

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (36.1) V lekcii 27 sa poukázalo na to, že vlastné hodnoty symetrickej matice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  sú stacionárnymi hodnotami Rayleighovho podielu  $r(x) = (x^T Ax)/(x^T x)$  pre  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ukážte, že Ritzove hodnoty v  $n$ -tom kroku Lanczosovho iterovania zodpovedajú stacionárnym hodnotám  $r(x)$  v rámci podpriestoru  $\mathcal{K}_n$ .

2. (36.2) Uvažujme polynóm  $p \in P^n$ , t.j.  $p(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$  pre nejaké  $z_k \in \mathbb{C}$ .

a) Vyjadrite  $\log |p(z)|$  ako súčet  $n$  členov zodpovedajúcich bodom  $z_k$ .

b) Vysvetlite, prečo sa dá člen obsahujúci  $z_k$  interpretovať ako potenciál zodpovedajúci jednotkovému zápornému bodovému náboju umiestnenému v  $z_k$ , ak sa náboje odpudzujú proporčne vzhľadom na prevrátenú hodnotu ich vzdialenosti. Preto sa dá  $\log |p(z)|$  považovať za potenciál v bode  $z$  indukovaný  $n$  bodovými nábojmi.

c) Nahradením náboja veľkosti  $-1$  nábojom  $-1/n$  a zoberúc  $n \rightarrow \infty$  dostaneme spojitú distribúciu náboja  $\mu(\zeta)$  s integrálom  $-1$ , pre ktorú môžeme očakávať vzťah s limitnou hustotou koreňov polynómov  $p \in P^n$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Nájdite integrál reprezentujúci potenciál  $\phi(z)$  zodpovedajúci distribúcii  $\mu(\zeta)$  a vysvetlite jeho súvis s  $|p(z)|$ .

d) Nech  $S$  je uzavretá, ohraničená podmnožina  $\mathbb{C}$  neobsahujúca izolované body. Povedzme, že hľadáme distribúciu  $\mu(\zeta)$  s nosičom v  $S$ , ktorá bude minimalizovať  $\max_{z \in S} \phi(z)$ . Zdôvodnite (nemusí to byť rigorózne), prečo by malo platiť  $\phi(z) = \text{konšt.}$  v celom  $S$ . Vysvetlite, prečo toto znamená, že “náboje” sú v ekvilibriu, t.j. nepôsobí na ne žiadna celková sila. Inými slovami,  $S$  sa správa ako dvojrozmerný vodič v rámci ktorého sa celkový náboj veľkosti  $-1$  rozdeľoval voľne. Až na aditívnu konštantu,  $\phi(z)$  je *Greenova funkcia* pre  $S$ .

e) Ako krok k zdôvodneniu pravidla zo str. 279 predpokladajme, že  $A$  je reálna symetrická matica s husto distribuovaným spektrom v  $[a, b] \cup \{c\} \cup [d, e]$  pre  $a < b < c < d < e$ . Teda interval  $[b, d]$  zodpovedá oblasti s “príliš malým nábojom” v rámci množiny  $S = [a, e]$ . Vysvetlite, prečo sa dá očakávať rýchla konvergencia Ritzových hodnôt k  $c$  a odhadnite rýchlosť konvergenzie vzhľadom na potenciál ekvilibria  $\phi(z)$  zodpovedajúceho množine  $S' = [a, b] \cup [d, e]$ .

3. (36.3) Nech  $A$  je  $1000 \times 1000$  symetrická matica, ktorej zložky sú nulové, okrem  $a_{ii} = \sqrt{i}$  na diagonále,  $a_{ij} = 1$  na vedľajších dvoch diagonálach a  $a_{ij} = 1$  na stých vedľajších diagonálach, t.j. pre  $|i - j| = 100$ . Určite najmenšiu vlastnú hodnotu matice  $A$  pomocou Lanczosovho iterovania s presnosťou na šesť desatinných miest.

4. (37.1) Štandardný rekurentný vzťah pre Legendrove polynómy má tvar

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x),$$

s počiatočnými hodnotami  $P_0(x) = 1$  a  $P_1(x) = x$ .

a) Overte, že takto dostaneme polynómy  $P_2(x)$  a  $P_3(x)$  nájdené v kapitole 7, (7.11).

b) Keďže  $\{P_n(x)\}$  a  $\{q_{n+1}(x)\}$  sú normalizované rôzne, rekurencia v tomto prípade sa líši od vzorca (37.5), v ktorom máme koeficienty dané predpisom (37.6). Napíšte obe príslušné tridiagonálne matice a odvodte vzťah medzi nimi.

c) Použite časť b) pre nájdenie vzorca pre  $q_{n+1}(1)$ , alebo, ekvivalentne, pre  $\|P_n(x)\|$ .

5. (37.2) Využívajúc ortogonalitu polynómov ukážte, že  $q_{n+1}(x)$  má  $n$  navzájom rôznych koreňov, ktoré sa všetky nachádzajú v otvorenom intervale  $(-1, 1)$ . (Fakt, že korene sú rôzne vyplýva aj z riešenia úlohy 25.1, ale tu použijete priamy argument.)