

Úlohy (strany a číslovanie) sú z článku *Randomized Numerical Linear Algebra: Foundations & Algorithms* od P-G. Martinssona a J. A. Troppa.

Spoločná časť pre všetky príklady:

Vytvorte procedúru, ktorá dá náhodnú $n \times n$ unitárnu (ortogonálnu) maticu.

1. (Príklad Sketch and solve) a) Vytvorte 400×21 rozšírenú maticu $[A|b]$, ktorej ľavé/pravé singulárne vektory sú náhodné a singulárne hodnoty spĺňajú: $\sigma_i = 30i^{-2}$ pre $i = 1, \dots, 21$.

b) Nájdite presné riešenie problému najmenších štvorcov

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{20}} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

a porovnajte ho s riešením

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{20}} \frac{1}{2} \|S(Ax - b)\|^2$$

pre gaussovskú vzorkovaciu maticu S typu $400 \times d$, kde $d = 60, 240$. Porovnajte s odhadom reziduálov daným teóriou na str. 41. Zopakujte zopár krát aby ste mohli povedať, čo bude typické správanie.

2. (Iterative Sketching) a) Použite 400×21 rozšírenú maticu $[A|b]$ z príkladu č. 1.

b) Vytvorte iteratívny algoritmus pre iterované načrtávanie založený na rovnici (10.4).

c) Nájdite presné riešenie problému najmenších štvorcov

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{20}} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

a porovnajte ho s riešením x_j pre gaussovské vzorkovacie matice S_i typu $400 \times d$, kde $d = 40, 60$ a $j = 5, 10, 20$. Porovnajte s odhadom reziduálov daným teóriou na str. 41. Zopakujte zopár krát aby ste mohli povedať, čo bude typické správanie pre jednotlivé parametre.

3. (Príklad RSVD) a) Vytvorte 400×100 maticu B , ktorej ľavé/pravé singulárne vektory sú náhodné a singulárne hodnoty spĺňajú: $\sigma_i = 30i^{-2}$ pre $i = 1, \dots, 100$.

b) Pre $l = 10, 25$ použite Algoritmus 8 (str. 45 v Martinsson-Tropp) pre nájdenie RSVD a určite chybu aproximácie $\|B - U\Sigma V^*\|$. Keďže B má $\sigma_{11} \sim 0,2479$ a $\sigma_{26} \sim 0,04438$, lepšie aproximácie hodností 10 a 25 nemôžeme podľa Eckart-Youngovej vety dostať – minimum chyby sa nadobúda pre orezaný (presný) SVD rozklad.

4. (Príklad Single-view SVD) a) Použite 400×100 maticu B z príkladu č. 3.

b) pre $k = 10$ a $l = 40$, resp. $k = 25$ a $l = 100$ použite upravený Algoritmus 17 (str. 65-66 v Martinsson-Tropp), ktorý využíva vzorkovacie matice Ω a Υ a rovnice (15.8) a (15.9) pre nájdenie single-view SVD a určite chybu aproximácie $\|A - U\Sigma V^*\|$. Porovnajte s príkladom č. 3.

c) pre $k = 10$, $l = 40$ a $s = 40$, resp. $k = 25$, $l = 100$ a $s = 100$ použite Algoritmus 17 (str. 66 v Martinsson-Tropp), ktorý využíva vzorkovacie matice Ω , Υ , Φ a Ψ a rovnice (15.10) až (15.12) pre nájdenie single-view SVD a určite chybu aproximácie $\|A - U\Sigma V^*\|$. Porovnajte s príkladom č. 3, resp. časťou b).