Sylabus predmetu Lineárna algebra

Binárne operácie, grupy, polia. Vektorové priestory. Lineárne podpriestory a lineárna nezávislosť. Báza a dimenzia. Matice a sústavy lineárnych rovníc. Lineárne zobrazenia a ich matice. Inverzná matica, hodnosť matice. Determinanty. Skalárny súčin a euklidovské priestory.

Literatúra

[ATA] T. Katriňák a kol.: *Algebra a teoretická arimetika 1*

[K] J. Korbaš: *Lineárna algebra a geometria I*

[SG] J. Smítal, E. Gedeonová: *Lineárna algebra* (skriptá FEI STU)

[Z] P. Zlatoš: *Lineárna algebra a geometria* (`thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos`)

[BM] G. Birkhoff, S. MacLane: *Prehľad modernej algebry*

[O] P. Olšák: *Lineární algebra* (`math.feld.cvut.cz/olsak/linal.html`)

[S] J. Slovák: *Lineární algebra* (`www.math.muni.cz/~slovak/`)

[H] J. Hefferon: *Linear algebra* (`joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`)

Cvičenie 1 Zobrazenia

Hviezdičkou budem označovať náročnejšie úlohy. Znamienko + označuje tie úlohy, ktoré nemusíte vedieť na písomku (rovnako ako hviezdičkové).

Definícia 1. *Zobrazenie (funkcia)* f z množiny X do množiny Y je podmnožina množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ také, že $(x, y) \in f$.

Označujeme $f \colon X \to Y$. Namiesto $(a, b) \in f$ používame zápis $f(a) = b$.

Dve zobrazenia $f \colon X \to Y$, $f \colon Z \to W$ sa *rovnajú*, ak $X = Z$, $Y = W$ a pre každé $x \in X$ sa $f(x) = g(x)$. Označujeme $f = g$.

Zobrazenie môžeme chápať ako predpis, ktorý každému prvku z X priradí prvok z Y.

Príklad 1. $f_1 \colon N \to N$, $f_1(n) = 2n + 1$
$f_2 \colon N \to N$, $f_2(n) = 2n$
$f_3 \colon N \to N$, $f_3(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n-1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$
$f \colon R \to R$, $f(x) = x. \sin x$
$g \colon R \to R$, $g(x) = \sin x$
$h \colon R \to R$, $h(x) = x^2$

Definícia 2 (Skladanie zobrazení). Ak $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení f a g* nazývame zobrazenie $g \circ f \colon X \to Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Napríklad pre funkcie z príkladu 1 dostaneme $h \circ g(x) = \sin^2 x$ a $g \circ h(x) = \sin x^2$. Vidíme, že pre zobrazenia $g, h \colon A \to A$ vo všeobecnosti neplatí $g \circ h = h \circ g$.

POZOR!!! V niektorej literatúre (napríklad v [ATA]) nájdete skladanie zobrazení definované naopak (t.j. $g \circ f(x) = f(g(x))$), my ho budeme používať takto.

Tvrdenie 1 (Asociatívnosť skladania zobrazení). *Nech $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$, $h \colon Z \to W$ sú zobrazenia, potom*
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Definícia 3. Nech $f \colon X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež injekcia), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.

Hovoríme, že f je *surjekcia (surjektívne zobrazenie, zobrazenie na),* ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.

Hovoríme, že f je *bijekcia,* ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Ekvivalentná definícia injekcie by bola, ak by sme namiesto $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ uvažovali podmienku $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. (Lebo výroky $p \Rightarrow q$ a $\neg q \Rightarrow \neg p$ sú ekvivalentné.)

Tvrdenie 2. *Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.*

Definícia 4. Zobrazenie $id_X \colon X \to X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie (identita).*

Nech $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak $g \circ f = id_X$ a $f \circ g = id_Y$, tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k f.* Inverzné zobrazenie k zobrazeniu f označujeme f^{-1}.

Tvrdenie 3. *Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.*

Definícia 5. Nech $f \colon X \to Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Množinu
$$f(A) = \{f(a); a \in A\}$$
nazývame *obrazom* množiny A v zobrazení f. Množinu
$$f_{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$
nazývame *vzorom* množiny B v zobrazení f.

Úloha 1. Dokážte tvrdenie 1.

Úloha 2. Dokážte tvrdenie 2.

Úloha 3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?

Úloha 4. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

Úloha 5. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.

Úloha 6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $f \circ g = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.

Úloha 7. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.

Úloha 8. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Úloha 9. Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

Úloha 10. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?

Úloha 11. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

Úloha 12. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

Úloha 13. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

Úloha 14$^+$. Dokážte: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f_{-1}(A \cup B) = f_{-1}(A) \cup f_{-1}(B)$.

Úloha 15$^+$. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
c) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$
d) $f_{-1}(A \cap B) = f_{-1}(A) \cap f_{-1}(B)$
e) $f_{-1}(A \cap B) \subset f_{-1}(A) \cap f_{-1}(B)$
f) $f_{-1}(A \cap B) \supset f_{-1}(A) \cap f_{-1}(B)$
g) $f(f_{-1}(B)) = B$
h) $f(f_{-1}(B)) \subset B$
i) $f_{-1}(f(A)) = A$
j) $f_{-1}(f(A)) \subset A$
k) $g \circ f(A) = g(f(A))$

Úloha 16$^+$. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $g\colon P(X) \to P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f(A)$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.

Riešené úlohy

Úloha 3: Predpokladajme, že $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Máme dokázať, že ku každému $z \in Z$ existuje $y \in Y$ také, že $g(y) = z$. Z toho, že $g \circ f$ je surjekcia, vieme, že existuje $x_0 \in X$ také, že $g \circ f(x_0) = g(f(x_0)) = z$. Potom stačí za y zobrať $f(x_0)$.

Ak g je surjekcia $g \circ f$ nemusí byť surjekcia (t.j. opačná implikácia neplatí). Kontrapríklad: $g = id_X$ a f je ľubovoľné zobrazenie z X do X, ktoré nie je surjektívne.

Ak $g \circ f$ je surjekcia, f nemusí byť surjekcia. Kontrapríklad: $f\colon R \to R$; $f(x) = 1$, $g\colon R \to \{1\}$, $g(x) = 1$.

Úloha 7: Máme overiť, či pre každé $y \in Y$ platí $g(y) = h(y)$. Upravujme: $g(y) \overset{(1)}{=} g(f \circ h(y))) = g(f(h(y))) = (g \circ f)(h(y)) \overset{(2)}{=} h(y)$. (V (1) sme využili, že $f \circ h = id_Y$ a v (2) sme využili, že $g \circ f = id_X$.)

Úloha 12: Predpokladajme, že $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Y \to Z$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Najprv ukážme, že ak f je surjekcia, tak platí implikácia $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$. Máme dokázať, že pre všetky $y \in Y$ platí, $g(y) = h(y)$. Nech y je ľubovoľný prvok Y. Ku y existuje $x_0 \in X$ také, že $f(x_0) = y$ (lebo f je surjekcia). Použitím rovnosti $g \circ f = h \circ f$ potom dostaneme $g(y) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0) = (h \circ f)(x_0) = h(f(x_0)) = h(y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Teraz predpokladáme platnosť implikácie $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ a chceme dokázať, že f je surjekcia. Postupujme nepriamo. Nech f nie je surjekcia. Teda existuje $y_0 \in Y$, ktoré nemá žiadny vzor v zobrazení f. Zvoľme si zobrazenia $g, h\colon Y \to \{0,1\}$ tak, že $g(y) = 0$ pre všetky $y \in Y$ a $h(y) = 0$ pre $y \neq y_0$ a $h(y) = 1$. Potom $g \neq h$, ale $g \circ f = h \circ f$, teda uvedená implikácia neplatí.

Úloha 15$^+$: Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$.
a) Neplatí. Kontrapríklad: $f\colon \{0,1\} \to \{0\}$, $f(x) = 0$ pre $x = 0, 1$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. V takomto prípade platí $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ a $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.
b) Platí. Máme dokázať, že $y \in f(A \cap B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.
$y \in f(A \cap B) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y) \Rightarrow [(\exists x)x \in A \wedge f(x) = y] \wedge [(\exists x)x \in B \wedge f(x) = y] \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$
c) Neplatí. Rovnaký kontrapríklad ako v a).
d) Platí. $x \in f_{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Leftrightarrow [x \in f_{-1}(A) \vee x \in f_{-1}(B)]$
$\Leftrightarrow x \in f_{-1}(A) \cap f_{-1}(B)$
e) Platí. Vyplýva to z d), f) Platí. Vyplýva z e).
g) Neplatí. (Ako kontrapríklad stačí zobrať ľubovoľné zobrazenie, ktoré nie je surjektívne a za A položiť celý obor hodnôt.)
h,k) Platia.
i,j) Neplatia. Napríklad pre $f\colon R \to R$, $f(x) = \sin x$, $A = \langle 0, 2\pi \rangle$ platí $f_{-1}(f(A)) = R$.

Cvičenie 2 Permutácie

Definícia 1. Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi\colon M \to M$ budeme nazývať *permutáciou* množiny M.

Permutáciu $\varphi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ budeme zapisovať pomocou usporiadanej n-tice $(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$, ktorá ju jednoznačne určuje. Napríklad permutáciu na množine $\{1, 2, 3\}$, pre ktorú $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 3$ a $\varphi(3) = 2$ zapíšeme ako (132), identickú permutáciu zapíšeme ako (123). (Budeme ju tiež označovať *id*.)

Pri skladaní permutácií (a takisto pri skladaní zobrazení) budeme často vynechávať znak $\circ$, teda píšeme $\varphi\tau$ namiesto $\varphi \circ \tau$.

Ak napríklad $\varphi = (231)$, $\tau = (321)$, tak $\varphi\tau = (132)$, $\tau\varphi = (213)$. Vidíme, že skladanie permutácií vo všeobecnosti nie je komutatívne.

Skladanie permutácií vlastne znamená, že čísla, ktoré sú v prvej zátvorke, napíšem v takom poradí, aké udáva druhá zátvorka (tretie, druhé, prvé). Čiže číslo 3, ktoré je na prvom mieste v permutácii τ udáva, že na prvom mieste vo $\varphi\tau$ permutácii bude tretie číslo z φ, čiže 1, 2 na druhom mieste v τ určuje, že na druhom mieste bude to, čo je na druhom mieste vo φ, t.j. 2 a posledná jednotka určuje, že na treťom mieste má byť 2.

Pozor!!! V [ATA] je skladanie zobrazení (a teda aj skladanie permutácií) definované v opačnom poradí, ako sme ho definovali my.

Inverzné zobrazenie k permutácii je tiež permutácia, zložením dvoch permutácií dostaneme permutáciu.

Úloha 1. Uvažujme o permutáciach na množine $M = \{1,2,3,4,5\}$. Aká je inverzná permutácia ku: (13425), (12354), (31452)? Urobte aj skúšku správnosti, t.j. po vypočítaní φ^{-1} overte, či $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = id$. [(14235), (12354), (25134)]

Úloha 2. $M = \{1,2,3,4\}$. Vypočítajte: (1342)(1243)(4132). Určte inverznú permutáciu k výsledku.

Ak φ je permutácia, tak namiesto $\varphi \circ \varphi$ budeme písať φ^2 a podobne namiesto $\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$ používame φ^n.

Matematicky správnejšie by bolo povedať, že φ^n definujeme matematickou indukciou:
1° $\varphi^0 = id$, $\varphi^1 = \varphi$
2° $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.

Úloha 3. Čomu sa rovná φ^{120}, ak $\varphi = (1423)$?

Úloha 4. Matematickou indukciou dokážte, že $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$, $\varphi^{nm} = (\varphi^n)^m$.

Riešené úlohy

Úloha 3: Matematickou indukciou dokážeme, že platí $\varphi^{3n} = (1234) = id$.
1° Pre $n = 0$, $n = 1$ to stačí overiť výpočtom.
2° $\varphi^{3(n+1)} = \varphi^{3n+3} = \varphi^3 \circ \varphi^{3n} = id \circ \varphi^{3n} = \varphi^{3n} \stackrel{IP}{=} id$.

Cvičenie 3 Binárne operácie, grupy

Definícia 1. *Binárna operácia* na množine A je zobrazenie z množiny $A \times A$ do A.

Ak označíme binárnu operáciu $\circ$, tak namiesto $\circ(a,b)$ budeme používať označenie $a \circ b$, tento zápis budeme niekedy skracovať ako ab.

Teraz uvedieme niekoľko príkladov binárnych operácií. Najprv tie, ktoré poznáme zo strednej školy - sčítanie a násobenie. $+$ je binárna operácia na ktorejkoľvek z množín R, Z, Q, C, R^+, R^-. $\cdot$ je binárna operácia na R, C, Q, Z, R^+. Nie je to však binárna operácia na množine R^-, lebo súčin dvoch záporných čísel nie je záporný.

Ako ďalší príklad definujme operáciu $\oplus$ na množine $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ takto: $a \oplus b$ takto: $a \oplus b = (a+b)(\text{mod } 5)$. Podobne môžeme definovať binárnu operáciu $\odot$ ako $a \odot b = (a.b)(\text{mod } 5)$.

Binárnu operáciu na konečnej množine môžeme tiež určiť tabuľkou: (do riadku a a stĺpca b píšeme výsledok operácie $a \oplus b$.)

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Ďalšie príklady - na množine R: $a * b = a^b$, $a \diamond b = a$, $a \star b = a + b - 1$, $a \bullet b = 0$, $a \,\square\, b = a + b + ab$.

Ak A je množina všetkých zobrazení z množiny X do množiny X, tak skladanie zobrazení je binárna operácia na tejto množine.

Na množine $R^2 = R \times R$ môžeme definovať operáciu $+$ ako $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$.

Definícia 2. *Neutrálnym prvkom* binárnej operácie $\circ$ na množine A je taký prvok $e \in A$, že pre každé $a \in A$ platí

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

Definícia 3. Binárna operácia $\circ$ na množine A je *asociatívna,* ak pre všetky $a, b, c \in A$ platí

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Binárna operácia $\circ$ na množine A je *komutatívna,* ak pre všetky $a, b \in A$ platí

$$a \circ b = b \circ a.$$

Rozmyslite si, ktoré z príkladov operácií, čo sme uviedli, sú asociatívne a komutatívne.

Vlastnosť asociatívnosti vlastne hovorí to, že nezáleží na uzátvorkovaní, inak povedané zápis $a \circ b \circ c$ predstavuje ten istý prvok, bez ohľadu na to, aké uzátvorkovanie zvolíme. Preto zátvorky môžeme vynechávať.

Definícia 4. Nech prvok $e \in A$ je neutrálnym prvkom operácie $\circ$ na množine A. Prvok b nazývame *inverzným prvkom* k prvku a, ak

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Inverzný prvok k prvku a označujeme a^{-1}.

Definícia 5. Grupa je dvojica $(G, \circ)$, kde G je množina a $\circ$ je binárna operácia $\circ$ na G, pričom

(i) pre všetky $a, b, c \in G$ platí $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. (asociatívnosť)

(ii) existuje prvok $e \in G$ tak, že pre všetky $a \in A$ platí $a \circ e = a = e \circ a$. (neutrálny prvok)

(iii) ku každému prvku $a \in G$ existuje prvok $b \in G$ tak, že $a \circ b = b \circ a = e$. (inverzný prvok)

Ak je navyše operácia $\circ$ komutatívna, G sa nazýva *komutatívna (abelovská) grupa.*

Inverzný prvok k a v grupe G je prvkom a jednoznačne určený (úloha 2), zvyčajne sa označuje a^{-1}.

V grupe platia *zákony o krátení,* čiže pre každé $a, b, c \in G$ platí:

$$a \circ b = a \circ c \;\Rightarrow\; b = c$$
$$b \circ a = c \circ a \;\Rightarrow\; b = c$$

V tabuľke binárnej operácie (ak ide o konečnú množinu) sa zákony o krátení prejavia tak, že sa v žiadnom stĺpci nevyskytne dvakrát ten istý prvok (krátenie zľava), resp. v žiadnom riadku sa nevyskytne dvakrát ten istý prvok (krátenie sprava).

Neutrálny prvok môžeme v tabuľke rozoznať tak, že príslušný riadok a stĺpec sa zhoduje s hlavičkou tabuľky. Inverzný prvok k a je taký prvok b, že v riadku a sa nachádza neutrálny prvok v stĺpci b a obrátene v riadku b je neutrálny prvok v stĺpci a. Komutatívnosť sa na tabuľke binárnej operácie prejaví tak, že tabuľka je symetrická podľa diagonály.

Tvrdenie 1 (Zovšeobecnený asociatívny zákon). *Nech $\cdot$ je asociatívna binárna operácia na množine A. Potom súčin $a_1 a_2 \dots a_n$ nezávisí od spôsobu uzátvorkovania.*

Úloha 1. Ak e aj e' je neutrálny prvok binárnej operácie $\circ$ na množine A, tak $e = e'$.

Úloha 2. Ak b aj b' je inverzný prvok k prvku a v grupe G, tak $b = b'$.

Úloha 3. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(Z, .)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(R, .)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(R - \{0\}, .)$, d) $(C, +)$, e) $(C, .)$, f) $(C \setminus \{0\}, .)$
g) $(R^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) R s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
i) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
j) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
k) $(Z_5, \oplus)$

Úloha 4. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

Úloha 5. Dokážte zákony o krátení.

Úloha 6. Dokážte, že v grupe pre ľubovoľné jej prvky a, b platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Úloha 7. Nech G je množina všetkých funkcií $f_{a,b} \colon R \to R$, ktoré sú tvaru $f_{a,b}(x) = ax + b$ pre nejaké reálne čísla $a, b \in R$. Tvorí táto množina funkcií s operáciou skladania grupu? Je množina $\{f_{a,b}; a, b \in R, a \neq 0\}$ s operáciou skladania zobrazení grupa? Dostaneme grupu, ak vezmeme len také $a, b \in R$, že $a = 1$? V tých prípadoch, keď dostaneme grupu, je táto grupa komutatívna?

Úloha 8. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

Úloha 9*. Budeme uvažovať o nasledujúcich operáciach s množinami:
$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ (zjednotenie)
$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ (prienik)
$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$ (rozdiel)
$A \div B = \{x; x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ (symetrická diferencia - ekvivalentne ju môžeme definovať ako $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)
Ak X je ľubovoľná množina, $P(X)$ označíme množinu všetkých jej podmnožín. Potom $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\div$ sú binárne operácie na $P(X)$. Je $P(X)$ s niektorou z týchto operácií grupa?

Úloha 10. Označme:
$M_1 = \{f \colon Z \to Z; f \text{ je bijekcia}\}$
$M_2 = \{f \in M_1; f(n) = n \text{ pre všetky celé čísla } n \text{ až na konečný počet}\}$
$M_3 = \{f \in M_1; f(n) = n \text{ len pre konečný počet } n\}$.
Ktoré z množín M_1, M_2, M_3 tvoria grupu spolu s operáciou skladania zobrazení?

Úloha 11. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.

Úloha 12. Nech G je množina všetkých zobrazení $f \colon R \to R$. Na tejto množine definujeme operáciu $\oplus$ tak, že $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$. Je G s touto operáciou grupa? Ak definujeme $(f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, bude $(G, \odot)$ grupa? Ktoré funkcie treba vynechať, aby sme dostali grupu?

Úloha 13. Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $(G, \circ)$ je grupa. Nech H je množina všetkých zobrazení $f\colon M \to G$. Definujme na H binárnu operáciu $*$ tak, že $(f * g)(x) = f(x) \circ g(x)$. Je $(H, *)$ grupa?

Úloha 14. Na množine R^n (teda na množine všetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel) definujeme binárnu operáciu $+$ ako $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Je R^n s touto operáciou grupa?

Úloha 15. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký je prvok, tak zobrazenie $f\colon G \to G$ definované ako $f(b) = a \circ b$ je bijekcia.

Úloha 16*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

Úloha 17*. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

Úloha 18. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

Úloha 19. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

Úloha 20. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \Box)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $(a, b)\Box(c, d) = (2ac, b + d)$ je grupa.

Úloha 21. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

Riešené úlohy

Úloha 1: Priamo z definície neutrálneho prvku vidíme, že platí $e = e \circ e' = e'$.

Úloha 2: $b = b \circ e = b \circ (a \circ b') = (b \circ a) \circ b' = e \circ b' = b'$.

Úloha 3:
a) Netvorí grupu, lebo napríklad 2 nemá v Z inverzný prvok vzhľadom na násobenie. b) Netvoria grupu, lebo 0 nemá inverzný prvok. c,d) Sú grupy. e) Nie. f,g,h,i) Áno. j) Nie. k) Áno.

Úloha 4: Je to grupa. (Asociatívnosť vyplýva z asociatívnosti skladania zobrazení, neutrálny prvok je identická permutácia (123), inverzný prvok je inverzná permutácia.) Nie je komutatívna. (Stačí si všimnúť, že tabuľka grupovej operácie nie je symetrická podľa diagonály.) Tabuľka vyzerá takto:

	(123)	(213)	(321)	(132)	(231)	(312)
(123)	(123)	(213)	(321)	(132)	(231)	(312)
(213)	(213)	(123)	(312)	(231)	(132)	(321)
(321)	(321)	(231)	(123)	(312)	(213)	(132)
(132)	(132)	(312)	(231)	(123)	(321)	(213)
(231)	(231)	(321)	(132)	(213)	(312)	(123)
(312)	(312)	(132)	(213)	(321)	(123)	(231)

Úloha 5: Ak $a \circ b = a \circ c$, tak vynásobením tejto rovnosti a^{-1} zľava dostaneme $a^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \circ a \circ c$ a po úprave $b = c$. Zákon o krátení sprava sa dokáže podobne.

Úloha 10: M_1 tvorí s operáciou skladania zobrazení grupu. Zloženie dvoch bijekcií je opäť bijekcia, teda $\circ$ je binárna operácia na M_1. Asociatívnosť je splnená vďaka tomu, že skladanie zobrazení je asociatívne. Neutrálny prvok je id_Z. Inverzný prvok je inverzné zobrazenie, vieme, že ku každej bijekcii inverzné zobrazenie existuje.

M_2: V tomto prípade je jediný problém overiť, či $\circ$ je binárna operácia na M_2, čiže či zloženie dvoch takýchto zobrazení je opäť z M_2. Nech $g, f \in M_2$, dokážeme, že aj $g \circ f \in M_2$. Označme $A_g = \{z \in Z : g(z) = z\}$ a $A_f = \{z \in Z : f(z) = z\}$. Ak pre z platí $f(z) \in A_g$ a $z \in A_f$, tak $g(f(z)) = f(z) = z$. Podmienka $g(f(z)) \neq z$ môže byť teda splnená iba pre $z \notin A_f$ (tých je konečne veľa, lebo $f \in M_2$) alebo $f(z) \notin A_g$ (takých $f(z)$ je konečne veľa a keďže f je bijekcia, aj počet z, ktoré spĺňajú túto podmienku bude rovnaký). Teda iba pre konečne veľa z sa $g(f(z)) \neq z$, čo znamená, že $g \circ f \in M_2$. (Asociatívnosť, existencia neutrálneho a inverzného prvku sa overí podobne ako v prvom prípade.)

Zobrazenia $g(z) = z+1$, $f(z) = z-1$ patria do množiny M_3, ale $g \circ f = id$ do nej nepatrí. Teda $\circ$ nie je binárna operácia na M_3.

Cvičenie 4 Polia

Definícia 1. *Pole* je množina F s dvoma binárnymi operáciami $+$ a $\cdot$, pričom $(F, +)$ je abelovská grupa s neutrálnym prvkom 0, $(F - \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa (jej neutrálny prvok označujeme 1) a pre všetky $a, b, c \in F$ platí tzv. *distributívny zákon*

$$a.(b + c) = a.b + a.c, \ (b + c).a = b.a + c.a$$

To znamená, že pole je vlastne množina F s binárnymi operáciami $+$ a $\cdot$ taká, že:

(i) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(ii) pre všetky $a, b \in F$ platí $a + b = b + a$,

(iii) existuje prvok $0 \in F$ taký, že pre každé $a \in F$ sa $a + 0 = a$,

(iv) ku každému $a \in F$ existuje $b \in F$ tak, že $a + b = 0$,

(v) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a.(b.c) = (a.b).c$,

(vi) pre všetky $a, b \in F$ platí $a.b = b.a$,

(vii) existuje prvok $1 \in F$ taký, že pre každé $a \in F$ sa $a.1 = a$,

(viii) ku každému $a \in F$, $a \neq 0$ existuje $b \in F$ tak, že $a.b = 1$,

(ix) pre všetky $a, b, c \in F$ sa $a.(b + c) = a.b + a.c.$[1]

Inverzný prvok vzhľadom na operáciu $+$ k prvku a označujeme $-a$, nazývame ho *opačný prvok* k a. Prvok 0, ktorý je neutrálnym prvkom na sčitovanie nazývame *nulou* poľa F a prvok 1 *jednotkou* poľa F. Inverzný prvok ku $a \neq 0$ vzhľadom na operáciu $\cdot$ sa zvykne označovať a^{-1} alebo $\frac{1}{a}$, nazýva sa *inverzný prvok* k a.

Namiesto $a + (-b)$ používame označenie $a - b$ a $a.b$ sa často skracuje na ab.

Príklady polí: R - reálne čísla s obvyklým sčitovaním a násobením
Q - racionálne čísla s obvyklým sčitovaním a násobením
C - komplexné čísla
Na pripomenutie zo strednej školy:

[1] Pretože operácia $\cdot$ je komutatívna, stačí dokazovať iba jeden z distributívnych zákonov.

Ľubovoľné komplexné číslo môžeme napísať v tvare $a + bi$ (algebraický zápis komplexného čísla), a je reálna a bi je imaginárna časť komplexného čísla $a+bi$. Sčitovanie sa definuje tak, že $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, násobenie $(a+bi).(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Komplexné číslo $a + bi$ môžeme napísať tiež v goniometrickom tvare $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. $r = \sqrt{a^2+b^2}$ sa nazýva absolútna hodnota alebo tiež modul komplexného čísla, α je argument komplexného čísla. Pre násobenie komplexných čísel v goniometrickom tvare platí: $r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha).r_2(\cos\beta + i\sin\beta) = r_1r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$, teda vynásobia sa moduly a argumenty sa sčítajú. Pre umocňovanie platí $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n] = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

Tvrdenie 1. *Nech $(F, +, \cdot)$ je pole. Potom pre $a, b, c \in F$ platí*
a) $a.0 = 0$,
b) $(-a).b = -a.b$
c) $(-a).(-b) = a.b$
d) $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$,
e) $a.b = a.c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$,
f) $a.a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$.

Tvrdenie 2. *Označme $Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, na tejto množine definujme binárne operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že*

$$a \oplus b = (a+b) \bmod p,$$
$$a \odot b = (a.b) \bmod p.$$

Ak p je prvočíslo, tak $(Z_p, \oplus, \odot)$ je pole.

Ak n je celé číslo a a, b sú prvky poľa F, tak definujeme $n \times a$ takto:
$0 \times a = 0$
$(n+1) \times a = n \times a + a$ (zatiaľ sme to indukciou definovali pre prirodzené čísla)
Ak $n > 0$ tak definujeme $(-n) \times a = -(n \times a)$ (tým sme rozšírili definíciu aj na záporné čísla)
Podobne definujeme pre $a \neq 0$: $a^0 = 1$
$a^{n+1} = a^n.a$
$a^{-n} = (a^n)^{-1}$ $(n > 0)$

Úloha 1. Dokážte tvrdenie 1.

Úloha 2. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na obvyklé sčitovanie a násobenie pole?
a) $F = \{a + ib; a \in R, b \in R, b \geq 0\}$
b) $F = \{a + ib; a \in Q, b \in Q\}$
c) $F = \{a + ib; a \in Z, b \in Z\}$
d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in Q, b \in Q\}$
e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in Q, b \in Q\}$
f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a \in Q, b \in Q\}$
g*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in Q, b \in Q\}$

Úloha 3. Je $(Z_p, \oplus, \odot)$ pole, ak p je zložené číslo?

Úloha 4. V poli Z_5 vyrátajte $2^{-1} \oplus 4$, $(-2) \oplus 4$, $2^{-1} \odot 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.

Úloha 5. V Z_5 vyrátajte 2^3, $(2^{-1})^4$, $2 \odot (4^{-1})^3$, $(4 \odot 2^{-1})^3$, $(-1)^5 \odot (4 \odot 3^{-1})^2$.

Úloha 6. Nech m, n sú celé čísla, a, b, $b_1, \ldots, b_n$ sú prvky poľa F. V úlohách f) až j) predpokladáme, že $a \neq 0$. Dokážte:

a) $m \times a + n \times a = (m+n) \times a$
b) $m \times a + m \times b = m \times (a+b)$
c) $m \times (n \times a) = (mn) \times a$
d) $a.(n \times b) = n \times (a.b)$
e) $(m \times a)(n \times b) = (mn) \times (a.b)$
f) $m \times (m \times a)^{-1} = a^{-1}$
g) $a^m.a^n = a^{m+n}$
h) $a^m.b^m = (a.b)^m$
i) $(a^m)^n = a^{mn}$
j) $a^{2k} = (-a)^{2k}$

Úloha 7. V ľubovoľnom poli F platí:

$$\begin{gathered} a+b=a+c \Rightarrow b=c \\ (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \\ -(-a)=a \\ -0=0 \\ -(a+b)=(-a)+(-b) \\ (a-b)c=ac-bc \\ 1 \neq 0 \\ a.a=1 \Leftrightarrow a=1 \vee a=-1 \\ a.(b_1+\ldots+b_n)=a.b_1+\ldots+a.b_n \end{gathered}$$

Úloha 8. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x.y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poľa spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?

Úloha 9. Nech F je pole a $a \in F$. Definujeme zobrazenie $f_a\colon F \to F$ tak, že $f_a(b) = a + b$. Je f_a bijekcia? Ak áno, ako vyzerá zobrazenie ${f_a}^{-1}$? Čomu sa rovná $f_a \circ f_b$?

Ďalej definujeme $g_a\colon F \to F$ pre $a \neq 0$ tak, že $g_a(b) = a.b$. Je to bijekcia?

Úloha 10. Nech na množine $M = \{0,1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

Ukážte, že $(M,+)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú abelovské grupy a že platí distributívny zákon $(a+b)c = ac + bc$. Je $(M,+,\cdot)$ pole?

Úloha 11. Zistite, či $(\mathbb{R},+,*)$, kde $+$ je obyčajné sčitovanie reálnych čísel a pre každé $a,b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.

Úloha 12. Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
a) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ a $(a,b).(c,d) = (ac, bd)$,
b) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ a $(a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.
Je potom $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ pole?

Úloha 13*. Pre ktoré prvky a poľa Z_7 má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli Z_{109}?

Úloha 14*. Dokážte, že:
a) V ľubovoľnom poli platí $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} \times a^{m-1}b + \binom{m}{2} \times a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} ab^{m-1} + b^m$. (Súčet na pravej strane sa zvykne označovať takto: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \times a^{m-k}b^k$.)
b) V poli Z_p platí: $(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p$.

Riešené úlohy

Úloha 1:
a) $a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$. Zo zákona o krátení v grupe $(F,+)$ dostaneme $a.0 = 0$.
b) Keďže inverzný prvok je určený jednoznačne, stačí overiť, či $(-a).b$ je inverzný k $a.b$. $a.b + (-a).b = (a-a).b = 0.b = 0$, $(-a).b + a.b = (-a+a).b = 0.b = 0$.
c) $(-a).(-b) = -a.(-b) = -(-a.b) = a.b$
d) Nepriamo: Ak $a \neq 0$ aj $b \neq 0$, tak aj $a.b \in F \setminus \{0\}$, lebo inak by $\cdot$ nebola binárna operácia na $F \setminus \{0\}$.
e) V prípade, že $b \neq 0$ a $c \neq 0$ je to vlastne zákon o krátení v grupe $(F \setminus \{0\}, .)$. Ak $b = 0$, tak dostaneme $a.c = 0$ a z d) zistíme, že aj $c = 0$.

Úloha 2: Všetky úlohy sa riešia veľmi podobne, podrobnejšie rozoberieme len jednu z nich.
a) Nie, lebo i nemá inverzný prvok vzhľadom na sčítanie ($-i \notin F$).
b) Áno. Inverzný prvok k $a+ib$ je $\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \in F$
c) Nie. Napríklad 2 nemá inverzný prvok vzhľadom na násobenie.
d) Je zrejmé, že $+$ je binárna operácia na M (súčet dvoch čísel z M patrí do M). Overme to aj pre súčin: ak $a,b,c,d \in Q$, tak $(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd) + (bc+ad)\sqrt{5}$. Pretože čísla $ac+5bd$, $bc+ad$ sú racionálne, aj súčin patrí do M. Neutrálny prvok operácie $+$ je 0, neutrálny prvok operácie $\cdot$ je 1, 0 aj 1 sú prvky z množiny M. Komutatívnosť, asociatívnosť aj distributívne zákony sa prenesú z poľa reálnych čísel (pretože prvky z M sú reálne čísla a sčitujeme aj násobíme ich rovnako ako reálne čísla). Opačný prvok k prvku $a+b\sqrt{5}$ je $-a-b\sqrt{5}$.

Jediná problematická časť úlohy je zistiť, či $a+b\sqrt{5}$, má v M inverzný prvok, t.j. či $\frac{1}{a+b\sqrt{5}} \in M$. (Predpokladáme, že $a+b\sqrt{5} \neq 0$, čo znamená, že aspoň jedno z čísel a, b je nenulové.) Použijeme nasledovnú úpravu (odstránime odmocninu v menovateli):

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}} = \frac{1}{a+b\sqrt{5}} \cdot \frac{a-b\sqrt{5}}{a-b\sqrt{5}} = \frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2} = \frac{a}{a^2-5b^2} - \frac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}$$

Treba si uvedomiť, že v týchto úpravách sme nemali v menovateli nulu, pretože pre racionálne čísla nemôže platiť $a = b\sqrt{5}$. Keďže $\frac{a}{a^2-5b^2} \in Q$, $\frac{b}{a^2-5b^2} \in Q$, zistili sme, že $\frac{1}{a+b\sqrt{5}} \in M$.
e,f) Je pole.
g*) Nie je to pole. Postupujme sporom - predpokladajme, že F je pole. Potom $\sqrt[3]{25} \in F$, lebo je to inverzný prvok k $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$. Čiže existujú $a,b \in Q$ tak, že platí $\sqrt[3]{25} = a + b\sqrt[3]{5}$. Vynásobme túto rovnicu $\sqrt[3]{5}$ a upravujme:

$$5 = a\sqrt[3]{5} + b\sqrt[3]{25} = a\sqrt[3]{5} + b(a+b\sqrt[3]{5}) = (a+b^2)\sqrt[3]{5} + ab$$
$$5 - ab = (a+b^2)\sqrt[3]{5}$$

Na ľavej strane je racionálne číslo. Aby sme dostali racionálne číslo aj na pravej strane tejto rovnice, musí platiť $a + b^2 = 0$. Potom sa aj ľavá strana rovná nule, čiže $5 = ab$. Riešením týchto dvoch rovníc dostaneme, že $b = -\sqrt[3]{5}$, $a = -\sqrt[3]{25}$, čo nie sú racionálne čísla.

Úloha 6f): Poznámka k ostatným častiam úlohy: Väčšinu treba dokazovať matematickou indukciou. Pri niektorých je užitočné použiť niektorý zo vzťahov dokázaných v predchádzajúcich častiach úlohy.

Máme vlastne overiť, že $m \times (m \times a)^{-1}$ je inverzný prvok k a, teda potrebujeme zistiť, či platí $(m \times (m \times a)^{-1}).a = 1$. Z definície inverzného prvku vieme že platí $(m \times a).(m \times a)^{-1} = 1$. Podľa d) pre $n = 1$ a $b = (m \times a)^{-1}$ dostaneme, že $1 = (m \times a).(m \times a)^{-1} = m \times (a.(m \times a)^{-1}) = m \times ((m \times a)^{-1}.a)$. Opäť použitím d) (tentokrát v úlohe a vystupuje

$(m \times a)^{-1}$, $n = 1$ a b nahradíme a-čkom) dostaneme $1 = (m \times (m \times a)^{-1}).a$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 10: Operácia $+$ je vlastne sčítanie modulo 2 na Z_2 (teda operácia $\oplus$), o $(Z_2, \oplus)$ sme už dokázali, že je to grupa. $M \setminus \{1\}$ je jednoprvková množina, pre binárnu operáciu na jednoprvkovej množine sa vlastnosti grupy overia ľahko, pretože výsledok ľubovoľnej operácie musí byť vždy ten istý prvok 1.

Všimnime si, že operácia $\cdot$ je definovaná tak, že platí $a.b = a$ pre ľubovoľné dva prvky a, b. Z toho dostávame, že $(a + b).c = a + b$ aj $ac + bc = a + b$.

Z vlastností poľa neplatí distributívny zákon $a(b + c) = ab + ac$, napríklad pre $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ dostaneme $1.(0 + 0) = 1.0 = 1$ a $1.0 + 1.0 = 1 + 1 = 0$.

Cvičenie 5 Vektorový priestor

Definícia 1. Nech F je pole. Nech V je množina, na ktorej je daná binárna operácia $+$, a nech je každému $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$ priradený prvok $c.\vec{\alpha} \in V$, pričom

(i) $(V, +)$ je abelovská grupa,

(ii) $c.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c.\vec{\alpha} + c.\vec{\beta}$,

(iii) $(c + c').\vec{\alpha} = c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha}$,

(iv) $(c.c').\vec{\alpha} = c.(c'.\vec{\alpha})$,

(v) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom V voláme *vektorový priestor nad poľom F*, označujeme $V(F)$.

Prvky poľa F nazývame *skaláry*, prvky množiny V sú *vektory*.

Neutrálny prvok grupy $(V, +)$ sa označuje $\vec{0}$ a nazýva sa *nulový vektor*. Inverzný prvok ku vektoru $\vec{\alpha}$ v grupe $(V, +)$ sa označuje $-\vec{\alpha}$. $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ budeme označovať $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Príklady vektorových priestorov:

Príklad 1. R^n, sčitovanie aj násobenia skalárom je definované po zložkách, t.j.
$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
$c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$

Príklad 2 (Priestor reálnych funkcií). Funkcie $f\colon R \to R$, ak definujeme:
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$(c.f)(x) = c.f(x)$

Tvrdenie 1. *Vo vektorovom priestore $V(F)$ platí:*
a) $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$,
b) $c.\vec{0} = \vec{0}$,
c) $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$ *práve vtedy, keď* $c = 0$ *alebo* $\vec{\alpha} = \vec{0}$,
d) $(-c).\vec{\alpha} = -c.\vec{\alpha}$.

Úloha 1. $\vec{\alpha} = (1, 3, 6)$, $\vec{\beta} = (2, 1, 5)$, $\vec{\gamma} = (4, -3, 3)$. Vypočítajte $7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$, $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$.
[(-7,24,21), (0,0,0)]

Úloha 2. Ukážte, že F je vektorový priestor nad F.

Úloha 3. Nech V je množina všetkých postupností reálnych čísel. Pre postupnosti $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ definujeme $a + b = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $c.a = (c.a_n)_{n=1}^{\infty}$. Overte, že V s týmito operáciami tvorí vektorový priestor nad poľom R.

Úloha 4. Nech M je neprázdna množina, F je pole. Potom množina všetkých zobrazení $f\colon M \to F$ so sčitovaním a násobením definovaným po bodoch tvorí vektorový priestor nad poľom F.

Úloha 5. Nech F je ľubovoľné pole a nech $\vec{\alpha}$ je ľubovoľný prvok. Nech $V = \{\vec{\alpha}\}$. Na V zavedieme operáciu sčitovania ako $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ a násobenie skalárom $c.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (pre každé $c \in F$). Dokážte, že V je vektorový priestor nad poľom F.

Úloha 6. Overte, že $Z_2 \times Z_2$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po zložkách tvorí vektorový priestor nad poľom Z_2.

Úloha 7. Nech F je pole, $V = F^n$. Definujeme $(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, $c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$ pre $c, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in F$. Potom V je vektorový priestor nad poľom F.

Úloha 8. Koľko prvkov má vektorový priestor $(Z_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$?

Úloha 9. Overte, že všetky zobrazenia $f\colon \langle 0, 1\rangle \to R$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po bodoch tvoria vektorový priestor nad poľom R.

Úloha 10. Overte, že R je vektorový priestor nad Q, C je vektorový priestor nad R, C je vektorový priestor nad Q. Je C vektorový priestor nad Z?

Úloha 11. Nech V je vektorový priestor nad poľom F, $c, c_1 \ldots c_k \in F$, $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$. Dokážte, že potom platí $c(\vec{\alpha}_1 + \ldots \vec{\alpha}_n) = c\vec{\alpha}_1 + \ldots + c\vec{\alpha}_n$, $(c_1 + \ldots + c_k)\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha} + \ldots + c_k\vec{\alpha}$. Čomu sa rovná $(c_1 + \ldots + c_k)(\vec{\alpha}_1 + \ldots \vec{\alpha}_n)$?

Úloha 12. Nech V je vektorový priestor na poľom F, $c, c_1, \ldots, c_k \in F$, $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$. Dokážte, že potom platí $c(\vec{\alpha}_1 + \ldots + \vec{\alpha}_n) = c\vec{\alpha}_1 + \ldots + c\vec{\alpha}_n$, $(c_1 + \ldots + c_k)\vec{\alpha} =$

Úloha 13. Dokážte, že vo vektorovom priestore V nad poľom F pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, $c \in F$ platí:
a) $c(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = c\vec{\alpha} - c\vec{\beta}$
b) $c(-\vec{\alpha}) = -c\vec{\alpha}$
c) $(c - d)\vec{\alpha} = c\vec{\alpha} - d\vec{\alpha}$
d) $(-c)(-\vec{\alpha}) = c\vec{\alpha}$
e) $\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$
f) $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})$

Úloha 14. Pre celé číslo n a vektor $\vec{\alpha}$ definujeme $n \times \vec{\alpha}$ podobným spôsobom, ako sme definovali $n \times a$ pre prvok a nejakého poľa F. Dokážte, že potom platí $n \times (c.\vec{\alpha}) = c.(n \times \vec{\alpha})$.

Úloha 15. Zistite, či $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$ $r.(a, b) = (ra, 2rb)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Podpriestory

Definícia 2. Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Neprázdna podmnožina $M \subseteq V$ je *vektorový podpriestor* priestoru V, ak:

(i) $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in M \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} \in F$,

(ii) $\vec{\alpha} \in M \Rightarrow c\vec{\alpha} \in M$ pre všetky $c \in F$.

Ak V je vektorový priestor a M je vektorový podpriestor priestoru V, tak aj M je vektorový priestor.

Tvrdenie 2 (Kritérium vektorového podpriestoru). *Nech V je vektorový priestor nad F. Neprázdna podmnožina $M \subseteq V$ je vektorový podpriestor priestoru V práve vtedy, keď pre každé $a, b \in F$ platí $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in M \Rightarrow a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} \in M$.*

Úloha 16. Dokážte, že množina všetkých funkcií $f\colon R \to R$, ktoré sú tvaru $a+b\cos x+c\sin x$ pre nejaké $a, b, c \in R$ tvoria vektorový podpriestor priestoru všetkých reálnych funkcií.

Úloha 17. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru R^3?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 \in Z\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Úloha 18. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií?
a) funkcie $f\colon R \to R$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon R \to R$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon R \to R$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon R \to R$
f) spojité funkcie $f\colon R \to R$
h) funkcie $f\colon R \to R$ také, že existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon R \to R$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$.

Úloha 19. Overte, či
a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami,
b) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n,
c) množina všetkých polynómov párneho stupňa,
d) množina všetkých polynómov stupňa práve n
sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

Úloha 20. Zistite, či $S = \{f\colon R \to R; f(x) = ax^2+bx+c, a, b \in R\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Riešené úlohy

Úloha 4: Označme množinu všetkých zobrazení z M do F ako V. Súčet a násobenie skalárom sme definovali tak, že pre každé $x \in F$ platí:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

(i) $(V, +)$ je abelovská grupa. Asociatívnosť: Máme overiť, či $(f + g) + h = f + (g + h)$. Rovnosť zobrazení overujeme tak, že overíme, či sa v každom bode rovnajú ich funkčné hodnoty.
$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$
$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$
Komutatívnosť: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$.
Neutrálny prvok je konštatné zobrazenie, ktoré každému x priradí 0. $(0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x))$
Opačný prvok ku f je zobrazenie určené predpisom $g(x) = -f(x)$.

(ii): $(c.(f + g))(x) = c.(f + g)(x) = c.(f(x) + g(x)) = cf(x) + cg(x)$, $(c.f + c.g)(x) = (c.f)(x) + (c.g)(x) = c.f(x) + c.g(x)$. Aj (iii), (iv), (v) by sa overili rovnakým spôsobom.

Podobne ako táto úloha sa rieši aj 9. (Je vlastne jej špeciálnym prípadom.)

Úloha 6: Sčítanie a násobenie v Z_2 budeme označovať len $+$ a $\cdot$, nie $\oplus$ a $\odot$ ako doteraz.

(i) $Z_2 \times Z_2$ je abelovská grupa: komutatívnosť a asociatívnosť je zrejmá, neutrálny prvok je $\vec{0} = (0, 0)$, inverzný prvok ku $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ je $-\vec{\alpha} = (-a_1, -a_2)$.

Všimnime si, že pre násobenie skalárom ľubovoľného vektora $\vec{\alpha}$ zo $Z_2 \times Z_2$ v tomto prípade platí $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$, $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. (Iné skaláry ako 0 a 1 v poli Z_2 nie sú.) Ďalej využijeme to, že v $Z_2 \times Z_2$ pre každý vektor platí $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{0}$. (Platí to preto, že $(a_1, a_2) + (a_1, a_2) = (a_1 + a_1, a_2 + a_2) = (0, 0)$.)

(ii) Ak $c = 0$, na oboch stranách rovnosti dostaneme $\vec{0}$. Pre $c = 1$ je $1.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 1.\vec{\alpha} + 1.\vec{\beta}$.

(iii) Môžu nastať tieto možnosti:
$c = c' = 0$: $(c + c')\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} = \vec{0}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
$c = c' = 1$: $(c + c')\vec{\alpha} = (1 + 1)\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} = \vec{0}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = 1\vec{\alpha} + 1\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{0}$
$c = 0$, $c' = 1$: $(c + c')\vec{\alpha} = 1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
$c = 1$, $c' = 0$: Vďaka komutatívnosti je tento prípade vlastne rovnaký, ako predchádzajúci.

(iv) Ak niektorý zo skalárov c a c' je 0, na oboch stranách vyjde $\vec{0}$. Ak $c = c' = 1$, dostaneme $(1.1)\vec{\alpha} = 1.\vec{\alpha} = 1.(1.\vec{\alpha})$.

Úloha 17: Na základe kritéria vektorového podpriestoru sa ľahko overí, že v prípadoch b), e), f), i) a j) ide o vektorové podpriestory. Ostatné prípady nie sú vektorové podpriestory:
a) $(1, 1, 1) \in M$, ale $\frac{1}{2}(1, 1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin M$,
c) $(0, 1, 0), (1, 0, 0) \in M$, ale $(0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 1, 0) \notin M$,
d) $(3, -2, 0) \in M$, $2.(3, -2, 0) = (6, -4, 0) \notin M$,
g) $(1, 1, 0), (1, -1, 0) \in M$, ale $(1, 1, 0) + (1, -1, 0) = (2, 0, 0) \notin M$,
h) $(1, 1, 1) \in M$, $(-1).(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin M$,

Úloha 19: Budeme využívať to, že dva polynómy $p(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^n$ a $q(x) = b_1 + b_2x + \ldots + b_mx^m$ ($a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$) sa rovnajú práve vtedy, keď majú rovnaký stupeň (t.j. $m = n$) a súčasne majú rovnaké koeficienty (pre každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a_i = b_i$.)

Keďže ide o podmnožiny priestoru všetkých reálnych funkcií, stačí overiť, či platí kritérium vektorového podpriestoru.

a) Nech $p(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_kx^k$ a $q(x) = b_1 + b_2x + \ldots + b_mx^m$ sú ľubovoľné dva polynómy. Predpokladajme, že $m \leq k$. Potom aj $cp(x) + dq(x) = (ca_1 + db_1) + (ca_2 + db_2)x + \ldots + (ca_m + db_m)x^m + ca_{m+1}x^{m+1} + \ldots + ca_kx^k$ je polynóm. Zistili sme, že je to vektorový podpriestor.

b) Je to vektorový podpriestor. Stačí si všimnúť, že v predchádzajúcom odvodení, ak oba polynómy mali stupeň menší alebo rovný n (t.j. $k, m \leq n$), bol aj stupeň polynómu $cp(x) + dq(x)$ najviac n.

c) Nie je to vektorový podpriestor. Napríklad polynómy $p(x) = x^2 + x$ a $q(x) = x^2$ patria do tejto množiny, ale $p(x) - q(x) = x$ už do nej nepatrí.

d) Nie je to vektorový podpriestor. $p(x) = x^n + x$ a $q(x) = x^n$ sem patria, ale $p(x) - q(x)$ sem nepatrí.

Cvičenie 6 Lineárna závislosť, lineárny obal, báza a dimenzia

Lineárna kombinácia a lineárny obal

Ak M_i je podpriestor vektorového priestoru V pre každé $i \in I$, tak $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ je tiež podpriestor V. Pomocou toho sa dá dokázať, že ku každej podmnožine M priestoru V existuje najmenší podpriestor, ktorý obsahuje M. Tento podpriestor sa dá vyjadriť pomocou lineárnych kombinácii vektorov z M.

Definícia 1. Nech $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú vektory z vektorového priestoru V nad poľom F. Vektor $\vec{\alpha}$ nazývame *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$, ak $\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$ pre nejaké $c_1, \ldots, c_n \in F$.

Tvrdenie 1. *Ak $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$ (V je vektorový priestor nad F), tak množina $M = \{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$ všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ je podpriestor vektorového priestoru V. Túto množinu označujeme $[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n]$ a nazývame ju* lineárny obal *množiny $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$, alebo tiež* podpriestor generovaný vektormi *$\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$. Ak je lineárny obal množiny $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$ celý priestor V, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$* generujú *$V$.*

Úloha 1. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom R. Potom $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

Úloha 2. Nech $M = \{(x, y, z) \in R^3; 2x+3y+5z = 0\}$. Ukážte, že M je vektorový podpriestor R^3 a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

Úloha 3. P_n označme množinu všetkých polynómov stupňa najviac n s reálnymi koeficientami. P_n je podpriestor vektorového priestoru všetkých zobrazení $f \colon R \to R$. Platí $P_n = [1, x, \ldots, x^n]$?

Lineárna závislosť

Definícia 2. Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ nazývame *lineárne závislé,* ak existujú skaláry $c_1, \ldots, c_n \in F$, z ktorých aspoň jeden je rôzny od nuly, tak, že platí $c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ nazveme *lineárne nezávislé,* ak nie sú lineárne závislé.

To znamená, že $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé, ak platí implikácia $c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0$ (pre všetky $c_1, \ldots, c_n \in F$).

Úloha 4. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v R^3,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v R^3,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v Z_5^3
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v Z_7^3.

Úloha 5. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z R do R:
a) $x+1$, x^2, x^3,
b) 1, $x+a$, x^2+bx+c (a,b,c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

Úloha 6. Ak $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad poľom R, tak aj $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore na poľom Z_2?)

Úloha 7. Množina $\{\vec{\alpha}\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Dva vektory $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c \in F$ tak, že $c.\vec{\alpha} = \vec{\beta}$,) alebo jeden z nich je $\vec{0}$.

Ak vektory $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{\gamma}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Úloha 8*. Overte, že R je vektorový priestor nad poľom Q. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 9. Nech $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:
a) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha},\vec{\beta},0$, c) $\vec{\alpha},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\gamma},\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Úloha 10. Nájdite 4 vektory v R^2 tak, aby každé dva z nich boli lineárne nezávislé.

Úloha 11. Nech vektory $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory nad poľom R. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\ldots+n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?

Riešené úlohy

Úloha 4c: Máme zistiť, či existujú čísla $a,b,c \in Z_5$ také, že $a(1,3,4)+b(2,1,3)+c(3,1,4) = (0,0,0)$. Dostaneme vlastne sústavu rovníc, treba si uvedomiť, že všetky násobenia a sčítanie v tejto sústave rovníc sa robia v poli Z_5, inak ju riešime dosť podobne ako v R.

$$\begin{aligned}
a+2b+3c &= 0 & \\
3a+b+c &= 0 & /+2.\text{prvý riadok}\\
4a+3b+4c &= 0 & /+1.\text{prvý riadok}\\
\hline
a+2b+3c &= 0 & \\
2c &= 0 & \Rightarrow c=0 \text{ - dosadím do 1.riadku}\\
2c &= 0 & \\
\hline
a+2b &= 0 & \\
a = -2b &= 3b &
\end{aligned}$$

Riešením našej sústavy, je každá trojica tvaru $(3b,b,0)$, kde $b \in Z_5$, napríklad $a=3$, $b=1$, $c=0$. Dané vektory sú lineárne závislé v Z_5^3.

Úloha 5: a) $c_1(x+1)+c_2x^2+c_3x^2 = c_1+c_1x+c_2x^2+c_3x^2$. Polynóm sa rovná nule práve vtedy, keď všetky jeho koeficienty sú nulové, čiže dostaneme, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dané funkcie sú lineárne nezávislé.
b) Ak $c_1 + c_2(x+a) + c_3(x^2+bx+c) = c_3x^2 + (c_2+c_3b)x + (c_1+c_2a+c_3c) = 0$, tak $c_3 = 0$, $c_2 + 3.c_3 = c_2 + 3.0 = c_2 = 0$, $c_1 + c_2a + c_3c = c_1 = 0$. Zistili sme, že dané funkcie sú lineárne nezávislé.
c*) $\cos x = \cos\left(2.\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, čiže $1 + \cos x - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$. Zistili sme, že tieto funkcie sú lineárne závislé.
d) Ak platí, že $c_1x + c_2x(x-1) + c_3x(x-1)(x-2)$ je nulová funkcia, tak po dosadení ľubovoľného čísla za x musí byť výsledok nulový. Skúsme dosadiť $x = 1, 2, 3$. Dostaneme $c_1 = 0$, $c_1 + 2c_2 = 0$, $3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 0$. Z druhej rovnice máme, že $c_2 = -\frac{c_1}{2} = 0$. Z tretej rovnosti vyjde po úprave, že $c_3 = -c_2 - \frac{c_1}{2} = 0$. Zistili sme, že zadané funkcie sú lineárne nezávislé.

Iný spôsob riešenia: každý polynóm roznásobiť a použiť cvičenie b).
e) Označme $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$ a $h(x) = \cos 2x$. Ak by pre nejaké reálne čísla c_1, c_2, c_3 platilo $c_1f + c_2g + c_3h = 0$, tak by muselo pre každé reálne číslo x platiť $c_1f(x) + c_2g(x) + c_3h(x) = 0$. Keď za x dosadíme postupne hodnoty 0, $\frac{\pi}{2}$ a π, dostaneme trojice hodnôt $(f(x), g(x), h(x))$ po rade $\vec{\alpha}_1 = (1,1,1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1,0,-1)$ a $\vec{\alpha}_3 = (1,-1,1)$. Ak by funkcie f, g, h boli lineárne závislé, tak by boli lineárne závislé aj tieto vektory. Ľahko však overíme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ sú lineárne nezávislé.

Báza a dimenzia

Definícia 3. Vektorový priestor V nad poľom F nazývame *konečnorozmerný,* ak existuje konečný počet vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tak, že $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$. ($\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ generujú celý priestor V.) V opačnom prípade ho nazývame *nekonečnorozmerný.*

Ak $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$ a súčasne vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú lineárne nezávislé, tak vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ nazývame *bázou* priestoru F.

Napríklad vektory $\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,\dots,0), \dots, \vec{\varepsilon}_n = (0,\dots,0,1)$ tvoria bázu vektorového priestoru F^n. (Táto báza sa volá *štandardná báza* priestoru F^n.)

V konečnorozmernom priestore V majú ľubovoľné dve jeho bázy rovnaký počet prvkov. Tento počet sa nazýva *dimezia* priestoru V, označuje sa $d(V)$.

Ak vektorový priestor V má dimenziu $d(V) = n$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú lineárne nezávislé vektory, tak $k < n$. Ak $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ je báza V, tak vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ možno doplniť $n-k$ vektormi z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ na bázu priestoru V.

Ak $d(V) = n$, a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak sú ekvivalentné tieto podmienky:
i) $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V,
ii) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,
iii) $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$,
iv) Každý vektor $\vec{\alpha} \in V$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$.

Úloha 12. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v R^3:
a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

Úloha 13. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v Z_5^3:
a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).

Úloha 14. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n) = n+1$ a že $1, x-1, \ldots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 15. Určte dimenziu priestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$.

Úloha 16. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v R^3,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v Z_5^4.

Úloha 17. Ak S a T sú dva podpriestory vektorového priestoru V, $S \subseteq T$ a $d(S) = d(T)$, tak $S = T$

Úloha 18. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 19. Overte, že množina $S = \{f \colon R \to R : (\exists a, b \in R)(\forall x \in R) f(x) = ax + b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z R do R. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.

Úloha 20. Nájdite bázu pre každý vektorový podpriestor z úlohy 17 v cvičení 5.

Riešené úlohy

Úloha 16: Stačí vhodne vybrať niektoré vektory zo štandardnej bázy (v prípade priestoru F_n) alebo z bázy $1, x, \dots, x^n$ (pre polynómy), tak aby spolu s danými vektoromi tvorili lineárne nezávislý systém vektorov.

a) (1,1,2), (2,3,1), (1,0,0) sú lineárne nezávislé - stačí to overiť pomocou sústavy rovníc.

b) Polynómy x^2-1, x^2+1, x, x^3 sú lineárne nezávislé. Z predpokladu $a(x^2-1) + b(x^2+1) + cx + dx^3 = (a-b) + cx + (a+b)x^2 + dx^3$ dostaneme sústavu rovníc $a-b=0$, $a+b=0$, $c=0$, $d=0$, ktorá má jediné riešenie $a=b=c=d=0$.

c) Napríklad (1,2,3,0), (3,4,1,2), (1,0,0,0), (0,1,0,0) sú lineárne nezávislé. Opäť sa to dá overiť riešením sústavy, neskôr sa to naučíme robiť jednoduchšie.

Úloha 17: Označme dimenziu priestorov S a T ako n. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru S. Tieto vektory sú lineárne nezávislé aj v priestore T. Keďže máme n lineárne nezávislých vektorov a $d(T) = n$, tvoria tieto vektory bázu vektorového priestoru T. Dostali sme teda, že $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = T$.

Cvičenie 7 Matice

Súčet matíc $A = ||a_{ij}||$ a $B = ||b_{ij}||$ je matica $A+B = ||a_{ij}+b_{ij}||$. Ak $c \in R$, tak $c.A = ||ca_{ij}||$. *Transponovaná* matica k matici A typu $m \times n$ je matica typu A^T $n \times m$, $A^T = ||a_{ji}||$ (je to vlastne matica A prevrátená symetricky podľa hlavnej diagonály).

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická,* ak $A = A^T$ a *antisymetrická,* ak $A = -A^T$.

Úloha 1. Nech matice A a B sú rovnakého typu. Dokážte, že potom $(A+B)^T = A^T + B^T$ a $(A^T)^T = A$. Čomu sa rovná $(c_1A + c_2B)^T$?

Úloha 2. Dokážte, že
a) množina všetkých symetrických matíc typu $n \times n$ a
b) množina všetkých antisymetrických matíc typu $n \times n$
tvoria podpriestory vektorového priestoru všetkých matíc typu $n \times n$. Je vektorový priestor matíc typu $n \times n$ direktný súčet týchto podpriestorov?

Úloha 3. Dokážte, že každá štvorcová matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. Je vektorový priestor všetkých matíc typu $n \times n$ direktným súčtom priestorov z úlohy 2.

Riadková ekvivalencia matíc a hodnosť matice

Vedúcim prvkom riadku matice nazývame jeho prvý nenulový prvok. Matica A je redukovaná trojuholníková matica, ak:
a) vedúci prvok každého nenulového prvku je 1,
b) každý stĺpec obsahujúci vedúci koeficient niektorého riadku má všetky ostatné prvky nulové,
c) každý nenulový riadok leží nad každým nulovým riadkom,
d) vedúci prvok ľubovoľného riadku je naľavo od vedúcich prvkov nižších riadkov a napravo od vedúcich prvkov vyšších riadkov (t.j. vedúce prvky idú „zľava doprava").

Elementárne riadkové operácie sú výmena dvoch riadkov matice, vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým skalárom a pripočítanie ľubovoľného násobku jedného riadku k inému riadku. Každú maticu možno upraviť elementárnymi riadkovými úpravami na redukovaný trojuholníkový tvar.

Matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* $\Leftrightarrow$ maticu B možno dostať z A pomocou elementárnych riadkových operácií $\Leftrightarrow$ podpriestor generovaný riadkami matice A sa rovná podpriestoru generovanému riadkami matice B $\Leftrightarrow$ A aj B je ekvivalentná s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.

Hodnosť matice = počet lineárne nezávislých riadkov matice = dimenzia vektorového podpriestoru generovaného riadkami matice. Elementárne riadkové úpravy (výmena dvoch riadkov, vynásobenie riadku nenulovou konštantou, pripočítanie násobku jedného riadku k inému) nemenia hodnosť matice.

Pretože $h(A) = h(A^T)$ a elementárne stĺpcové operácie zodpovedajú riadkovým operáciam na transponovanej matici, môžeme pri výpočte hodnosti ľubovoľne kombinovať riadkové a stĺpcové operácie. Pri výpočte redukovanej trojuholníkovej matice, podpriestoru generovaného riadkami matice, pri zisťovaní, či sú dané matice riadkovo ekvivalentné... ich však kombinovať nemôžeme!!!

Úloha 4. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom R b) nad poľom Z_5
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Úloha 5. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(Z_5)^4$:
a) (1,2,0,0), (3,4,0,1)
b) (1,2,3,4), (1,1,1,1), (3,2,1,0)
c) (2,3,4,1), (3,2,4,1), (0,2,3,2)
d) (1,3,1,4,), (3,10,4,3), (2,3,1,1)

Úloha 6. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom R:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Úloha 7. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru [(1,4,1,0),(2,3,-2,-3), $(0,2,-5,-6)$] priestoru R^4: a) (4,11,-3,-3), b)(1,0,11,12), c) (3,0,4,1), d) (1,-1,2,-2).

Úloha 8. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore R^4 nad poľom R, ak $\vec{\gamma}_1 = (1,1,5,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1,0,2,1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2,1,0,1)$, $\vec{\beta}_1 = (1,1,5,1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1,1,6,-2)$.

Úloha 9. Zistite hodnosti matíc
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 10. Upravte maticu na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 11. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in R$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

Úloha 12. Zistite, či priestor [(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)] je podpriestor priestoru [(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)] a) nad Q, b) nad Z_5, c) nad Z_7.

Úloha 13. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 14*. Určite hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

Riešené úlohy

Úloha 10:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) `3.r-=(3/2)*2.r; 2.r-=2*1.r` (Týmto zápisom sa myslí to, že od tretieho riadku sa odpočíta (3/2)-násobok druhého a od druhého dvojnásobok prvého) (2) `3.r*=-2/5` (3) `2.r-=3*3.r` (4) `2.r*=1/4` (5) `1.r+=2*2.r+2*3.r` Hodnosť matice je 2.

Úloha 11:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & 10-c & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & 9-3c & c-3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & -3(3-c) & c-3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ak $c = 3$, tak je posledný riadok nulový. Prvé dva riadky sú zrejme lineárne nezávislé, čiže hodnosť je v tom to prípade 2.

Ak $c \neq 3$, môžeme predeliť posledný riadok $c - 3$. Dostaneme 3 lineárne nezávislé riadky a $h(A)$ je v tomto prípade 3.

Úloha 4b: Aj nejaký príklad nad Z_5.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) `1.r`↔`3.r` (2) `2.r+=3*1.r; 3.r+=2*1.r; 4.r+=1.r` (3) `3.r+=3*2.r; 4.r+=2*3.r`
Hodnosť matice je 2.

Všetky príklady si môžete upraviť tak, že jednotlivé členy matice nahradíte ich zvyškami po delení 3 (5 , 7) a riešite rovnakú úlohu nad Z_3 (Z_5, Z_7).

Lineárne a direktné súčty

Ak S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F, tak vektorový podpriestor $S+T=\{\vec{\alpha}+\vec{\beta};\vec{\alpha}\in S,\vec{\beta}\in T\}$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T.

$$d(S)+d(T)=d(S+T)+d(S\cap T)$$

Ak $S\cap T=\{\vec{0}\}$, tak $S+T$ nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S\oplus T$.

Úloha 15. Určte dimenziu prieniku daných vektorových podpriestorov priestoru $(Z_5)^4$:
a) $V=[(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)]$ a $[(1,2,3,4),(1,1,1,1),(3,2,1,0)]$,
b) $V=[(1,0,0,2),(0,1,0,4),(0,0,1,4)]$ a $[(1,0,4,3),(0,1,2,3)]$.
[b) $[(1,0,4,3)]$]

Úloha 16. Zistite $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U\cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U\cap V$
a) v R^2 pre $U=[(2,5)]$, $V=[(1,3)]$
b) v R^3 pre $U=[(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V=[(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v R^4 pre $U=[(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V=[(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v R^4 pre $U=[(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V=[(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$
e) v R^4 pre $U=[(2,3,2,3),(3,1,3,1)]$, $V=[(2,3,2,4),(1,2,1,3)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1; e) 2,2,3,1]

Úloha 17. Nech $T=[(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(Z_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(Z_5)^3=T\oplus S$. Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 18. Nech $S\neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad poľom F a $d(S)=2$, $d(T)=2$. Dokážte, že $d(S\cap T)\geq 1$.

Úloha 19*. Dokážte, že ak $\vec{e_1},\ldots,\vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V=[\vec{e_1}]\oplus\ldots\oplus[\vec{e_k}]$.

Riešené úlohy

Úloha 16d: Štandardným spôsobom (pomocou riadkových úprav matice zostavenej z daných vektorov) nájdeme bázy $U=[(1,1,1,1),(0,1,2,3)]$ a $V=[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)]$. Pri hľadaní bázy $U+V$ vytvoríme maticu zo všetkých vektorov patriacich do týchto 2 báz a zistíme, že $U+V=R^4=[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$. Tým sme našli aj dimenzie priestorov U, V a $U+V$. Podľa vzorca $d(U)+d(V)=d(U+V)+d(U\cap V)$ vidíme, že $d(U\cap V)=1$.

V tomto prípade sa dá uhádnuť, že vektor, ktorý patrí do oboch priestorov je $(1,1,1,1,)=(1,1,0,0)+(0,0,1,1)$. Výpočtom to zistíme tak, že hľadáme vektory, ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov z bázy U a súčasne ako lineárna kombinácia vektorov z bázy priestoru V. Teda by sme chceli aby platilo $a(1,1,1,1)+b(0,1,2,3)=c(1,0,0,0)+d(0,1,0,0)+e(0,0,1,1)$, čo je ekvivalentné so sústavou rovníc $c-a=0$, $d-a-b=0$, $e-a-2b=0$, $e-a-3b=0$. Riešením sústavy dostaneme $a=b=c=d$, $b=0$. Ak zvolíme za $d=1$, tak hľadaný vektor je $1.(1,1,1,1)+0.(0,1,2,3)=(1,1,1,1)$ Preto $U\cap V=[(1,1,1,1)]$.

Cvičenie 8 Lineárne zobrazenia, súčin matíc

Lineárne zobrazenia

Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F, tak zobrazenie $f\colon V \to W$ sa nazýva *lineárne,* ak pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, $c \in F$ platí

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}) \qquad f(c\vec{\alpha}) = c(f\vec{\alpha}).$$

Veta 1 (Základná veta o lineárnych zobrazeniach). *Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$ je ľubovoľná báza vektorového priestoru V nad poľom F a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru W nad poľom F. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ také, že $f(\vec{\alpha}_1) = \vec{\beta}_1, \dots, f(\vec{\alpha}_m) = \vec{\beta}_m$.*

Matica lineárneho zobrazenia $f\colon F^m \to F^n$ je taká matica typu $m \times n$ nad poľom F, ktorej i-ty riadok je $f(\vec{\varepsilon}_i)$, t.j. je to obraz vektora, ktorý má na i-tom mieste jednotku a na ostatných nuly.

Každému lineárnemu zobrazeniu prislúcha práve jedna matica a obrátene každá matica typu $m \times n$ nad poľom F určuje práve jedno lineárne zobrazenie z F^m do F^n.

Úloha 1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon R^3 \to R^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

Úloha 2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (Z_7)^2 \to (Z_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

Úloha 3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon R^4 \to R^4$ takého, že:
a) $f(1,2,3,1) = (1,3,1,0)$, $f(2,1,3,0) = (0,1,3,1)$, $f(3,2,1,0) = (1,0,3,0)$, $f(2,2,3,4) = (3,1,0,4)$
b) $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$, $f(2,1,3,1) = (1,0,3,1)$, $f(0,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

Úloha 4. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F. Dokážte, že zobrazenie $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a pre každé $c, d \in F$ platí $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$.

Úloha 5. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

Úloha 6. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f(S) = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f_{-1}(T) = \{\vec{\alpha} \in W : (\exists \vec{\beta} \in T) f(\vec{\beta}) = \vec{\alpha}\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

Ak V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie, ktoré je navyše bijekcia, hovoríme, že f je *izomorfizmus* vektorového priestoru V na vektorový priestor W. Ak existuje izomorfizmus $f\colon V \to W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú *izomorfné.*

Úloha 7. Nájdite izomorfizmus vektorových priestorov: a) $M_{m,n}(F)$ (matice typu $m \times n$) a F^{mn}, b) P_n (polynómy stupňa najviac n s reálnymi koeficientmi) a R^{n+1}.

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom:
$f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$ nazývame *jadro* lineárneho zobrazenia f.
$f(V) = \{f(\vec{\alpha}) : \vec{\alpha} \in V\}$ je *obraz* lineárneho zobrazenia f.

Jadro je podpriestor priestoru V a obraz je podpriestor priestoru W. Pre ich dimenzie platí: $d(f^{-1}(0)) + d(f(V)) = d(V)$.

Lineárne zobrazenie je prosté $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$. (T.j. na vektor $\vec{0}$ sa zobrazí jedine $\vec{0}$. Inak povedané: Pri úprave na RTM nedostaneme nulový riadok.)

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V, tak obraz f je $f(V) = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$. To znamená, že f je surjektívne $\Leftrightarrow$ $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$. Ekvivalentná podmienka je, že hodnosť matice zobrazenia sa rovná dimenzii priestoru W.

Úloha 8. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (Z_5)^4 \to (Z_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3&1&2&2\\ 4&3&2&1\\ 0&1&2&4\\ 2&0&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&4&1&1\\ 3&3&3&2\\ 1&4&2&1\\ 4&2&0&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&1&4\\ 4&3&2&1\\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}$

Úloha 9. Nájdite lineárne zobrazenie (ak také existuje), ktoré je prosté a spĺňa podmienky:
a) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(0,1,-2) = (0,-1,2)$,
b) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(1,1,1) = (3,2,4)$,
c) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(0,-1,2) = (0,1,1)$, $f(1,1,-1) = (2,3,2)$.

Úloha 10. Nájdite lineárne zobrazenie $f\colon R \to R$ (ak také existuje), pre ktoré: $f(3,2,3) = (5,-3,-2)$, $f(0,2,1) = (2,0,-2)$, $f(3,0,3) = (3,-3,0)$. Určte bázu a dimenziu jeho jadra a obrazu.

Súčin matíc

Ak $A = ||a_{ij}||$ je matica typu $m \times n$ a $B = ||b_{ij}||$ je matica typu $n \times r$, tak súčin matíc A a B je taká matica C typu $m \times r$, že $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ (t.j. $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj}$). Označujeme ho $C = AB$.

Súčin matíc AB je definovaný iba vtedy, keď A má toľko riadkov, koľko má B stĺpcov.

Pomocou súčinu matíc môžeme zapísať lineárne zobrazenie prislúchajúce matici A typu $m \times n$ takto: $f_A(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}A$. ($x \in F^m$ je vektor, ak ho zapíšeme do riadku, môžeme ho chápať ako maticu typu $m \times 1$.) Z toho potom dostaneme, že $f_A \circ f_B = f_{BA}$. $[f_A(f_B(\vec{\alpha})) = f_A(\vec{\alpha}B) = \vec{\alpha}BA = f_{BA}(\vec{\alpha})]$

Úloha 11. Dokážte, že násobenie matíc je asociatívne ($A(BC) = (AB)C$) a distributívne vzhľadom na sčitovanie ($A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BC + BD$). Ak A je matica typu $m \times n$ a ako I_n označíme jednotkovú maticu typu $n \times n$, tak $I_m A = A I_n = A$.

Úloha 12. Dokážte:
a) $(AB)^T = B^T A^T$
b) Ak A je symetrická matica, tak aj A^n pre každé $n \in N$ je symetrická matica.

Úloha 13. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1&3\\ 2&1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 14. Vyrátajte $E.A$ a $A.E$ pre $A = \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 1&0&-1\\ -1&-2&1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1&0&-3\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$. Akým elementárnym riadkovým/stĺpcovým operáciam zodpovedajú jednotlivé matice E?

Inverzná matica

Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B typu $n \times n$ je *inverzná* matica k matici A, ak $AB = BA = I$, kde I je jednotková matica typu $n \times n$. Inverznú maticu k A označujeme A^{-1}.

Ak A je matica typu $n \times n$, hovoríme, že A je *regulárna matica,* ak hodnosť matice A je n. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď matica A je regulárna.

Ak matica A zodpovedá lineárnemu zobrazeniu f, tak inverzná matica je matica inverzného zobrazenia f^{-1}. (Tzn. inverznú maticu k danej matici môžeme vypočítať tak, že postupom z úlohy 1 vypočítame maticu inverzného zobrazenia. V pôvodnom zobrazení sa vektory $\vec{\varepsilon}_i$ zobrazia na riadky matice a v inverznom naopak.)

Úloha 15. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad R:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\4&3&3\\1&2&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&1\\2&4&3\\3&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&3&1\\2&0&3\\1&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&0&1\\0&3&2\\1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\2&1&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&1\\4&2&1\\1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6}\\0&1&\sqrt{3}\\0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\-1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&5&-9\\1&1&-2\\-2&-3&6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&1&-1\\2&2&-1\\-2&-1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&1&0\\\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\1&-1&-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0\\0&1&-\sqrt{3}\\0&0&1 \end{pmatrix}$

Úloha 16. Nech $f\colon (Z_5)^4 \to (Z_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

Úloha 17. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad Z_2 b) nad Z_3, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 18*. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \begin{pmatrix} 0&3&1\\2&0&3\\1&1&2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1&2&1\\0&1&-1\\0&-1&2 \end{pmatrix}$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

Riešené úlohy

Úloha 1: Postupujeme tak, že si napíšeme do matice vektory a ich obrazy a ľavú časť sa snažíme upraviť riadkovými úpravami na jednotkovú maticu (aby sme našli obrazy vektorov $\vec{\varepsilon}_i$)

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2&0&3&1&2&-1&1\\4&1&5&4&5&-2&1\\3&1&2&1&-1&1&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1&2&1&0&-1\\0&1&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&4&\frac{5}{2}&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1&2&1&0&-1\\0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&-5&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&-2&-4&2&-1\\0&1&0&\frac{11}{3}&\frac{13}{3}&-\frac{5}{3}&0\\0&0&1&\frac{5}{3}&\frac{10}{3}&-\frac{5}{3}&1 \end{array}\right)$$

Hľadaná matica je $\begin{pmatrix} -2&-4&2&-1\\\frac{11}{3}&\frac{13}{3}&-\frac{5}{3}&0\\\frac{5}{3}&\frac{10}{3}&-\frac{5}{3}&1 \end{pmatrix}$. Skúšku správnosti môžeme urobiť tak, že overíme, či f naozaj nadobúda zadané hodnoty, napríklad $f(3,1,2) = 3(-2,-4,2,-1) + 1(\frac{11}{3},\frac{13}{3},-\frac{5}{3},0) + 2(\frac{5}{3},\frac{10}{3},-\frac{5}{3},1) = (1,-1,1,-1)$.

V prípade, že skúška nevyjde, chybu môžeme hľadať tak, že skúšame pre medzivýsledky, či sa vektor na ľavej strane zobrazí na vektor ležiaci od neho napravo v zobrazení určenom maticou, ktorá nám vyšla. Samozrejme chybu môžeme hľadať aj tak, že kontrolujeme jednotlivé úpravy.

b) $\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2&0&3&1&2&-1&1\\4&1&5&4&5&-2&1\\2&-1&4&-1&1&-1&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2&0&3&1&2&-1&1\\0&1&-1&2&1&0&-1\\0&-1&1&-2&-1&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2&0&3&1&2&-1&1\\0&1&-1&2&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$

Vidíme, že môžeme $f(0,0,1)$ zvoliť ľubovoľne. Označme $f(0,0,1) = (a,b,c,d)$. Potom dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2&0&3&1&2&-1&1\\0&1&-1&2&1&0&-1\\0&0&1&a&b&c&d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&\frac{1-3a}{2}&1-\frac{3}{2}b&\frac{1-3c}{2}&1-\frac{3}{2}d\\0&1&0&2+a&1+b&c&-1+d\\0&0&1&a&b&c&d \end{array}\right)$$

Pre každé $a,b,c,d \in R$ je táto matica maticou zobrazenia f s požadovanými vlastnosťami.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & | & 4 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & | & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
Pre lineárne zobrazenie f, ktoré by spĺňalo podmienky zo zadania by muselo platiť $f(0,0,0) = (2,-2,-2,-2)$, ale také lineárne zobrazenie neexistuje. (Lineárne zobrazenie vždy zobrazuje nulový vektor na nulový vektor.)

Úloha 8: Maticu A upravíme na RTM:
$\begin{pmatrix} 3&1&2&2\\4&3&2&1\\0&1&2&4\\2&0&1&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&0&1&2\\0&1&2&4\\3&1&2&2\\4&3&2&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\0&1&2&4\\3&1&2&2\\4&3&2&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\0&1&2&4\\0&1&3&4\\0&3&0&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\0&1&2&4\\0&0&1&0\\0&0&4&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&4\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$
Zistili sme, že báza obrazu je $(1,0,0,1),(0,1,0,4),(0,0,1,0)$. Tieto vektory nevygenerujú celé $(Z_5)^3$, čiže zobrazenie určené touto maticou nie je surjektívne.

Keďže dimenzia obrazu je 3 a súčet dimenzie jadra a dimenzie obrazu má byť 4, dimenzia jadra musí byť 1. Teda $f^{-1}(0) \neq \{\vec{0}\}$ (vtedy by bola dimenzia 0) a zobrazenia f nie je prosté. Bázu jadra tohto zobrazenia by sme našli riešením homogénnej sústavy rovníc s maticou A^T - sústavy rovníc budeme riešiť na ďalšom cvičení. (Platí $\vec{\alpha}A = \vec{0} \Leftrightarrow A^T\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T$, preto dostaneme sústavi s maticou A^T.)

Úloha 9: a) V tomto prípade vyjde jediné zobrazenie, vypočítame ho obvyklým spôsobom a potom zistíme, či je prosté (t.j. či $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$).
b) $\begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\1&-1&1&|&1&2&-2\\1&1&1&|&3&2&4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\0&1&0&|&1&0&3\\0&1&0&|&1&0&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\0&1&0&|&1&0&3 \end{pmatrix}$
Musíme zvoliť vektory $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ tak, aby $(1,0,1),(0,1,0),\vec{\alpha}$ aj $(2,2,1),(1,0,3),\vec{\beta}$ boli lineárne nezávislé. (Lineárne zobrazenie je prosté práve vtedy, keď zobrazuje lineárne nezávislé vektory na lineárne nezávislé.) Zrejme môžeme zvoliť $\vec{\alpha} = (0,0,1)$. Vektor $\vec{\beta}$ nájdeme tak, že (2,2,1) a (1,0,3) doplníme na bázu. Tak zistíme, že môžeme zvoliť napríklad $\vec{\beta} = (0,1,0)$
$\begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\0&1&0&|&1&0&3\\0&0&1&|&0&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&|&2&1&1\\0&1&0&|&1&0&3\\0&0&1&|&0&1&0 \end{pmatrix}$
Ak chceme overiť, či zobrazenie, ktoré sme dostali je skutočne prosté, môžeme vyrátať $\operatorname{Ker} f$. (V tomto prípade, keďže ide o štvorcovú maticu, môžeme sa tiež výpočtom determinantu presvedčiť, že je regulárna, čiže f je izomorfizmus a teda prosté zobrazenie - determinanty budeme preberať neskôr.)
c) $\begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\0&-1&2&|&0&1&1\\1&1&3&|&2&3&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&1&|&2&2&1\\0&-1&2&|&0&1&1\\0&1&2&|&0&1&1 \end{pmatrix}$
Vidíme, že 2 rôzne vektory (0,-1,2) a (0,1,2) sa zobrazia na ten istý vektor, čiže zobrazenie spĺňajúce podmienky zo zadania nemôže byť prosté. (K podobnému záveru by sme dospeli, keby nám vyšlo, že nenulový vektor sa zobrazí na $\vec{0}$, pretože by tento nenulový vektor patril do $\operatorname{Ker} f$.)

Úloha 15a: Zobrazenie dané pôvodnou maticou zobrazí vektory zo štandardnej bázy na riadky matice. My hľadáme zobrazenie, ktoré naopak zobrazuje vektory určené riadkami matice na vektory zo štandardnej bázy. To znamená, že vpravo napíšeme jednotkovú maticu, vľavo danú a upravujeme podobne kým nedostaneme jednotkovú maticu vľavo.
$\begin{pmatrix} 2&3&1&|&1&0&0\\4&3&3&|&0&1&0\\1&2&1&|&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&3&1&|&1&0&0\\0&-3&1&|&-2&1&0\\1&2&1&|&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&1&|&0&0&1\\0&-3&1&|&-2&1&0\\0&-1&-1&|&1&0&-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&1&|&0&0&1\\0&1&1&|&-1&0&2\\0&0&4&|&-5&1&6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&0&|&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&|&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&|&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1&0&0&|&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&|&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&|&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Skúšku správnosti môžeme urobiť vynásobením matíc. Pri hľadaní chyby môžeme postupovať kontrolovaním jednotlivých úprav alebo podobne ako pri matici zobrazenia s tým rozdielom, že teraz kontrolujeme, či sa vektor vpravo zobrazí pomocou danej matice na vektor naľavo od neho.

Cvičenie 9 Sústavy lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc sa nazýva homogénny, ak pravá strana každej rovnice je 0. Množina riešení homogénneho systému s n neznámymi je vektorový podpriestor priestoru F^n.

Elementárne riadkové operácie rozšírenej matice sústavy rovníc nemenia množinu riešení.

Veta 2 (Frobeniova). *Systém rovníc je riešiteľný práve vtedy, keď hodnosť matice systému sa rovná hodnosti rozšírenej matice systému.*

Veta 3. *Nech A je matica typu $m \times n$ a C je matica typu $m \times 1$ s prvkami z poľa F. Nech $\vec{\alpha}$ je nejaké riešenie nehomogénneho systému $A.X = C$ a S je podpriestor všetkých riešení homogénneho systému $A.X = 0$. Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení systému $A.X = C$.*

Gaussova eliminačná metóda Pomocou elementárnych riadkových úprav (výmena 2 riadkov, vynásobenie ľubovoľného riadku rovnice konštantou $c \neq 0$, pripočítanie ľubovoľného násobku jednej rovnice k inej) sa snažíme rozšírenú maticu sústavy upraviť na taký tvar, že ako prvý prvok v každom riadku je 1 (ak sa celý riadok pri úpravách nevynuluje) a pod aj nad týmito vedúcimi jednotkami sú nuly.

V prípade, že počas úprav dostaneme riadok tvaru $(0 \dots 0|c)$, kde $c \neq 0$, sústava nemá riešenie. Ak niektoré stĺpce (v upravenej matici) neobsahujú vedúcu jednotku, tak im prislúchajúce premenné zvolíme za parametre.

Úloha 1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom R:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2 \\ x_4 + x_5 & = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_4 & = 3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = -3 \\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & = -3 \\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & +9x_4 & = 22 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 3 \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & = 1 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & = 5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & = -1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & = 7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & = 8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & = 0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & = 0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & = 0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & = 0 \end{array}$$

Úloha 2. Riešte v Z_5 sústavu určenú maticou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 0&1&3&4&3 \\ 0&0&4&4&4 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$$

Úloha 3. Riešte v R sústavu určenú maticou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$$

Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t - \frac{3}{5}, t + \frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

Úloha 4. Riešte v Z_7 sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5\\ 0&1&1&1&6\\ 3&1&2&3&0\\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0\\ 2&1&0&3&1\\ 3&1&1&1&5\\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4\\ 1&3&3&1&5\\ 4&1&5&1&6\\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1\\ 2&1&2&3&2\\ 3&1&1&1&1\\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$

Úloha 5. Môžete si vymyslieť kopec vlastných sústav. Stačí najprv zvoliť riešenie, koeficienty a dorátať pravé strany. Skúste vymyslieť aj také sústavy, ktoré nemajú riešenie alebo majú viac než jedno riešenie.

Úloha 6. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi (1,2), (-1,6) a (2,3).

Úloha 7$^+$. V závislosti od parametra a riešte systém daný maticou:
a) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^2\\ 1&a&1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^3\\ 1&a&1 \end{array}\right)$

Úloha 8*. O sústave n rovníc o n neznámych vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4\\ 5&6&7&8\\ 9&10&11&12 \end{array}\right)$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.

Riešené úlohy

Úloha 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&-1&1&-3\\ 1&3&0&-3&1\\ 0&-7&3&1&-3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&-1&1&-3\\ 0&5&-3&1&-3\\ 0&-7&3&1&-3 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&-1&1&-3\\ 0&0&2&-4&12\\ 0&0&-4&8&-24 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&-1&1&-3\\ 0&0&1&-2&6\\ 0&0&1&-2&6 \end{array}\right)$$

$$\overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&-1&1&-3\\ 0&0&1&-2&6\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \overset{(5)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&3&-4&4\\ 0&1&0&-1&-3\\ 0&0&1&-2&6\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \overset{(6)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-8\\ 0&1&0&-1&3\\ 0&0&1&-2&6\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

(1) `3.r-=1.r` (Týmto zápisom myslím to, že od tretieho riadku sa odčíta prvý.)
(2) `3.r-=5*2.r; 4.r+=7*1.r`
(3) `3.r*=1/2; 4.r*=-1/4`
(4) `3.r-=4.r`
(5) `2.r+=3.r`
(6) `1.r+=2*2.r-3*3.r`

x_4 zvolíme za parameter - položíme $x_4 = t$. Dostaneme potom $x_1 = -8$, $x_2 = t + 3$, $x_3 = 2t + 6$. Množina všetkých riešení je teda $\underline{\underline{\{(-8, 3 + t, 6 + 2t, t); t \in R\}}}$.

Skúšku správnosti urobíme tak, že dosadíme výsledok do pôvodnej sústavy. V prípade, že v riešení vystupuje parameter, buď dosadíme výsledok aj s parametrom, alebo to vyskúšame pre nejaké dve hodnoty parametra (také, aby sa nám dobre rátalo). Ak je parametrov viac, môžeme napríklad zvoliť najprv všetky parametre za nulu (tým skontrolujeme riešenie nehomogénneho systému) a potom vždy jeden z parametrov položíme rovný 1 a ostatné 0.

Úpravu, v ktorej sme spravili chybu, môžeme nájsť tak, že skúšame, pre ktoré z matíc získaných počas upravovania náš výsledok ešte vyhovuje a pre ktoré už nie.

Úloha 2:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 1&2&4&0&2\\ 0&1&3&4&3\\ 0&0&4&4&4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&&&1\\ &1&4&&1\\ &1&3&4&3\\ &&4&4&4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&&&1\\ &1&4&&1\\ &&4&4&2\\ &&4&4&4 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&&&1\\ &1&4&&1\\ &&4&4&2\\ 0&0&0&0&2 \end{array}\right)$
(1) `2.r+=4*1.r`(2) `3.r+=4*2.r` (3) `4.r+=4*3.r` (Kvôli stručnosti som v matici vynechával nulové koeficienty.)

Pretože sme dostali riadok zodpovedajúci rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$, sústava nemá riešenie.

Cvičenie 10 Determinanty

Determinanty sa definujú len pre štvorcové matice.
Matica typu 2×2: $\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Sarusovo pravidlo:

$$\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ako A si označme ľubovoľnú maticu typu $n \times n$.
Laplaceov rozvoj (podľa i-teho riadku)

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ a M_{ij} je matica, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

$|A| = |A^T|$ (To znamená, že všetko, čo platí pre riadkové úpravy bude platiť aj pre stĺpcové. Takisto Laplaceov rozvoj sa dá robiť aj podľa stĺpca.)

Ak B vznikne z A pripočítaním násobku jedného riadku k inému, tak $|B| = |A|$.
Ak B vznikne z A vynásobením niektorého riadku konštantou c, tak $|B| = c|A|$.
Ak B vznikne z A výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$.

Pretože vieme, ako sa zmení determinant pri vykonaní riadkových úprav, môžeme počítať determinanty podobným spôsobom, ako sme postupovali pri úprave na RTM. Platí $|A| = |A^T|$, čiže môžeme kombinovať riadkové a stĺpcové úpravy. Determinant hornej trojuholníkovej matice je súčin prvkov na diagonále.

$$\left|\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{smallmatrix}\right| = a_1a_2\ldots a_n$$

Determinant súčinu je súčin determinantov.

$$|A.B| = |A||B|$$

Matica A je regulárna (t.j. k A existuje inverzná matica) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
Hodnosť matice A je $n \Leftrightarrow |A| \neq 0$. [2]

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu:[3]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo: Ak A je regulárna matica, tak sústava rovníc určená maticou A s pravými stranami $b_1, \ldots, b_n$ má jediné riešenie, a to takéto:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = |A_j||A|^{-1},$$

pričom A_j je matica, ktorá vznikne z A nahradením j-teho stĺpca stĺpcom $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

[2] Platí tu ekvivalencia, to znamená, že ak je determinant nulový, tak hodnosť musí byť menšia ako n.
[3] Pozor na to, že sú tu vymenené indexy.

Úloha 1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0,8,8.

Úloha 2. Vyriešte v Z_5 pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Úloha 3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)

Úloha 4. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť?
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Úloha 5. Nájdite inverznú maticu k maticiam z cvičenia 7 pomocou determinantu.

Úloha 6. Vypočítate inverznú maticu:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & -1 \end{pmatrix}$

Úloha 7*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 8*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 9*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 10*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Riešené úlohy

Úloha 7*:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-1}(a_2-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-1}(a_n-a_1) \\ 1 & a_{n+1}-a_1 & a_{n+1}(a_{n+1}-a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1}-a_1) \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-1}(a_2-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-1}(a_n-a_1) \\ 0 & a_{n+1}-a_1 & a_{n+1}(a_{n+1}-a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1}-a_1) \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_{n+1}-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{=} (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_{n+1}-a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

(1) `2.s-=`a_1`*1.s, 3.s-=`a_1`*2.s, ..., (n+1).s-=`a_1`*n.s`

(2) od každého riadku odpočítame prvý
(3) z každého riadku okrem prvého vyberieme $(a_i - a_1)$
(4) Laplaceov rozvoj podľa prvého riadku (alebo stĺpca)

Zistili sme, ako vypočítať takýto determinant z determinantu štvorcovej matice, ktorá má rozmer o 1 menší a ako parametre v nej vystupujú $a_2, \ldots, a_{n+1}$. Pomocou toho sa už dá indukciou dokázať, že determinant pôvodnej matice (typu $(n+1) \times (n+1)$) sa rovná $\underline{\underline{(a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_{n+1} - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2)(a_{n+1} - a_2) \ldots (a_{n+1} - a_n)}}$.

Vidíme, že tento determinant je nenulový ak všetky parametre $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sú rôzne. Na základe toho môžeme dokázať, že ak polynóm $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$, tak všetky jeho koeficienty sú nulové. Stačí si zvoliť n rôznych hodnôt x a dosadiť do tejto rovnice dostaneme tak sústavu $n+1$ rovníc s neznámymi $c_n, \ldots, c_1, c_0$. Matica tejto sústavy je Vandermondova matica, ktorá je regulárna (determinant sa nerovná nule). Preto má sústava jediné riešenie $c_n = \ldots = c_1 = c_0 = 0$.

Úloha 8*:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

V kroku (1) sme použili Laplaceov rozvoj podľa prvého riadku, v kroku (2) podľa prvého stĺpca.

Dostali sme rekurentný vzťah $D_n = 2D_{n=1} - D_{n-2}$. Vypočítajme niekoľko prvých hodnôt (prvé dve priamym výpočtom, pri ostatných už môžeme použiť rekurenciu): $D_1 = 2, D_2 = 3, D_3 = 4, \ldots$

Hypotézu, že $D_n = n+1$ ľahko dokážeme matematickou indukciou. Indukčný krok: $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$.

Úloha 9*:

$$D_n = \begin{vmatrix} a{+}b & ab & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a{+}b & ab & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a{+}b & ab & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a{+}b & ab \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & a{+}b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (a{+}b)D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a{+}b & ab & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a{+}b & ab \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a{+}b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a{+}b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

Tentoraz sme robili najprv rozvoj podľa prvého stĺpca a potom podľa prvého riadku.

$D_n = (a+b)D_{n=1} - abD_{n-2}$. Opäť vyrátame niekoľko prvých hodnôt: $D_1 = a+b, D_2 = a^2 + ab + b^2, D_3 = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3, \ldots$

Matematickou indukciou sa budeme snažiť dokázať, že $D_n = a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$. Indukčný krok: $D_n = (a{+}b)D_{n-1} - abD_{n-2} = (a{+}b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - ab\sum_{k=0}^{n-2} a^{n-2-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-1-k}b^k + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

Úloha 10*:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} n{+}1 & n{+}1 & n{+}1 & \ldots & n{+}1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = (n{+}1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (n{+}1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & n{-}1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & n{-}1 \end{vmatrix} =$$

$\underline{\underline{(n+1)(n-1)^{n-1}}}$ V kroku (1) sme od prvého riadku odpočítali všetky ostatné. V kroku (2) sme od ostatných riadkov odpočítali prvý riadok. Nakoniec sme dostali determinant matice, ktorá má pod diagonálou samé nuly. Tento determinant vyrátame ako súčin diagonálnych prvkov.