Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 2

Termín odovzdania: 2. marec 2026

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (27.2) Nech $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$. Množina Rayleighových podielov matice A pre všetky nenulové vektory $x \in \mathbb{C}^m$ sa zvykne nazývať *pole hodnôt* alebo *numerický obraz* matice A. Túto podmnožinu komplexnej roviny označujeme $W(A)$.

a) Ukážte, že $W(A)$ obsahuje konvexný obal množiny vlastných hodnôt matice A.

b) Ukážte, že ak je matica A normálna, potom sa $W(A)$ zhoduje s konvexným obalom množiny vlastných hodnôt matice A.

2. (27.3) Ukážte, že pre nehermitovskú maticu $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ dáva Rayleighov podiel $r(x)$ odhad vlastnej hodnoty, ktorý je vo všeobecnosti lineárny ale nie kvadratický. Vysvetlite aký to bude mať vplyv na rýchlosť konvergencie iterovania pomocou Rayleighovho podielu pre nehermitovské matice.

3. (27.5) Ako sa povedalo počas prednášky, inverzné iterovanie závisí od riešenia systému rovníc, ktorý môže byť veľmi zle podmienený, s číslom podmienenosti až na úrovni $\epsilon_{\text{machine}}^{-1}$. Vieme, že takéto systémy sa nedajú numericky riešiť presne. Nebude toto fatálnou chybou algoritmu?

Ukážte, že tomu tak nebude. Predpokladajme, že A je reálna symetrická matica s jednou vlastnou hodnotou oveľa menšou (v absolútnej hodnote) ako sú ostatné. Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme priamo $\mu = 0$. Predpokladajme, že v je vektor s komponentami v smeroch daných všetkými vlastnými vektormi $q_1, q_2, \ldots, q_m$ matice A. Predpokladajme, že systém $Aw = v$ je vypočítaný spätne stabilne a riešením je vektor $\tilde{w}$. Použijúc výpočet na str. 95 ukážte, že aj keď $\tilde{w}$ môže byť ďaleko od w, podiel $\tilde{w}/\|\tilde{w}\|$ nebude ďaleko od $w/\|w\|$.

4. (28.1) Čo sa stane, ak použijeme QR algoritmus bez posunov pre ortogonálnu maticu? Nájdite odpoveď a potom zdôvodnite ako súvisí s Vetou 28.4., resp. 28.1.

5. (28.2) Predpríprava matice redukciou na tridiagonálny tvar by bola zbytočná, ak by QR algoritmus túto štruktúru nezachovával. Naštastie to tak nie je.

a) Ktoré zložky matice R z QR rozkladu $A = QR$ tridiagonálnej matice A sú vo všeobecnosti nenulové? Ktoré zložky matice Q? (V praxi sa matica Q nezvykne počítať)

b) Ukážte, že tridiagonálna štruktúra sa obnoví po vykonaní súčinu RQ.

c) Vysvetlite ako sa pri výpočte QR rozkladu tridiagonálnej matice dajú použiť Givensove rotácie alebo 2×2 Householderove reflexie, čím sa počet operácií výrazne zníži oproti počtu, ktorý by bolo treba vykonať pri výpočte QR rozkladu pre plnú maticu.

Dobrovoľná úloha:

6. (28.4) Uvažujme jeden krok Algoritmu 28.1 vykonaný pre maticu $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$.

a) Ak nás zaujímajú iba vlastné hodnoty, potom potrebujeme nájsť len maticu $A^{(k)}$, ale maticu $Q^{(k)}$ nie. Určite koľko flopov treba na prechod od $A^{(k-1)}$ k $A^{(k)}$ pomocou štandardných metód popísaných v knižke.

b) Ak chceme nájsť aj vlastné vektory, potom treba počítať aj maticu $\underline{Q}^{(k)} = Q^{(1)}Q^{(2)} \ldots Q^{(k)}$. Určite koľko flopov treba pri prechode z kroku $k-1$ do k.