
Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyd N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (39.1) Uvažujme úlohu $Ax = b$ pre $m \times m$ maticu z (39.5).

a) Ukážte, že jej singulárne hodnoty sú 1, z čoho vyplýva, že algoritmus CGN skonverguje v jednom kroku.

b) Ukážte, že jej vlastné hodnoty sú m -té odmocniny z jednotky, a kvôli tomu algoritmus GMRES pre všeobecné b potrebuje m krokov na dokonvergovanie.

c) Takáto matica A je príliš štruktúrovaná – na to, aby sme porozumeli správaniu konvergenzie netreba poznať jej vlastné ani singulárne hodnoty. Konkrétne, vysvetlite na príklade prečo bude GMRES algoritmus potrebovať m krokov pre skonvergovanie pre pravú stranu $b = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

2. (39.2) Ako protiklad k cvičeniu 39.1, zostrojte maticu ľubovoľného rozmeru m so skoro opačnými vlastnosťami: GMRES skonverguje v dvoch krokoch, ale CGN si bude vyžadovať plných m krokov.

3. (39.5) Ktorý z algoritmov CG, GMRES, CGN alebo BCG by ste očakávali ako najefektívnejší pre riešenie $m \times m$ úlohy $Ax = b$? Dôvody?

a) A je hustá nehermitovská matica s $m = 10^4$, ktorej všetky vlastné hodnoty, s výnimkou troch, sú približne rovné -1 .

b) Rovnako ako v a), ale tentoraz sa všetky vlastné hodnoty, s výnimkou troch, nachádzajú zhruba rovnomerne v oblasti $-10 \leq \text{Real}(\lambda) \leq 10$, $-1 \leq \text{Imag}(\lambda) \leq 1$.

c) A je riedka nehermitovská matica s $m = 10^6$, iba s 10^7 nenulovými zložkami a vlastnými hodnotami ako v a).

d) A je riedka hermitovská matica s $m = 10^5$, ktorej vlastné hodnoty sa nachádzajú v celom intervale $[1, 100]$.

e) Rovnako ako v d), ale tentoraz má A ešte navyše dve osamotené vlastné hodnoty 0.01 a 10 000.

f) Rovnako ako v e) s dodatočnými odľahlými hodnotami -1 , -10 a -100 .

g) A je riedka normálna matica s $m = 10^5$, ktorej komplexné vlastné hodnoty sa nachádzajú zhruba rovnomerne v medzikruží $1 \leq |\lambda| \leq 2$.

4. (40.1) Majme $A = M - N$, kde M je regulárna matica. Predpokladajme, že $\|I - M^{-1}N\|_2 \leq 1/2$ a M sa použije ako predpodmienkovacia matica ako v (40.2).

a) Ukážte, že ak na takto predpodmienkovanú úlohu použijeme GMRES iterovanie, norma reziduálu zaručene klesne po dvadsiatich krokoch aspoň o šesť rádov.

b) Koľko krokov CGN je potrebných pre zaručený pokles rovnakej úrovne?