupovať geometricky nasledovne. Pre  $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  so spektrom  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}$  a  $\epsilon > 0$  definujeme  $\epsilon$ -pseudospektrum  $\Lambda_\epsilon(A)$  matice  $A$  vzhľadom na 2-normu ako množinu čísel  $z \in \mathbb{C}$  spĺňajúcich ľubovoľnú z podmienok:

- (i)  $z$  je vlastnou hodnotou matice  $A + \delta A$  pre nejakú maticu  $\delta A$  s  $\|\delta A\|_2 \leq \epsilon$ ;
- (ii) Existuje vektor  $u \in \mathbb{C}^m$  spĺňajúci  $\|(A - zI)u\|_2 \leq \epsilon$  a  $\|u\|_2 = 1$ ;
- (iii)  $\sigma_m(zI - A) \leq \epsilon$ ;
- (iv)  $\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$ .

Matica  $(zI - A)^{-1}$  v (iv) sa nazýva *rezolventa* matice  $A$  v bode  $z$ . Ak  $z$  je vlastnou hodnotou matice  $A$  používame konvenciu, že  $\|(zI - A)^{-1}\|_2 = \infty$ . V (iii),  $\sigma_m$  označuje najmenšiu singulárnu hodnotu.

Ukážte, že podmienky (i)–(iv) sú ekvivalentné.

5. (26.3.) Jedným z najznámejších výsledkov v teórii perturbácií vlastných hodnôt je *Bauer-Fikeho veta*. Predpokladajme, že  $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  je diagonalizovateľná ako  $A = V\Lambda V^{-1}$  a  $\delta A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  je ľubovoľná. Potom každá z vlastných hodnôt matice  $A + \delta A$  leží v aspoň jednom z kruhov so stredom vo vlastnej hodnote matice  $A$  a polomerom  $\kappa(V)\|\delta A\|_2$ , kde  $\kappa$  je číslo podmienenosti vzhľadom na 2-normu. (Porovnaj s Príkladom 24.2 – *Geršgorinovou vetou*).

- (a) Dokážte Bauer-Fikeho vetu pomocou ekvivalencií podmienok (i) a (iii) z Príkladu 26.1.

(b) Predpokladajme, že  $A$  je normálna. Ukážte, že pre každú vlastnú hodnotu  $\tilde{\lambda}_j$  matice  $A + \delta A$  existuje vlastná hodnota  $\lambda_j$  matice  $A$  spĺňajúca

$$|\tilde{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \|\delta A\|_2.$$