`http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/cvicenia/tc/`

1. Zistite, či platí: $a \mid b$, $a \mid c \Rightarrow a^2 \mid bc$.
2. $(a,b) =?$, $[a,b] =?$, pre $a = 315$, $b = 825$. Vyjadrite (a,b) v tvare $au + vb$ pre $u, v \in \mathbb{Z}$.
3. Dokážte: Druhú mocninu každého prirodzeného čísla možno zapísať buď v tvare $4k+1$, alebo v tvare $4k$.
4. Dokážte, že ak $n \geq 2$ je zložené číslo a p je najmenšie prvočíslo, ktoré delí n, tak $p \leq \sqrt{n}$.
5. Aspoň dvojciferné číslo, ktorého všetky cifry sú rovnaké nie je druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla. Dokážte!
6. Vyjadrite čísla 217, 1513, 2120 v 5-kovej a v 9-kovej sústave.
7. Určte poslednú cifru čísla $n = 22.51 + 698^5$ pri jeho vyjadrení v sedmičkovej sústave.
8. Zistite, či je číslo $(1202)_6$ deliteľné dvomi a tromi.
9. Dokážte, alebo vyvráťte: $(a,n) = 2 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 2^{\varphi(n)}\,(mod\ n)$.
10. Nech $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a,n) = 1$. Nech k je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré $a^k \equiv 1\,(mod\ n)$. Potom pre každé $l \in \mathbb{N}$ také, že $a^l \equiv 1\,(mod\ n)$ platí, že $k \mid l$. Špeciálne, $k \mid \varphi(n)$. Dokážte!
11. Vyriešte lineárne kongruencie s jednou neznámou:
    a) $15x \equiv -72\,(mod\ 18)$
    b) $14x \equiv -63\,(mod\ 35)$
12. Určte $\tau(2p^3)$ a $\sigma(2p^3)$, ak p je nepárne prvočíslo.
13. Nech $r = \frac{c}{d}$, $(c,d) = 1$, $d, c \in \mathbb{Z}$, je racionálny koreň rovnice $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots a_0 = 0$, pričom $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, $a_k \neq 0$. Dokážte, že potom $c \mid a_0$ a $d \mid a_k$. Z toho dostaneme, že pre rovnicu $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$ platí: Každý racionálny koreň tejto rovnice je celé číslo.

14*. Dokážte, že rovnica $19x^3 - 17y^3 = 50$ nemá riešenie v množine celých čísel.