Fibonacciho a Lucasove čísla

BAKALÁRSKA PRÁCA

Beáta Štupáková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Študijný odbor:
9.1.1 Matematika

Vedúci bakalárskej práce:
RNDr. Martin Sleziak, PhD.

BRATISLAVA 2008

Prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne a použila som len uvedené pramene a literatúru.

Bratislava, 2. 6. 2008 ....

Beáta Štupáková

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať vedúcemu bakalárskej práce RNDr. Martinovi Sleziakovi, PhD. za odbornú pomoc a pripomienky pri vypracovávaní tejto práce.

Názov práce:	Fibonacciho a Lucasove čísla

Pracovisko:	KAGDM, FMFI UK v Bratislave
Autor:	Beáta Štupáková
Vedúci BP:	RNDr. Martin Sleziak, PhD.

Dátum:	14. 5. 2008
Kľúčové slová:	číselná postupnosť, Fibonacciho čísla, Lucasove čísla, rekurencie druhého rádu

Abstrakt: Hlavným cieľom práce je odvodiť základné vlastnosti Fibonacciho a Lucasových čísel. V tých prípadoch, kde je to možné, sme sa pokúsili nájsť odvodenie pomocou maticovej rovnice popisujúcej tieto číselné postupnosti. Ďalej sme sa venovali kombinatorickej interpretácii týchto postupností, ktorá nám poskytla pomerne prirodzené dôkazy ich vlastností. V závere práce sme sa zamerali na zovšeobecnenia Fibonacciho čísel a ukázali sme, že mnohé zaujímavé vlastnosti Fibonacciho postupnosti sú tiež vlastnosťami celej množiny rekurencií druhého rádu.

Obsah

Predhovor

Téma tejto práce priťahuje pozornosť mnohých matematikov predovšetkým vďaka tomu, že je jednoducho sformulovateľná a pritom sa s ňou spája mnoho problémov. Fascinujúce sú hlavne niektoré vlastnosti Fibonacciho čísel, ako aj ich súvis so zlatým rezom, či výskyt v prírode. V roku 1963 bola dokonca v Kalifornii na University of Santa Clara založená spoločnosť *The Fibonacci Association,* ktorá podporuje výskum Fibonacciho čísel a publikuje medzinárodný matematický časopis *Fibonacci Quarterly.*

V tejto práci sme sa zamerali na odvodzovanie identít, ktoré Fibonacciho a Lucasove čísla spĺňajú, pričom tam, kde to bolo možné, sme vychádzali z maticového vyjadrenia týchto postupností. To nám totiž umožňuje mnohé identity objaviť, keď na maticu, ktorá tieto postupnosti popisuje, aplikujeme známe maticové rovnosti. Väčšinu identít sme alternatívne dokázali cez kombinatorickú interpretáciu. Čitateľ sa môže stretnúť s takýmto prístupom v knihe [8], z ktorej sme čerpali aj my, alebo v knihe [4]. Výhodou tohto prístupu je, že jeho pochopenie nevyžaduje špeciálne vedomosti z matematiky a dá sa pekne ilustrovať.

V závere práce sa venujeme zovšeobecneniam Fibonacciho čísel. Ukázali sme, že väčšina známych vlastností Fibonacciho čísel sa dá zovšeobecniť pre rekurencie druhého rádu. Riešenia týchto rekurencií hľadáme ako lineárnu kombináciu geometrických postupností. Tento spôsob riešenia rekurencií je možný všeobecne pre homogénne lineárne rekurencie, o čom sa čitateľ môže dozvedieť viac v knihe [7]. V nej sa tiež uvádza maticový prístup k lineárnym rekurenciám.

Problematike Fibonacciho čísel sa tiež venuje kniha [6] ako aj kapitola 4 z knihy [5] a zovšeobecneným Fibonacciho číslam článok [3]. V tejto práci boli použité aj internetové zdroje [1] a [2].

Kapitola 1

Úvod

1.1 Definícia

Fibonacciho číslami nazývame čísla $F_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, ktoré tvoria postupnosť danú rekurenciou

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1.1}$$

so začiatočnými hodnotami $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

Lucasovými číslami nazývame čísla L_n, ktoré spĺňajú rovnakú rekurenciu ako Fibonacciho čísla, ale začiatočné hodnoty sú $L_0 = 2,\ L_1 = 1$.

1.2 História

Fibonacciho číslami sa už dávno predtým, ako dostali svoje meno, zaoberali indickí matematici, v súvislosti s prozódiou v jazyku Sanskrit. Na Západe sa im dostalo pozornosti až v roku 1228 v druhom vydaní knihy *Liber Abaci* od Leonarda z Pisy, talianskeho matematika prezývaného Fibonacci (t.j. syn Bonacciov). V knihe uviedol problém rastu populácie králikov za trochu idealizovaných predpokladov:

- v prvý mesiac máme jeden pár novonarodených králikov
- novonarodené páry sú schopné mať potomstvo od druhého mesiaca života
- každý mesiac každý pár schopný reprodukcie privedie na svet jeden nový pár
- králiky neumierajú.

Označme F_n počet párov králikov v n-tom mesiaci. Potom platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, pričom $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. (V n-tom mesiaci sú schopné reprodukcie len tie páry, ktoré boli nažive v $(n-2)$-hom mesiaci, teda k F_{n-1} párom pribudne F_{n-2} nových.)

Niekoľko prvých členov Fibonacciho postupnosti:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...
Tieto čísla nazval Fibonacciho číslami francúzsky matematik Édouard Lucas (1842-1891).

1.3 Zlatý rez

Antický učenec Euklides (okolo r. 300 p. n. l.) sa zaoberal úlohou, ako rozdeliť úsečku na dve časti tak, aby pomer celej úsečky k väčšej časti sa rovnal pomeru väčšej časti k menšej, čiže pre úsečku dĺžky a hľadal riešenie rovnice

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \tag{1.2}$$

Hľadaný pomer $\frac{a}{x}$ bol nazvaný *zlatým rezom* a budeme ho tu označovať písmenom α (často sa v literatúre označuje písmenom φ, ako navrhol matematik Mark Barr). Ľahko ukážeme, že α je koreňom rovnice $q^2 - q - 1 = 0$.

$$\alpha = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}, \quad \text{teda} \quad a(a-x) = x^2.$$

Potom

$$\alpha^2 = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a-x}\right) = \left(\frac{a-x}{a-x}\right) + \left(\frac{x}{a-x}\right) = 1 + \alpha.$$

Kvadratická rovnica $q^2 - q - 1 = 0$ má korene $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pričom Euklidovej úlohe vyhovuje iba kladný koreň α.

Nečakanou skutočnosťou je, že toto číslo možno vyjadriť aj ako limitu podielov Fibonacciho čísel, konkrétne

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \tag{1.3}$$

Rovnaké tvrdenie platí pre Lucasove čísla, teda

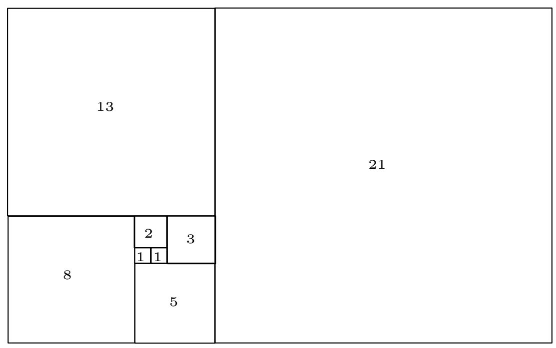
$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} \tag{1.4}$$

Dôkaz týchto tvrdení uvedieme neskôr.

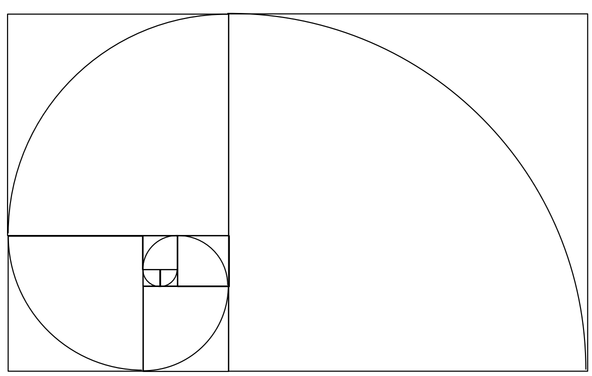
1.4 Výskyt v prírode

Súbor štvorcov, ktorých veľkosti strán sú Fibonacciho čísla, nazývame Fibonacciho štvoruholníky (obr. 1.1).

Špirálu tvorenú štvrtinami kružníc a zakreslenú do Fibonacciho štvoruholníkov spôsobom znázorneným na obr.1.2 nazývame *zlatá špirála.* V prírode ju môžeme nájsť v usporiadaní semien kvitnúcich rastlín, v tvare ulít mäkkýšov, či v tvare galaxií ...



Obr. 1.1: Fibonacciho štvoruholníky



Obr. 1.2: Zlatá špirála

Veľké množstvo kvetín má počet okvetných lístkov zodpovedajúci práve Fibonacciho číslam. Jeden okvetný lístok má napríklad kornútovka, 2 okvetné lístky má prýštec, 3 majú kosatce i ľalie, 5 majú divoké ruže či karafiáty, 8 má lastovičník, 13 majú niektoré sedmokrásky, ale väčšinou majú 21, rovnako ako astry a čakanky, 34 okvetných lístkov majú margaréty, a rastliny z čeľade hviezdicovitých mávajú 55 alebo 89 okvetných lístkov.

Veľa rastlín má semená usporiadané špirálovite v terči, pričom časť semien je v špirálach v smere hodinových ručičiek a časť ich je v špirálach vinúcich sa opačným smerom. Vždy platí, že počty špirál v týchto dvoch smeroch sa rovnajú dvom susedným Fibonacciho číslam. U slnečnice je to väčšinou 21 a 34.

Špirály v smere a proti smeru hodinových ručičiek môžeme vidieť i na šiškách ihličnatých stromov. Počty špirál sa opäť rovnajú susedným Fibonacciho číslam.

Kapitola 2

Priame a maticové vyjadrenie, kombinatorická interpretácia

2.1 Binetov vzorec

Veta 2.1.1. *Pre Fibonacciho čísla F_n platí vzorec*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{2.1}$$

Dôkaz. Ľahko sa overí, že veta platí pre $n = 0, 1$, a potom sa už veta dokáže jednoducho indukciou. Ukážme však, ako sa dá tento vzorec odvodiť. Keď si všimneme, že pomery $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ susedných Fibonacciho čísel s výnimkou niekoľkých prvých hodnôt sa rovnajú približne 1,618, môžeme predpokladať, že Fibonacciho postupnosť sa správa ako geometrická postupnosť. Hľadajme teda takú geometrickú postupnosť $G_n = cq^n, (c, q \neq 0)$, ktorá spĺňa rekurenciu

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}.$$

Potom

$$cq^{n+1} = cq^n + cq^{n-1},$$

z čoho dostávame kvadratickú rovnicu

$$q^2 - q - 1 = 0$$

s koreňmi

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

a

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618034$$

Získali sme dve geometrické postupnosti $G_n = cq_1^n$ a $G'_n = cq_2^n$, ani jedna z nich však nespĺňa $G_0 = F_0 = 0$ a $G_1 = F_1 = 1$. Vieme, že ak postupnosti A_n, B_n spĺňajú rekurenciu (1.1), tak aj ich lineárna kombinácia túto rekurenciu spĺňa. Preto hľadajme vyjadrenie Fibonacciho postupnosti v tvare $F_n = k_1q_1^n + k_2q_2^n$. Zo začiatočných podmienok pre F_n máme sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi

$$0 = k_1 + k_2$$

$$1 = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ktorej riešením sú čísla $k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $k_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Dostali sme vzorec z vety, tzv. *Binetov vzorec*:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

□

Pre Lucasove čísla dostaneme rovnakým postupom, dosadiac za začiatočné hodnoty $L_0 = 2$ a $L_1 = 1$, vzorec

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.2}$$

Skrátene:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad\qquad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha\beta = -1$$

Teraz môžeme ukázať, že platí (1.3) a (1.4).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - (1-\alpha)^{n+1}}{\alpha^n - (1-\alpha)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - (1-\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n} = \alpha$$

keďže $\left|\frac{1-\alpha}{\alpha}\right| < 1$ a teda $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n = 0$.
Pre výpočet tej istej limity s Lucasovými číslami použijeme analogický postup.

2.2 Maticové vyjadrenie

Rekurentný vzťah medzi Fibonacciho číslami vyjadruje maticová rovnosť

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n, \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

z ktorej priamo vyplýva

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1}, \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Použitím Jordanovho tvaru matice A teraz ukážeme nový dôkaz Binetovho vzorca. Vlastné čísla matice A sú $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a prislúchajúce vlastné vektory sú $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ a $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. Platí $A^n = PJ^nP^{-1}$, kde J je Jordanova matica, ktorá má na diagonále vlastné čísla matice A a P je matica zložená z prislúchajúcich vlastných vektorov.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Po roznásobení matíc dostávame

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \end{pmatrix}.$$

Maticové vyjadrenie F_n tiež ukazuje, že Fibonacciho postupnosť je v istom zmysle podobná geometrickej postupnosti. Dalo by sa povedať, že ide o akúsi „maticovú geometrickú postupnosť“ s kvocientom A.

2.3 Kombinatorická interpretácia Fibonacciho čísel

Označme f_n počet všetkých postupností jednotiek a dvojok, ktoré v súčte dávajú n. Napr. $f_4 = 5$, keďže 4 vieme dostať nasledujúcimi 5 spôsobmi:

$$1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2.$$

Pre f_n platí známa rekurencia Fibonacciho čísel

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Presvedčíme sa o tom tak, že budeme uvažovať prvý člen postupnosti. Ak ním je 1, zvyšok postupnosti má súčet $n-1$, teda existuje f_{n-1} spôsobov, ako doplniť postupnosť. Ak je na začiatku 2, postupnosť vieme doplniť f_{n-2} spôsobmi. Z toho máme $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Teraz si ukážeme trochu vizuálnejšiu reprezentáciu f_n. Nech štvorce predstavujú jednotky a namiesto dvojok uvažujme dominá. Potom f_n je počet spôsobov, ako pokryť plochu $n \times 1$ štvorcových políčok štvorcami a dominami. Pre $f_4 = 5$ máme:

Obr. 2.1: $f_4 = 5$

Ak definujeme $f_0 = 1$ a $f_{-1} = 0$, môžeme vysloviť nasledujúcu vetu:

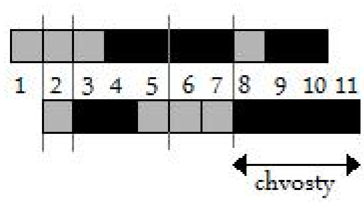
Veta 2.3.1. *Nech f_n je počet spôsobov, ako vyplniť plochu $n \times 1$ štvorcových políčok štvorcami a dominami. Potom f_n je Fibonacciho číslo. Presnejšie, pre $n \geq -1$*

$$f_n = F_{n+1}. \tag{2.5}$$

Pre potreby ďalšej kapitoly si vymedzíme ešte niekoľko pojmov.

Budeme hovoriť, že dláždenie plochy $n \times 1$ políčok (ďalej skrátene n-*dláždenie*) má *zlom* v políčku k, ak sa dá rozdeliť na dve dláždenia - jedno pokrývajúce políčka 1 až k a druhé pokrývajúce políčka $k+1$ až n. Naopak, dláždenie *nemá zlom* v políčku k, ak políčka k a $k+1$ pokrýva domino.

Teraz uvažujme dvojice dláždení, ako napr. dvojica 10-dláždení na obr. 2.2. Prvé pokrýva políčka 1 až 10, druhé pokrýva políčka 2 až 11. Hovoríme, že



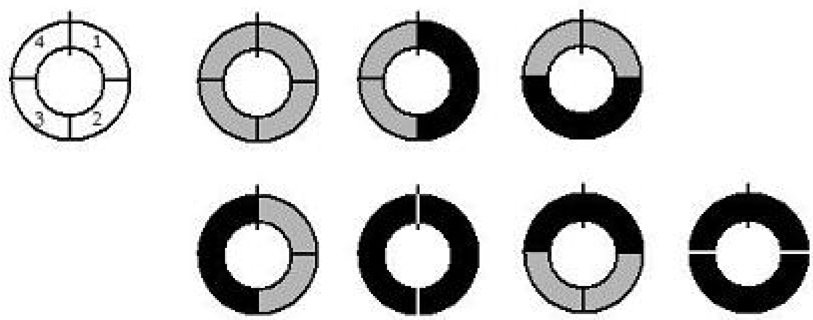
Obr. 2.2: Dve 10-dláždenia, ich zlomy a chvosty.

dvojica dláždení má *zlom* v políčku k, kde $1 \leq k \leq 10$ (v našom prípade), ak ani jedno z dláždení nemá na políčkach k a $k+1$ domino. Dvojica dláždení na obr. 2.2 má teda zlomy v políčkach 1, 2, 5 a 7. Políčka nachádzajúce sa za posledným zlomom nazveme *chvostami* dvojice dláždení.

Existujú aj iné kombinatorické interpretácie Fibonacciho čísel. Niektoré z nich nájde čitateľ v knihe [4].

2.4 Kombinatorická interpretácia Lucasových čísel

Nech l_n je počet spôsobov, ako pokryť medzikružie zložené z n označených políčok pomocou zaoblených štvorcov a domín. Napr. $l_4 = 7$ (obr. 2.3). Je jasné, že



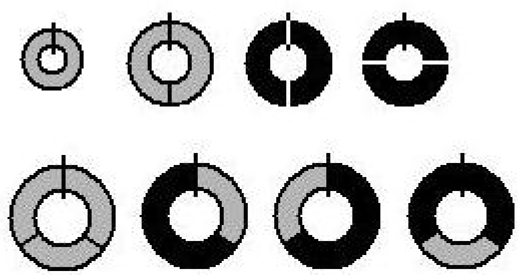
Obr. 2.3: $l_4 = 7$

takto dostaneme viac možností ako pri priamej šachovnici $n \times 1$ políčok, keďže jedno domino môže pokrývať políčka n a 1. Nazvime *n-náramkom* ľubovoľné pokrytie takéhoto medzikružia zaoblenými štvorcami a dominami. Budeme hovoriť, že náramok je *„mimo fázy“*, ak políčka n a 1 sú pokryté jedným dominom. Inak budeme hovoriť, že je *„vo fáze“*.

Z obr. 2.4 vidíme, že $l_1 = 1$, $l_2 = 3$ a $l_3 = 4$. Zdá sa, že počty n-náramkov zodpovedajú Lucasovým číslam. Ukážeme, že pre $n \geq 3$ platí $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$. Najskôr si vymedzíme niektoré pojmy. Ten diel náramku, ktorý pokrýva políčko 1, nazveme *prvým dielom* - môže ním byť štvorec, domino pokrývajúce políčka 1 a 2, alebo domino pokrývajúce políčka n a 1. *Druhý diel* je ďalší diel v smere hodinových ručičiek, atď. *Posledný diel* je ten, ktorý predchádza prvému dielu. Či je náramok vo fáze, alebo nie je, určuje prvý diel. Preto existuje l_{n-1} n-náramkov, ktoré končia štvorcom a l_{n-2} n-náramkov s dominom ako posledným dielom. Po odstránení posledného dielu a uzavretí vzniknutej medzery, dostaneme menšie náramky. Ak definujeme $l_0 = 2$, potom platí nasledujúca veta:

Veta 2.4.1. *Pre $n \geq 0$ označme l_n počet spôsobov, ako pokryť medzikružie s n políčkami pomocou zaoblených štvorcov a domín. Potom l_n je n-té Lucasovo číslo, teda*

$$l_n = L_n. \tag{2.6}$$



Obr. 2.4: Jeden 1-náramok, tri 2-náramky a štyri 3-náramky.

Kapitola 3

Identity

V tejto kapitole uvedieme a dokážeme rôzne zaujímavé identity, ktoré platia pre Fibonacciho a Lucasove čísla. Pri dôkazoch budeme vychádzať z maticového vyjadrenia, kombinatorickej interpretácie, prípadne z explicitného vyjadrenia F_n a L_n. Väčšinu identít teda dokážeme aspoň dvoma spôsobmi, pričom kladieme dôraz hlavne na maticové dôkazy. Tie nám totiž umožňujú z rôznych maticových rovností mnohé identity objaviť. Čo sa týka kombinatorických dôkazov, ich výhodou je, že nevyžadujú nejaké špeciálne matematické znalosti a znejú pomerne prirodzene.

3.1 Identity konvolučného typu

Identita 1 (Cassiniho identita).

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{3.1}$$

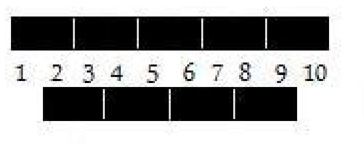
Dôkaz. Túto identitu dokážeme jednoducho z maticovej rovnosti (2.4) vyjadrením determinantu matice $\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$. Determinant matice A je -1, a keďže determinant súčinu matíc sa rovná súčinu determinantov, dostávame

$$\det A^n = (-1)^n.$$

Kombinatorický dôkaz: Na základe vety 2.3.1 prepíšeme Cassiniho identitu do tvaru

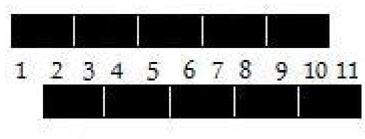
$$f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 0,$$

a ukážeme, že pravá strana sa rovná ľavej. Uvažujme dvojice n-dláždení, ako na obr. 2.2. Najskôr nech je n nepárne. Potom obidve dláždenia z dvojice musia obsahovať aspoň jeden štvorec. Pritom, ak je štvorec na políčku i, tak má dvojica určite zlom v políčku i alebo $i-1$. Výmenou chvostov dvojice n-dláždení vznikne dvojica $(n+1)$-dláždenia a $(n-1)$-dláždenia s tými istými zlomami. To znamená, že existuje prosté zobrazenie (určené výmenou chvostov) množiny všetkých dvojíc n-dláždení (má f_n^2 prvkov) do množiny dvojíc $(n+1)$- a $(n-1)$-dláždení (má $f_{n+1}f_{n-1}$ prvkov). Na obr. 3.1 je znázornená jediná možná dvojica $(n+1)$- a $(n-1)$-dláždenia bez zlomov. Takže, pre n nepárne máme $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} - 1$. Podobne, ak n je párne, pre dvojice n-dláždení so zlomami určuje výmena chvos-



Obr. 3.1: Jediná dvojica bez zlomu pre n nepárne.

tov prosté zobrazenie. Jediná dvojica n-dláždení, ktorá nemá zlom, je zložená zo samých domín (obr. 3.2). Teda, pre n párne dostávame $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + 1$.



Obr. 3.2: Jediná dvojica bez zlomu pre n párne.

Tým je už Cassiniho identita dokázaná. $\square$

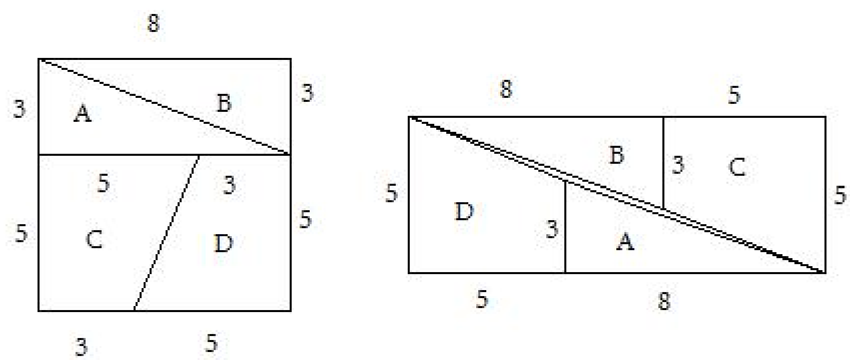
Cassiniho identita má zaujímavú geometrickú interpretáciu. Uvažujme štvorec so stranou dĺžky F_n a obdĺžnik so stranami F_{n+1} a F_{n-1}. Na obr. 3.3 máme prípad $n = 6$. Cassiniho identita ukazuje, že obsahy týchto dvoch útvarov sa líšia o jednotku pre ľubovoľné $n \geq 2$. Ak $n \geq 3$, môžeme písať

$$F_n^2 = F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) = F_nF_{n-1} + F_nF_{n-2}$$

Toto geometricky predstavuje rozdelenie štvorca so stranou F_n na dva obdĺžniky. Na obr. 3.3 sú obidva obdĺžniky rozdelené na dve rovnaké časti. Vznikli tak 4 diely, označené A, B, C, D a tieto sú preskupené do iného tvaru na obrázku vpravo. Ide o starý trik, keď sa štvorec so stranou dĺžky 8 rozstrihá na 4 diely a z nich sa vytvorí obdĺžnikový tvar ako na obr. 3.3. Pri nedostatočnej presnosti sa môže zdať, že štvorec s obsahom 64 štvorcových jednotiek sa zázračne pretransformoval na obdĺžnik s obsahom 65 štvorcových jednotiek. Avšak v skutočnosti je v obdĺžniku „diera“, tvorená veľmi úzkym rovnobežníkom s obsahom 1.

Identita 2. (*Konvolučná vlastnosť*)

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \tag{3.2}$$



Obr. 3.3: Geometrická interpretácia Cassiniho identity.

Dôkaz. Túto identitu dokážeme z maticovej rovnosti

$$A^{m+n} = A^m.A^n \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} F_{m+n-1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Súčin prvého riadku a druhého stĺpca na pravej strane rovnosti dáva priamo konvolučnú vlastnosť.

Túto identitu vieme zároveň ľahko dokázať indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 1$ máme

$$F_{m+1} = F_m.1 + F_{m-1}.1,$$

čo platí z definície Fibonacciho čísel. Teraz predpokladajme, že rovnosť platí pre prirodzené čísla menšie ako n. Potom

$$F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n = F_m(F_n + F_{n-1}) + F_{m-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) =$$

$$= (F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}) + (F_mF_{n-1} + F_{m-1}F_{n-2}) =$$

$$= F_{m+n-1} + F_{(m-1)+(n-1)} = F_{m+n}$$

Kombinatorický dôkaz: V zmysle vety 2.3.1 treba dokázať

$$f_{m+n} = f_mf_n + f_{m-1}f_{n-1}, \quad m, n \geq 0.$$

Výrazy na oboch stranách rovnosti predstavujú počet všetkých $(m+n)$-dláždení. Naozaj, pre každé také dláždenie máme dve možnosti: buď má v políčku m zlom - a vtedy sa dá rozdeliť na m-dláždenie a n-dláždenie (takých $(m+n)$-dláždení je teda f_mf_n), alebo políčka m a $m+1$ pokrýva domino - vtedy je $(m+n)$-dláždenie tvorené $(m-1)$-dláždením, za ním nasledujúcim dominom a napokon $(n-1)$-dláždením (takých $(m+n)$-dláždení je $f_{m-1}f_{n-1}$). Spolu teda máme $f_mf_n + f_{m-1}f_{n-1}$ $(m+n)$-dláždení. □

Identita 3. *Pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b, c, d také, že $a+b=c+d$ platí*

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^r(F_{a-r}F_{b-r} - F_{c-r}F_{d-r}) \tag{3.4}$$

Dôkaz. Vyplýva to z maticovej rovnosti

$$A^aA^b = A^cA^d$$

$$\begin{pmatrix} F_{a-1} & F_a \\ F_a & F_{a+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{b-1} & F_b \\ F_b & F_{b+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{c-1} & F_c \\ F_c & F_{c+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{d-1} & F_d \\ F_d & F_{d+1} \end{pmatrix}$$

Vynásobením druhého riadka s druhým stĺpcom dostaneme

$$F_aF_b + F_{a-1}F_{b-1} = F_cF_d + F_{c-1}F_{d-1}$$

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)(F_{a-1}F_{b-1} - F_{c-1}F_{d-1})$$

Po r iteráciách dostaneme identitu 3. □

Ako špeciálne prípady tejto identity dostaneme identity 1 a 2.

3.2 Identity obsahujúce Lucasove čísla

Identita 4.

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{3.5}$$

Dôkaz. Pre stopu matice platí $Tr(PJP^{-1}) = Tr(J)$. Teda pre maticu A^n máme

$$Tr(A^n) = Tr(PJ^nP^{-1}) = Tr(J^n).$$

Keďže $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ a $J^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$, tak

$$F_{n-1} + F_{n+1} = \alpha^n + \beta^n \overset{(2.2)}{=} L_n.$$

Iná možnosť pre dôkaz je úprava pravej strany vyjadrenej pomocou Binetovho vzorca (2.1):

$$F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(-\alpha\beta)\alpha^{n-1} + (\alpha\beta)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} =$$

$$= \alpha^n + \beta^n = L_n$$

Kombinatorický dôkaz: Podľa viet 2.3.1 a 2.4.1 treba dokázať

$$l_n = f_n + f_{n-2}, \quad n \geq 1.$$

Vieme, že l_n predstavuje počet n-náramkov. Nahliadneme, že výraz na pravej strane rovnosti tiež vyjadruje tento počet. Každý n-náramok je buď vo fáze - a vtedy je možné rozpojiť ho tak, že vznikne n-dláždenie (takých n-náramkov je teda f_n), alebo je mimo fázy, keď jedno domino pokrýva políčka n a 1. Vtedy políčka 2 až $n-1$ možno pokryť ako $(n-2)$-dláždenie, teda f_{n-2} spôsobmi. Takže spolu existuje $f_n + f_{n-2}$ n-náramkov. □

Identita 5.

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{3.6}$$

Dôkaz. Toto je len špeciálnym prípadom identity 2, pričom tu ešte využijeme identitu 4.

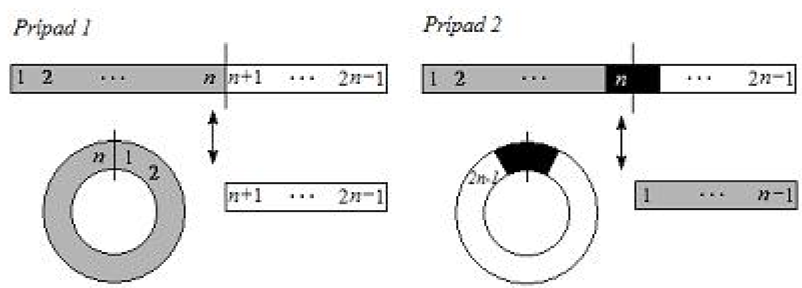
$$F_{2n} = F_n F_{n-1} + F_{n+1} F_n = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n L_n$$

Kombinatorický dôkaz: Na základe viet 2.3.1 a 2.4.1 treba dokázať

$$f_{2n-1} = l_n f_{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Ukážeme, že existuje bijektívne zobrazenie medzi množinou všetkých $(2n-1)$-dláždení (ktorá má f_{2n-1} prvkov) a množinou dvojíc n-náramku a $(n-1)$-dláždenia (má $l_n f_{n-1}$ prvkov). Pre každé $(2n-1)$-dláždenie nastane práve jedna z možností (obr. 3.4):

Prípad 1: v políčku n má zlom. Potom spojením pravej strany políčka n s ľavou



Obr. 3.4: Dva prípady, ktoré môžu nastať pri $(2n-1)$-dláždení.

stranou políčka 1 vznikne n-náramok vo fáze, a políčka $n+1$ až $2n-1$ budú tvoriť $(n-1)$-dláždenie.

Prípad 2: nemá zlom v políčku n. Vtedy políčka n a $n+1$ pokrýva jedno domino d. Z políčok 1 až $n-1$ utvoríme $(n-1)$-dláždenie a políčka n až $2n-1$ utvoria n-náramok mimo fázy, s d ako prvým dielom.

Vidíme, že fáza n-náramku určuje, o ktorý prípad ide, takže existencia bijektívneho zobrazenia je zrejmá. □

Identita 6.

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \tag{3.7}$$

Dôkaz. Túto identitu dokážeme pomocou už dokázaných identít.

$$L_n^2 - 2(-1)^n \overset{id.4}{=} F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n+1}^2 - 2(-1)^n \overset{id.1}{=}$$
$$= F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 + 2F_n^2 = F_{2n-1} + F_{2n+1} = L_{2n}$$

Pri predposlednej rovnosti sme využili identity

$$F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2 \tag{3.8}$$

a

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \tag{3.9}$$

ktoré sú špeciálnymi prípadmi identity 2. □

Identita 7.

$$F_{n+1} = \frac{F_n + L_n}{2} \tag{3.10}$$

Dôkaz. Triviálny, použitím (1.1) a identity 4. □

Identita 8.

$$L_{n+1} = \frac{L_n + 5F_n}{2} \tag{3.11}$$

Dôkaz. Podobne ako pri identite 7. □

Identity 5, 6, 7 a 8 sa dajú využiť pri efektívnejšom výpočte F_n a L_n, hlavne pre veľké n. Kým pri výpočte F_n alebo L_n z definície musíme vykonať $O(n)$ operácií, pomocou uvedených identít vieme počet potrebných operácií zredukovať na $O(\log_2 n)$. Napríklad, pri výpočte F_{63} priamo z definície by sme potrebovali 62 operácií. Použitím týchto identít stačí postupne vypočítať $F_2,\ L_2 \to F_3,\ L_3 \to F_6,\ L_6 \to F_7,\ L_7 \to F_{14},\ L_{14} \to F_{15},\ L_{15} \to F_{30},\ L_{30} \to F_{31},\ L_{31} \to F_{62},\ L_{62} \to F_{63}$. To je spolu 19 operácií.

3.3 Sumy obsahujúce Fibonacciho čísla

Identita 9.

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1. \tag{3.12}$$

Dôkaz. Všimnime si vzťah matíc A a A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že platí $A^{-1} = A - I$. Vyplýva to tiež z charakteristického polynómu matice A

$$p_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - t - 1 \tag{3.13}$$

a Cayley-Hamiltonovej vety ($p_A(A) = 0$).
Vzorec pre súčet prvých n Fibonacciho čísel $\sum_{k=0}^{n} F_k$ odvodíme z rovnice

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n = (A^{n+1} - I).(A - I)^{-1} = A^{n+2} - A \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvažujúc prvky v prvom riadku a druhom stĺpci každej matice dostaneme našu identitu.

Kombinatorický dôkaz: Podľa vety 2.3.1 treba dokázať

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1, \quad n \geq 0.$$

Ukážeme, že obe strany rovnosti predstavujú počet $(n+2)$-dláždení s aspoň jedným dominom. Počet všetkých $(n+2)$-dláždení je f_{n+2}, a nevyhovujúce je len to jedno, ktoré je zložené zo samých štvorcov. Teda počet vyhovujúcich je $f_{n+2} - 1$. Sumu na ľavej strane rovnosti dostaneme, keď sa na vec pozrieme z hľadiska pozície posledného domina. Existuje f_k dláždení, v ktorých posledné domino pokrýva políčka $k+1$ a $k+2$. To preto, že políčka 1 až k môžu byť pokryté f_k spôsobmi a na políčkach $k+3$ až $n+2$ musia byť štvorce. Preto počet $(n+2)$-dláždení s aspoň jedným dominom je $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

Samozrejme, k tomuto výsledku sa dá dopracovať aj jednoduchým rozpísaním podľa definície F_n

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_0 + F_1 + \cdots + F_n =$$

$$= F_0 + F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + \cdots + F_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

□

Identita 10.

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2(n+1)} \tag{3.15}$$

Dôkaz. Z charakteristického polynómu matice A vyplýva, že $A^2 - I = A$. To využijeme v dôkaze pomocou nasledovnej maticovej rovnosti:

$$I + A^2 + \cdots + A^{2n} = (A^{2(n+1)} - I).(A^2 - I)^{-1} = A^{2n+1} - A^{-1} \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2n} & F_{2n+1} \\ F_{2n+1} & F_{2n+2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Uvažujúc prvky v druhom riadku a druhom stĺpci každej matice dostaneme našu identitu.

Túto identitu je možné dokázať aj jednoducho pomocou identity 9:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n+1} =$$

$$F_1 + (F_1 + F_2) + (F_3 + F_4) + \cdots + (F_{2n-1} + F_{2n}) =$$

$$= F_1 + \sum_{k=0}^{2n} F_k = 1 + F_{2n+2} - 1 = F_{2(n+1)}$$

Kombinatorický dôkaz: Podľa vety 2.3.1 treba dokázať

$$\sum_{k=0}^{n} f_{2k} = f_{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Ukážeme, že výraz na ľavej strane rovnosti naozaj vyjadruje to, čo výraz vpravo, teda počet všetkých $(2n+1)$-dláždení. Každé takéto dláždenie musí obsahovať aspoň jeden štvorec, pretože máme nepárny počet políčok. Posledný štvorec sa pritom musí vyskytovať na nepárnom políčku. Existuje teda f_{2k} $(2n+1)$-dláždení, ktorých posledný štvorec je na políčku $2k+1$ (za ním sú samé dominá). Spolu potom máme $\sum_{k=0}^{n} f_{2k}$ $(2n+1)$-dláždení. □

Identita 11.

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \tag{3.17}$$

Dôkaz. Táto identita vyplýva podobne ako identita 10 z rovnice (3.16). Tiež ju možno dostať podobne ako identitu 10 zo vzorca pre súčet prvých n Fibonacciho čísel (identita 9).

Kombinatorický dôkaz: Podľa vety 2.3.1 treba dokázať

$$\sum_{k=0}^{n} f_{2k-1} = f_{2n} - 1, \quad n \geq 0.$$

Výrazy na oboch stranách rovnosti predstavujú počet všetkých $(2n)$-dláždení s aspoň jedným štvorcom. Nevyhovuje jedine $(2n)$-dláždenie zložené zo samých domín, teda vyhovujúcich $(2n)$-dláždení je $f_{2n} - 1$. Keďže máme párny počet políčok, posledný štvorec sa musí nachádzať na párnej pozícii. Je zrejmé, že tých $(2n)$-dláždení, ktoré majú posledný štvorec na políčku $2k$, je f_{2k-1}. Spolu teda existuje $\sum_{k=0}^{n} f_{2k-1}$ $(2n)$-dláždení s aspoň jedným štvorcom. □

Identita 12.

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1} \tag{3.18}$$

Dôkaz. Opäť využijeme rovnosť (3.16). Najprv si vyjadríme $(A^k)^2$.

$$(A^k)^2 = \begin{pmatrix} F_{k-1}^2 + F_k^2 & F_{k-1}F_k + F_kF_{k+1} \\ F_{k-1}F_k + F_kF_{k+1} & F_k^2 + F_{k+1}^2 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Rovnicu (3.16) prepíšeme do tvaru

$$I + A^2 + (A^2)^2 + \cdots + (A^n)^2 = \begin{pmatrix} F_{2n} + 1 & F_{2n+1} - 1 \\ F_{2n+1} - 1 & F_{2n+2} \end{pmatrix}$$

Z (3.19) uvažujúc prvky v prvom riadku a prvom stĺpci každej matice máme

$$1 + \underbrace{F_0^2 + F_1^2} + \underbrace{F_1^2 + F_2^2} + \underbrace{F_2^2 + F_3^2} + \cdots + \underbrace{F_{n-1}^2 + F_n^2} = F_{2n} + 1$$

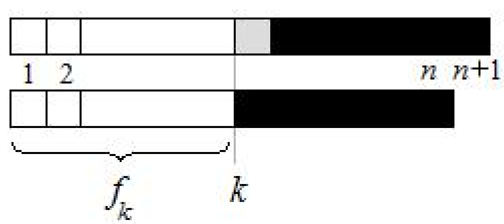
$$1 + 2\left(\sum_{k=0}^{n} F_k^2\right) - F_n^2 = F_{2n} + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = \frac{F_{2n} + F_n^2}{2} \overset{id.5}{=} \frac{F_n(F_{n+1} + F_{n-1} + F_n)}{2} = F_nF_{n+1}.$$

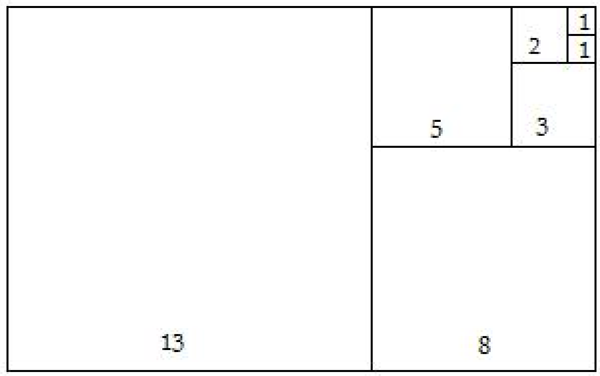
Kombinatorický dôkaz: Na základe vety 2.3.1 treba dokázať

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_nf_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Výrazy na oboch stranách rovnosti vyjadrujú počet dvojíc n-dláždenia a $(n+1)$-dláždenia. Pravá strana je zrejmá. Aby sme nahliadli, že to platí aj pre ľavú stranu, umiestnime $(n+1)$-dláždenie priamo nad n-dláždenie, ako na obr. 3.5. Keďže obidve dláždenia začínajú políčkom 1, budeme hovoriť, že každá takáto dvojica má zlom v „políčku 0“. Posledný zlom ľubovoľnej takejto dvojice sa môže vyskytnúť v políčkach 0 až n. Existuje f_k^2 takých dvojíc, ktoré majú posledný zlom v políčku k. Je len jediný spôsob, ako dokončiť dláždenia za týmto zlomom, aby sme sa vyhli ďalšiemu zlomu (obr. 3.5). Sčítajúc cez všetky možné hodnoty k, dostaneme $\sum_{k=0}^{n} f_k^2$ dvojíc. □



Obr. 3.5: Posledný zlom v políčku k.



Obr. 3.6: Geometrická interpretácia identity $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

Táto identita je zrejmá už zo svojej geometrickej interpretácie, znázornenej na obr. 3.6.

Identita 13.

$$\sum_{k=0}^{n} F_k 2^{n-k} = 2^{n+1} - F_{n+3} \tag{3.20}$$

Dôkaz. Využijeme maticovú rovnosť

$$\left(\left(\frac{A}{2}\right)^{n+1} - I^{n+1}\right) = \left(\frac{A}{2} - I\right)\left(\left(\frac{A}{2}\right)^{n} + \left(\frac{A}{2}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{A}{2} + I\right).$$

Rovnicu vynásobíme zľava maticou $(\frac{A}{2} - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{F_n}{2^{n+1}} - 1 & \frac{F_{n+1}}{2^{n+1}} \\ \frac{F_{n+1}}{2^{n+1}} & \frac{F_{n+2}}{2^{n+1}} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k-1}}{2^k} & \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k} & \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{k+1}}{2^k} \end{pmatrix}$$

1.riadok × 2.stĺpec:

$$-2.\frac{F_{n+1}}{2^{n+1}} - 2.\left(\frac{F_{n+2}}{2^{n+1}} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k}$$

Elementárnymi úpravami s využitím (1.1) dostaneme

$$\frac{2^{n+1} - F_{n+3}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k},$$

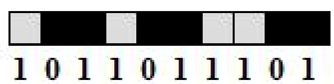
čo je ekvivalentné s identitou 13.

Kombinatorický dôkaz:

Podľa vety 2.3.1 treba dokázať $\sum_{k=0}^{n-1} f_k 2^{n-1-k} = 2^{n+1} - f_{n+2}$. Dokážeme ekvivalentnú rovnicu

$$f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k 2^{n-2-k} = 2^n, \quad n \geq 0. \tag{3.21}$$

Najskôr zakódujeme ľubovoľné m-dláždenie do binárnej postupnosti dĺžky m, a to tak, že štvorec bude reprezentovaný „1“ a domino „01“. Vidíme, že takto vytvorená postupnosť núl a jednotiek nebude mať nikdy vedľa seba dve nuly a vždy bude končiť jednotkou. Napr. k 10-dláždeniu na obr. 3.7 prislúcha postupnosť 1011011101. Zároveň každej binárnej postupnosti dĺžky m, ktorá nemá za sebou idúce nuly a končí s 1, možno priradiť práve jedno m-dláždenie. Ak končí s 0, potom reprezentuje $(m-1)$-dláždenie, keďže tú poslednú nulu si možno odmyslieť.



Obr. 3.7: Zakódovanie 10-dláždenia do binárnej postupnosti.

Teraz ukážeme, že výraz na ľavej strane rovnosti (3.21) predstavuje počet všetkých binárnych postupností dĺžky n, teda, že sa rovná 2^n. Každej binárnej postupnosti priradíme dláždenie. Ak postupnosť neobsahuje za sebou idúce nuly, priradíme jej jednoznačne určené dláždenie dĺžky n alebo $n-1$, podľa toho, či končí s 1 alebo 0. Inak postupnosť obsahuje „00“, ktoré sa prvýkrát vyskytnú v políčkach $k+1$ a $k+2$ pre nejaké k, $0 \leq k \leq n-2$. Takejto postupnosti priradíme k-dláždenie, ktoré je určené prvými k členmi binárnej postupnosti. Napr. binárnej postupnosti 01011001001 prislúcha 5-dláždenie „domino-domino-štvorec“, rovnako ako ľubovoľnej postupnosti tvaru 0101100$abcd$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Takže pre $0 \leq k \leq n-2$, každé k-dláždenie prislúcha 2^{n-2-k} postupnostiam. Spolu teda existuje $f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k 2^{n-2-k}$ binárnych postupností dĺžky n. □

Identita 14.

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k \tag{3.22}$$

Dôkaz. Z (3.13) vieme, že platí $A^2 = I + A$. Umocnime túto rovnicu na n-tú a aplikujme binomickú vetu (to môžeme urobiť, lebo $AI = IA$.)

$$A^{2n} = \binom{n}{0} I^n A^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} A + \ldots + \binom{n}{n} I^0 A^n$$

$$\begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}F_{k-1} & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k \\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{k+1} \end{pmatrix}$$

Odtiaľ už (okrem iných) vyplýva identita 14.

Kombinatorický dôkaz: Podľa vety 2.3.1 treba dokázať

$$f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f_{k-1}.$$

Ukážeme, že výraz na pravej strane sa rovná počtu $(2n-1)$-dláždení. Každé $(2n-1)$-dláždenie musí obsahovať aspoň n dielov, pričom aspoň jeden z nich musí byť štvorec. Ak prvých n dielov tvorí k štvorcov a $n-k$ domín, tak tieto diely môžu byť usporiadané $\binom{n}{k}$ spôsobmi a pokrývajú políčka 1 až $2n-k$. Zvyšok dláždenia má $k-1$ políčok a teda môže byť vydláždený f_{k-1} spôsobmi. Takže existuje $\binom{n}{k}f_{k-1}$ $(2n-1)$-dláždení, ktoré majú medzi prvými n dielmi k štvorcov. Zosumujúc cez všetky možné hodnoty k dostaneme $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f_{k-1}$ $(2n-1)$-dláždení. □

Identita 15.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} = F_{n+1} \tag{3.23}$$

Dôkaz. Kombinatorický dôkaz: Podľa vety 2.3.1 treba dokázať

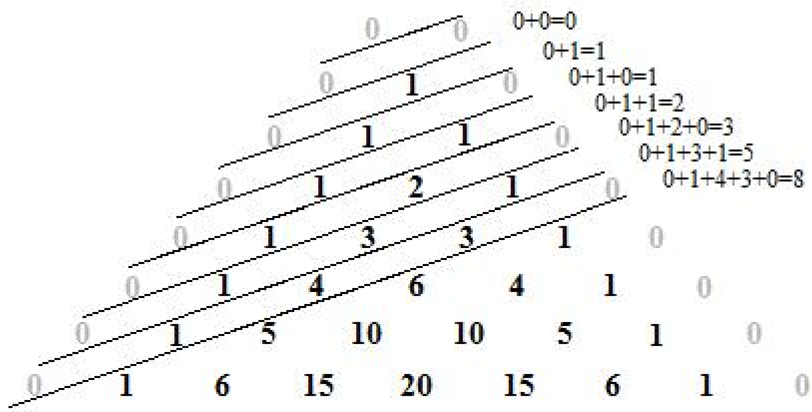
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} = f_n.$$

Ukážeme, že výraz na ľavej strane sa rovná počtu všetkých n-dláždení. Koľko n-dláždení využíva presne k domín? Zrejme $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$, inak by bola odpoveď nula. Takéto dláždenia majú nevyhnutne $n-2k$ štvorcov a teda spolu $n-k$ dielov. Spomedzi týchto $n-k$ dielov môžeme vybrať k domín $\binom{n-k}{k}$ spôsobmi. Preto existuje $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$ n-dláždení. □

Táto identita vlastne hovorí, že súčet prvkov na diagonále Pascalovho trojuholníka je Fibonacciho číslo. Tento fakt vyplýva z toho, že každý prvok Pascalovho trojuholníka je súčtom dvoch prvkov, ktoré sú nad ním v predchádzajúcom riadku (ak si po oboch stranách Pascalovho trojuholníka domyslíme nuly, bude to platiť aj pre jednotky). Z obr. 3.8 vidíme, že každý prvok v i-tej diagonále $d(i)$ dostaneme ako súčet jedného prvku z diagonály $d(i-1)$ a jedného prvku z diagonály $d(i-2)$. Pritom k vytvoreniu všetkých prvkov diagonály $d(i)$ použijeme všetky prvky z predchádzajúcich dvoch diagonál. Teda súčet prvkov diagonály $d(i)$ sa rovná súčtu prvkov diagonál $d(i-1)$ a $d(i-2)$. Označme $S(i)$ súčet prvkov diagonály $d(i)$. Potom máme

$$S(i) = S(i-1) + S(i-2)$$
$$S(0) = 0$$
$$S(1) = 1$$

Toto je už ale to isté ako definícia Fibonacciho čísel.



Obr. 3.8: Pascalov trojuholník a Fibonacciho čísla.

Kapitola 4

Zovšeobecnenia Fibonacciho a Lucasových čísel

Existujú rôzne zovšeobecnenia Fibonacciho postupnosti. V tejto kapitole uvedieme, ako možno rozšíriť Fibonacciho postupnosť pre záporné indexy a hlavne sa dôkladnejšie pozrieme na rekurencie druhého rádu. Uvidíme, že mnoho zaujímavých vlastností Fibonacciho čísel patrí celej rodine týchto rekurencií, pričom Fibonacciho postupnosť je tu len špeciálnym (ale veľmi dôležitým) prípadom.

4.1 Rozšírenie pre záporné indexy

Použijúc rekurentný vzťah $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ možno rozšíriť Fibonacciho čísla aj pre záporné indexy. Dostaneme tak:

$$\ldots - 8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$$

Ukážeme, že platí nasledujúce tvrdenie:

Tvrdenie 4.1.1. *Pre $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n. \tag{4.1}$$

Dôkaz. Vypočítame inverznú maticu k matici $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ pomocou vzorca

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

kde A^* je adjungovaná matica k matici A.

$$(A^n)^{-1} = \frac{1}{\det A^n} \cdot (A^n)^* = \frac{1}{(-1)^n} \begin{pmatrix} F_{n+1} & -F_n \\ -F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{-(n+1)} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-(n-1)} \end{pmatrix} = A^{-n} = (-1)^n \begin{pmatrix} F_{n+1} & -F_n \\ -F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Teda platí $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$. $\square$

4.2 Rekurencie druhého rádu

4.2.1 Vektorový priestor postupností

V článku [3] sa autori zaoberajú postupnosťami danými rekurenciou

$$A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n, \tag{4.2}$$

kde $a,\ b$ sú reálne čísla, $b \neq 0$ a začiatočnými hodnotami A_0 a A_1. Pre pevne zvolené a a b množinu všetkých takých postupností označujú $R(a,b)$.

V $R(a,b)$ rozlišujú dva významné prvky: postupnosť F (kvôli jednoznačnosti niekedy označená ako $F^{(a,b)}$) so začiatočnými hodnotami 0 a 1 (v $R(1,1)$ je F Fibonacciho postupnosť) a postupnosť L (niekedy ako $L^{(a,b)}$) so začiatočnými hodnotami 2 a a (v $R(1,1)$ sú to Lucasove čísla).

Keďže každá postupnosť z $R(a,b)$ je určená dvoma začiatočnými hodnotami, tvorí $R(a,b)$ dvojrozmerný vektorový priestor. Jeho bázou sú postupnosti E a F :

$$E = 1, 0, b, ab, a^2b + b^2, \ldots$$
$$F = 0, 1, a, a^2 + b, a^3 + 2ab, \ldots$$

Preto $A = A_0E + A_1F$ pre ľubovoľnú $A \in R(a,b)$. Keď si všimneme, že $E_n = bF_{n-1}$, môžeme vyjadriť A iba pomocou F :

$$A_n = bA_0F_{n-1} + A_1F_n \tag{4.3}$$

Pre postupnosť L tak dostaneme zovšeobecnenie identity 4 z tretej kapitoly:

$$L_n = 2bF_{n-1} + aF_n \overset{(4.2)}{=} bF_{n-1} + F_{n+1}. \tag{4.4}$$

4.2.2 Binetove vzorce pre $R(a,b)$

Pri hľadaní explicitného vyjadrenia členov postupnosti danej vzťahom (4.2) budeme postupovať podobne ako v druhej kapitole pri odvodzovaní Binetovho vzorca pre Fibonacciho čísla. Chceme nájsť geometrickú postupnosť $G_n = cq^n$, $(c, q \neq 0)$, ktorá spĺňa (4.2). Musí teda platiť

$$cq^{n+2} - acq^{n+1} - bcq^n = 0.$$

Z toho dostávame kvadratickú rovnicu

$$q^2 - aq - b = 0.$$

Pre jej korene λ a μ platí

$$\lambda + \mu = a \tag{4.5}$$
$$\lambda\mu = -b \tag{4.6}$$

a ak λ a μ sú rôzne (pre jednoduchosť sa dvojnásobným koreňom zaoberať nebudeme), tak $\{\lambda^n, \mu^n\}$ je báza v $R(a,b)$. To znamená, že ľubovoľnú A $\in R(a,b)$ vieme vyjadriť v tvare

$$A_n = c_\lambda\lambda^n + c_\mu\mu^n \tag{4.7}$$

kde c_λ a c_μ sú určené začiatočnými hodnotami

$$A_0 = c_\lambda + c_\mu$$

$$A_1 = c_\lambda \lambda + c_\mu \mu.$$

Za predpokladu, že λ a μ sú rôzne, dostaneme

$$c_\lambda = \frac{A_1 - \mu A_0}{\lambda - \mu} \qquad c_\mu = \frac{\lambda A_0 - A_1}{\lambda - \mu}.$$

V prípade postupnosti F dosadením za začiatočné hodnoty 0 a 1 dostaneme $c_\lambda = 1/(\lambda-\mu)$ a $c_\mu = -1/(\lambda-\mu)$. Pre L zo začiatočných podmienok 2 a $a = \lambda+\mu$ vyplýva $c_\lambda = c_\mu = 1$. Preto

$$F_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \tag{4.8}$$

$$L_n = \lambda^n + \mu^n \tag{4.9}$$

Takýto spôsob odvodenia explicitného vzorca funguje všeobecne pre homogénne lineárne rekurencie n-tého rádu, viac o tom možno nájsť v knihe [7].

Z Binetovho vzorca pre A_n ľahko dokážeme zovšeobecnenie tvrdenia o limite podielov susedných Fibonacciho čísel.

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{c_\lambda \lambda^{n+1} + c_\mu \mu^{n+1}}{c_\lambda \lambda^n + c_\mu \mu^n}$$

Nech $|\lambda| > |\mu|$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_\lambda \lambda + c_\mu \mu \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n}{c_\lambda + c_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n} = \lambda,$$

keďže $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = 0$.

Poznámka: Počítať $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}$ má zmysel, lebo A_n môže nadobúdať hodnotu 0 nanajvýš raz. Pre také n by totiž muselo platiť (podľa (4.7))

$$-\frac{c_\lambda}{c_\mu} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n,$$

čo vďaka predpokladu $b \neq 0$ môže spĺňať nanajvýš jedno n.

Ak $\mu = -\lambda$, tak limita týchto podielov pre $c_\lambda \neq c_\mu$, $c_\lambda + c_\mu \neq 0$ neexistuje. Pre $c_\lambda = c_\mu$ alebo $c_\lambda + c_\mu = 0$ táto limita nemá zmysel, lebo v postupnosti $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ je vtedy každý druhý člen nulový.

Teraz odvodíme rekurentný vzťah druhého rádu pre postupnosť $\{A_{kn}\}_{n=0}^\infty$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo a $\{A_n\}_{n=0}^\infty \in R(a,b)$.

$$A_{kn} = c_\lambda \lambda^{kn} + c_\mu \mu^{kn}$$

Postupnosť $\{A_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ je lineárnou kombináciou dvoch geometrických postupností s kvocientami λ^k a μ^k, a teda patrí do $R(a', b')$ pre nejaké a', b' (t.j. λ^k a μ^k sú koreňmi charakteristickej rovnice $q^2 - a'q - b' = 0$). Takže musí platiť

$$a' = \lambda^k + \mu^k \stackrel{(4.9)}{=} L_k^{(a,b)}$$

$$b' = -(\lambda\mu)^k \stackrel{(4.6)}{=} -(-b)^k.$$

Potom

$$A_{k(n+2)} = L_k^{(a,b)} A_{k(n+1)} - (-b)^k A_{kn}, \tag{4.10}$$

z čoho vidíme, že aj postupnosť $\{A_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ je daná rekurenciou typu (4.2).

4.2.3 Maticové vyjadrenie pre $A \in R(a, b)$

V druhej kapitole sme uviedli maticu A, ktorá zodpovedá rekurencii pre Fibonacciho čísla, t.j. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Postupnosti A danej rekurenciou (4.2) zodpovedá matica $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Po n iteráciách dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

(Podobne vieme dostať maticové vyjadrenie ľubovoľnej homogénnej lineárnej rekurencie n-tého rádu (viď [7]).)

Teraz vypočítame, čomu sa rovná M^n pre F v $R(a, b)$. Z (4.12) vyplýva

$$M^n \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & A_{n+1} \\ A_{n+1} & A_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Za A_n dosadíme postupnosť F, ktorej začiatočné hodnoty sú $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ a z nich vypočítame $F_2 = a$.

$$M^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

Rovnicu vynásobíme sprava maticou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a dostaneme

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} - aF_n & F_n \\ F_{n+2} - aF_{n+1} & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Použijúc (4.2) potom máme

$$M^n = \begin{pmatrix} bF_{n-1} & F_n \\ bF_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Vypočítaním determinantu matíc na oboch stranách (4.13) dostaneme zovšeobecnenie Cassiniho identity pre F v $R(a,b)$, ktoré má po zjednodušení tvar:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n b^{n-1}. \tag{4.14}$$

Ďalej uvedieme zovšeobecnenie konvolučnej vlastnosti pre F v $R(a,b)$. Vychádzajúc z rovnosti $M^{n+m} = M^n M^m$

$$\begin{pmatrix} bF_{n+m-1} & F_{n+m} \\ bF_{n+m} & F_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bF_{n-1} & F_n \\ bF_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bF_{m-1} & F_m \\ bF_m & F_{m+1} \end{pmatrix}$$

získame identitu

$$F_{n+m} = bF_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}. \tag{4.15}$$

Teraz odvodíme vzorec pre súčet prvých n členov postupnosti F v $R(a,b)$. Využijeme, že platí $I + M + M^2 + \cdots + M^n = (M^{n+1} - I)(M - I)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 + b\sum_{k=1}^n F_{k-1} & \sum_{k=1}^n F_k \\ b\sum_{k=1}^n F_k & 1 + \sum_{k=1}^n F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bF_n - 1 & F_{n+1} \\ bF_{n+1} & F_{n+2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(M - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a+b-1} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Odtiaľ

$$\sum_{k=1}^n F_k = \frac{1}{a+b-1} \cdot (F_{n+1} + bF_n - 1), \qquad a + b \neq 1. \tag{4.16}$$

Špeciálnym prípadom tejto identity je napríklad identita 11:

$$\sum_{l=0}^n F_{2l} = F_{2n+1} - 1$$

Rekurentný vzťah pre postupnosť $\{F_{2n}\}_{n=0}^\infty$ je (podľa (4.10))

$$F_{2n} = 3F_{2(n-1)} - F_{2(n-2)}.$$

Začiatočné hodnoty sú $F_0 = 0$ a $F_2 = 1$, preto $\{F_{2n}\}_{n=0}^\infty = F^{(3,-1)}$ a môžeme použiť vzorec (4.16).

Zároveň nám (4.16) umožňuje vypočítať $\sum_{l=1}^n F_{kl}$, kde k je dané prirodzené číslo. V predchádzajúcom príklade (kde $k = 2$) bolo možné priamo dosadiť do vzorca, lebo začiatočné hodnoty boli 0 a 1. Všeobecne pre $k > 2$ to nie je možné, ale využijúc fakt, že $F_{kn} = F_k F_n^{(a',b')}$, kde $a' = L_k^{(a,b)}$ a $b' = -(-b)^k$ ((4.10)+ tvrdenie 4.2.1 uvedené a dokázané neskôr) dostaneme

$$\sum_{l=1}^n F_{kl} = F_k \sum_{l=1}^n F_l^{(a',b')},$$

čo už vieme pomocou (4.16) vypočítať.

4.2.4 Najväčší spoločný deliteľ

Prekvapujúcou vlastnosťou Fibonacciho čísel je fakt, že najväčší spoločný deliteľ ľubovoľných dvoch Fibonacciho čísel je tiež Fibonacciho číslo. Presnejšie, $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. Toto však platí aj pre postupnosť F v $R(a, b)$, kde a a b sú celé čísla a $(a, b) = 1$. Túto vlastnosť preto dokážeme pre takto zovšeobecnené Fibonacciho čísla F_n v $R(a, b)$ (podľa článku [3]).

Najskôr uvedieme niekoľko tvrdení, ktoré potom využijeme pri dôkaze tejto vlastnosti Fibonacciho čísel.

Tvrdenie 4.2.1. *F_k delí F_{nk} pre každé $n > 0$.*

Dôkaz. Postupnosť $\{F_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ patrí do $R(a', b')$ pre nejaké a', b' a teda podľa (4.3) platí

$$F_{kn} = bF_{k\cdot 0}F_{n-1}^{(a',b')} + F_{k\cdot 1}F_n^{(a',b')}.$$

Keďže prvé dva členy postupnosti $\{F_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ sú 0 a F_k, tak máme

$$F_{kn} = F_k F_n^{(a',b')}.$$

□

Tvrdenie 4.2.2. *F_n a b sú nesúdeliteľné pre každé $n \geq 0$.*

Dôkaz. Nech p je prvočíslo, ktoré delí b. Z $(a, b) = 1$ vyplýva, že p nedelí a. Z (4.2) potom máme kongruenciu $F_{n+2} \equiv aF_{n+1} \mod p$ a odtiaľ $F_n \equiv F_1 a^{n-1} \mod p$ pre $n \geq 1$. Takže p nedelí F_n a teda $(F_n, b) = 1$ pre všetky $n \geq 0$. □

Tvrdenie 4.2.3. *Ak $A \in R(a, b)$ a p je prvočíselný deliteľ A_k aj A_{k+1}, ale p nedelí b, potom p delí A_n pre všetky $n \geq 0$.*

Dôkaz. Ak $k > 0$, $A_{k+1} = aA_k + bA_{k-1}$, tak p delí A_{k-1}. Indukciou ukážeme, že p potom delí A_0 a A_1, a teda A_n pre všetky $n \geq 0$. □

Tvrdenie 4.2.4. *Ak $h, k \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, tak aj F_h a F_k sú nesúdeliteľné.*

Dôkaz. Ak p je prvočíselný deliteľ F_h a F_k, tak podľa tvrdenia 4.2.2 p nedelí b. Keďže $(h, k) = 1$, tak existujú $r, s \in \mathbb{Z}$ také, že $rh + sk = 1$. Je zrejmé, že r a s sa musia líšiť v znamienku. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $r < 0$ a definujme $t = -r$. Potom $sk - th = 1$. Keďže podľa tvrdenia 4.2.1 je F_{sk} deliteľné F_k, tak p tiež delí F_{sk}. Podobne F_h delí F_{th} a teda aj p delí F_{th}. Ale F_{th} a F_{sk} sú za sebou idúce členy postupnosti F, a tak podľa tvrdenia 4.2.3 p delí všetky F_n. To je spor, a teda $(F_h, F_k) = 1$. □

Tvrdenie 4.2.5. *Ak $a' = L_k^{(a,b)}$ a $b' = -(-b)^k$, tak $(a', b') = 1$.*

Dôkaz. Nech p je spoločný prvočíselný deliteľ a' a b'. Potom p delí b a tiež $L_k^{(a,b)}$, čo je rovné $bF_{k-1}^{(a,b)} + F_{k+1}^{(a,b)}$ podľa (4.4). Potom p delí $F_{k+1}^{(a,b)}$, čo je spor s tvrdením 4.2.2. □

Teraz už môžeme dokázať nasledujúcu vetu:

Veta 4.2.1. *Najväčší spoločný deliteľ* F_m *a* F_n *je* F_k, *kde* k *je najväčší spoločný deliteľ* m *a* n, *pričom* $F \in R(a,b),\ a,b \in \mathbb{Z},\ (a,b) = 1.$

Dôkaz. Nech $s = \frac{m}{k}$ a $t = \frac{n}{k}$, potom zrejme $(s,t) = 1$. Uvažujme postupnosť $A = \{F_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$. Vieme, že A môžeme vyjadriť ako $F_k \cdot F^{(a',b')}$, kde $a' = L_k$ a $b' = -(-b)^k$ (podľa (4.10)), a tiež, že $(a',b') = 1$. Rovnako vieme, že každé A_j je násobkom F_k, takže F_k delí $A_s = F_{ks} = F_m$ a $A_t = F_{kt} = F_n$. Ďalej, podľa tvrdenia 4.2.4 sú $\frac{F_m}{F_k} = F_s^{(a',b')}$ a $\frac{F_n}{F_k} = F_t^{(a',b')}$ nesúdeliteľné. Preto $F_k = (F_m, F_n)$. □

Táto vlastnosť Fibonacciho čísel sa dá využiť pri dôkaze toho, aká je zložitosť Euklidovho algoritmu na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa. Sú príkladom čísel, ktoré dávajú najväčší možný počet iterácií potrebný v tomto algoritme.

Literatúra

[1] Wikipedia. `http://en.wikipedia.org`.

[2] Johnson B. Fibonacci resources. `http://www.dur.ac.uk/bob.johnson/fibonacci/`.

[3] Kalman D. and Mena R. The Fibonacci numbers – exposed. *Math. Mag.*, 76(3):167–181, June 2003.

[4] Berman G. and Fryer K.D. *Introduction to combinatorics*. Academic Press, New York, London, 2nd edition, 1972.

[5] Lovász L., Pelikán J., and Vesztergombi K. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] Vorobe'ev N. N. *Fibonacci Numbers*. Pergamon Press, Berlin, Heidelberg, New York, 1961.

[7] Cull P., Flahive M., and Robson R. *Difference Equations - From Rabbits to Chaos*. Springer, USA, 2005.

[8] Benjamin A. T. and Quinn J. J. *Proofs that Really Count*. Mathematical Association of America, Providence, 2003. Dolciani Mathematical Expositions; no. 27.