Obsah

Kapitola 1

Úvod

V tejto práci sa budeme zaoberať dedičnými koreflektívnymi podkategóriami kategórie topologických priestorov vo všeobecnosti a tiež niektorým kategóriám topologických priestorov charakterizovaným pomocou konvergencie transfinitných postupností.

V druhej kapitole pripomenieme niektoré pojmy týkajúce sa ordinálnych a kardinálnych čísel, ktoré budeme neskôr potrebovať. V tretej kapitole uvedieme najprv charakterizáciu koreflektívnych podkategórií pomocou kosúčinov a extrémnych kvocientov. Budeme pritom vychádzať z duálnej charakterizácie pre epireflektívne podkategórie, ktorá sa v literatúre uvádza častejšie. Potom použijeme charakterizačnú vetu na kategóriu topologických priestorov **Top** a tiež opíšeme niektoré koreflektívne podkategórie **Top**.

V štvrtej kapitole budeme študovať dedičné koreflektívne podkategórie **Top**. Podáme ich charakterizáciu pomocou prvotných priestorov, ktorá pochádza z článku [4]. Budeme sa tiež venovať otázke, ktoré dedičné podkategórie **Top** sú jednoducho generované. Špeciálne sa budeme zaoberať α-subsekvenciálnymi priestormi, pre ktoré skonštruujeme extrémny generátor minimálnej možnej kardinality. Analogický výsledok pre subsekvenciálne priestory možno nájsť v [6]. Tiež ukážeme, s využitím poznatkov o dedičných koreflektívnych podkategóriách **Top**, že každý topologický priestor je podpriestorom pseudoradiálneho priestoru.

Kapitola 2

Ordinálne čísla

Ordinálne číslo (ordinál) budeme chápať ako množinu ordinálnych čísel od neho menších usporiadanú inklúziou. O ordináloch platí axióma ordinálnych čísel, ktorá hovorí, že ku každej dobre usporiadanej množine A existuje jediné izomorfné ordinálne číslo, ktoré nazývame *ordinálny typ* množiny A a značíme $\mathrm{Ord}(A)$.

Ak $(B, <)$ je usporiadaná množina, tak pod dolným úsekom usporiadanej množiny B budeme rozumieť ľubovoľnú jej podmnožinu tvaru $B_b = \{a \in B : a < b\}$ pre nejaké $b \in B$.

Triedu všetkých ordinálnych čísel budeme označovať On. Na triede On máme usporiadanie $<$ definované tak, že $\alpha < \beta$, ak ordinál α je izomorfný s nejakým počiatočným úsekom dobre usporiadanej množiny β. Na triede On sa relácie $\in$, $\subsetneqq$ a $<$ zhodujú. (Jeden z možných prístupov ako definovať ordinálne čísla tak, aby platila axióma ordinálnych čísel, je zaviesť ordinál ako dobre usporiadanú množinu, ktorá sa rovná množine svojich dolných úsekov.)

Za kardinálne čísla (kardinály) budeme považovať ordinály, ktoré sa nedajú zobraziť prostým zobrazením na žiadny z menších ordinálov. Predpokladáme platnosť axiómy výberu, z ktorej vyplýva, že každú množinu možno dobre usporiadať, teda kardinály definované ako iniciálne ordinály vyčerpajú všetky mohutnosti množín. Kardinalitu nejakej množiny budeme označovať symbolom $\mathrm{card}\, A$.

Z kardinálnych čísel sú v topológii najčastejšie používané nekonečné kardinálne čísla. Triedu všetkých nekonečných kardinálnych čísel budeme označovať Cn. Nekonečné kardinály možno „pekne" očíslovať ordinálmi, t.j. existuje surjektívna triedová funkcia $\aleph$ z triedy On na triedu Cn, ktorej hodnoty označujeme $\omega_\alpha := \aleph(\alpha)$. Funkcia $\aleph$ je monotónna a spojitá (t.j. zachováva usporiadanie a supréma).

V tejto práci nebudeme používať ordinálny súčet a súčin. Ak sa niekde vyskytne súčet alebo súčin ordinálnych čísel, vždy pôjde o kardinálne čísla a súčet (súčin) v zmysle kardinality.

Viac o ordinálnych a kardinálnych číslach sa možno dozvedieť v knihách [3] a [14].

2.1 Transfinitné postupnosti

Definícia 2.1.1. Nech α je ordinálne číslo, A množina. Potom každé zobrazenie $f\colon \alpha \to A$ sa nazýva *transfinitná postupnosť typu* α (alebo kratšie α-*postupnosť*) prvkov množiny A. Označujeme $f = (x_\xi)_{\xi<\alpha}$, $x_\xi := f(\xi)$.

Nech α je ordinálne číslo, $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nech $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ je transfinitná postupnosť typu α bodov z X. Hovoríme, že transfinitná postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ *konverguje* k $x \in X$, ak pre každé okolie U bodu x existuje ordinálne číslo $\eta < \alpha$ také, že pre každé ξ s vlastnosťou $\eta < \xi < \alpha$ platí $x_\xi \in U$.

$$\underset{U\in\mathcal{T}}{\forall}\, x \in U \quad \underset{\eta}{\exists}\, \eta < \alpha \quad \underset{\xi}{\forall}\, \eta < \xi < \alpha \quad x_\xi \in U$$

Nech α je ordinálne číslo, $(\beta_\xi)_{\xi<\alpha}$ je transfinitná postupnosť ordinálnych čísel. Hovoríme, že táto postupnosť *konverguje* k ordinálnemu číslu β, ak ku každému ordinálnemu číslu $\gamma < \beta$ existuje ordinálne číslo $\eta < \alpha$ také, že pre každé ξ s vlastnosťou $\eta < \xi < \alpha$ platí $\gamma < \beta_\xi \le \beta$.

$$\underset{\gamma<\beta}{\forall} \quad \underset{\eta<\alpha}{\exists} \quad \underset{\xi}{\forall}\, \eta < \xi < \alpha \quad \gamma < \beta_\xi \le \beta$$

Takto definovanú konvergenciu transfinitných postupností možno chápať ako špeciálny prípad konvergencie sietí v topologických priestoroch. Definícia limity transfinitnej postupnosti ordinálnych čísel je ekvivalentná s definíciou limity v topologickom priestore na nejakom ordinálnom čísle, ktoré obsahuje všetky členy postupnosti aj limitu, pričom za bázu topológie vezmeme všetky intervaly tvaru $(\alpha, \beta\rangle$ a množinu $\{0\}$.

2.2 Regulárne kardinálne čísla

Definícia 2.2.1. Nech ω_α je nekonečné kardinálne číslo. ω_α sa nazýva *regulárne*, ak každá neohraničená podmnožina v ω_α má kardinalitu ω_α. Kardinálne číslo, ktoré nie je regulárne, sa nazýva *singulárne*.

Tvrdenie 2.2.1. *Nekonečné kardinálne číslo $\varkappa$ je singulárne práve vtedy, keď $\varkappa = \bigcup\limits_{i\in I} \varkappa_i$, pričom $\operatorname{card} I < \varkappa$ a $\operatorname{card} \varkappa_i < \varkappa$ pre každé $i \in I$.*

Dôkaz. Ak A je neohraničená v $\varkappa$ a $\operatorname{card} A < \varkappa$, tak zrejme $\bigcup_{\alpha\in A} \alpha = \varkappa$.

Naopak, nech $\bigcup_{i\in I} \varkappa_i = \varkappa$. Potom buď pre niektoré $i \in I$ je $\sup \varkappa_i = \varkappa$ (a $\varkappa_i$ je neohraničená podmnožina $\varkappa$), alebo pre každé $i \in I$ je $\beta_i = \sup \varkappa_i < \varkappa$ a v tom prípade je množina $\{\beta_i\colon i \in I\}$ neohraničená v $\varkappa$. $\square$

To znamená, že kardinálne číslo ω_α je regulárne práve vtedy, keď množinu kardinality ω_α nie je možné získať ako zjednotenie systému množín menšej kardinality, ak aj kardinalita systému je menšia ako ω_α.

Jednoduchá je aj nasledujúca charakterizácia singulárnych kardinálnych čísel pomocou konvergencie transfinitných postupností.

Tvrdenie 2.2.2. *Kardinálne číslo ω_α je singulárne práve vtedy, keď existuje transfinitná postupnosť typu β ordinálov z ω_α konvergujúca k ω_α pre nejaké $\beta < \omega_\alpha$.*

Dôkaz. Ak máme danú takúto postupnosť, tak jej prvky tvoria neohraničenú množinu v ω_α.

Naopak, ak existuje neohraničená množina v ω_α, tak jej prvky tvoria transfinitnú postupnosť. (Každá podmnožina dobre usporiadanej množiny je dobre usporiadaná a ku každej dobre usporiadanej množine existuje izomorfný ordinál. Tento izomorfizmus je súčasne transfinitnou postupnosťou.) Keďže sa líšia kardinality, musí byť typ transfinitnej postupnosti menší než ω_α. Z neohraničenosti a monotónnosti vyplýva, že táto postupnosť konverguje k ω_α. $\square$

Príkladom regulárneho kardinálu je ω_0. Príkladom singulárneho kardinálu je ω_{ω_0}, ktorý obsahuje neohraničenú množinu $\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}$. (Zo spojitosti funkcie $\aleph$ vyplýva, že $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n = \omega_{\omega_0}$.)

Lema 2.2.1. *Nech $A_i \neq \emptyset$, $i \in I$, je systém množín,* $\operatorname{card} I \leq \omega_\alpha$ *a* $\operatorname{card} A_i \leq \omega_\alpha$ *pre všetky $i \in I$. Potom* $\operatorname{card} \bigcup\limits_{i\in I} A_i \leq \omega_\alpha$.

Dôkaz. Označme $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Ukážeme, že existuje prosté zobrazenie z A_i do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$. Pretože $\operatorname{card} I \leq \omega_\alpha$, môžeme predpokladať, že I je podmnožina ω_α. Z podmienky $\operatorname{card} A_i \leq \omega_\alpha$ vyplýva, že existuje prosté zobrazenie z A_i do ω_α. Pre $i \in I$ označme $g_i\colon A_i \to \omega_\alpha$ niektoré takéto zobrazenie. Definujme $h\colon A \to \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ predpisom $h(y) = (i, g_i(y))$, kde $i \in I$ je najmenší ordinál taký, že $y \in A_i$. (Pretože ω_α je dobre usporiadaná množina a množina ordinálov s touto vlastnosťou je neprázdna, existuje najmenší taký ordinál.) Zobrazenie h je prosté: ak $h(x) = h(y) = (i, z)$, tak $g_i(x) = g_i(y) = z$ a z injektívnosti g_i máme $x = y$. $\square$

Tvrdenie 2.2.3. *Pre každý ordinál α je $\omega_{\alpha+1}$ regulárny kardinál.*

Dôkaz. Ak by bol kardinál $\omega_{\alpha+1}$ singulárny, dal by sa získať ako zjednotenie systému kardinality ω_α množín kardinality ω_α, čo je spor s predchádzajúcou lemou. $\square$

Kapitola 3

Reflektívne a koreflektívne podkategórie

V tejto kapitole budeme hovoriť o reflektívnych a koreflektívnych podkategóriách. Začneme s všeobecnou definíciou pre ľubovoľné kategórie, potom prejdeme ku kategóriám, na ktoré budeme tieto poznatky aplikovať. Ide o kategóriu **Top** topologických priestorov a kategóriu **Haus** hausdorffovských topologických priestorov.

3.1 Definícia a základné vlastnosti

Len pre úplnosť uvádzame aj definíciu reflektívnej podkategórie pomocou adjungovaného funktora, vždy budeme používať druhú uvedenú definíciu, ktorá tento pojem nevyužíva.

Definícia 3.1.1. Nech $\mathbf{A}$ je podkategória kategórie $\mathbf{B}$, $E\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je funktor vloženia (t.j. $E(A) = A$, $E(f) = f$ pre každý $\mathbf{A}$-objekt A a $\mathbf{A}$-morfizmus B).

$\mathbf{A}$ sa nazýva *reflektívna* v $\mathbf{B}$, ak je splnená niektorá z nasledujúcich ekvivalentných podmienok:

(i) E má zľava adjungovaný funktor R.

(ii) Každý $\mathbf{B}$-objekt B má univerzálny morfizmus vzhľadom na funktor E, t.j. pre každý $\mathbf{B}$-objekt B existuje $\mathbf{A}$-objekt $A_B \in \mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$-morfizmus $r_B\colon B \to A_B$ taký, že pre každý $\mathbf{A}$-objekt A a pre každý $\mathbf{B}$-morfizmus $f\colon B \to A$ existuje jediný $\mathbf{A}$-morfizmus $\overline{f}\colon A_B \to A$ taký, že $\overline{f} \circ r_B = f$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "f"'] & A_B \arrow[d, dashed, "!\overline{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Ak **B**-objekt B má E-univerzálny morfizmus (r_B, A_B), tak (r_B, A_B) sa nazýva **A**-*reflexia* B.

Duálne pojmy: **A** sa nazýva *koreflektívna* v **B**, ak je splnená niektorá z nasledujúcich ekvivalentných podmienok:

(i) E má sprava adjungovaný funktor R.

(ii) Každý **B**-objekt B má kouniverzálny morfizmus vzhľadom na funktor E, t.j. pre každý **B**-objekt B existuje **A**-objekt A_B a **B**-morfizmus $c_B\colon A_B \to B$ taký, že pre každý **A**-objekt A a pre každý **B**-morfizmus $f\colon A \to B$ existuje jediný **A**-morfizmus $\overline{f}\colon A \to A_B$ taký, že $c_B \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} B & A_B \arrow[l, "c_B"'] \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "!\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Ak **B**-objekt B má E-kouniverzálny morfizmus (A_B, c_B), tak (A_B, c_B) sa nazýva **A**-*koreflexia* B.

Príkladom reflektívnej podkategórie je podkategória kompaktných hausdorffovských priestorov $\mathbf{CompT_2}$ kategórie **CReg** úplne regulárnych topologických priestorov. Z všeobecnej topológie je známe, že Stone-Čechova kompaktifikácia spĺňa podmienky z definície koreflexie.

Z definície reflexie ľahko vyplýva nasledovná vlastnosť:

Tvrdenie 3.1.1. *Ak* **A** *je podkategória kategórie* **B** *a* $r\colon B \to A$ *je* **A**-*reflexia* B*, tak platí: Ak* f*,* g *sú* **A**-*morfizmy také, že* $f \circ r = g \circ r$*, tak* $f = g$*.*

Ak $c\colon A \to B$ *je* **A**-*koreflexia* B*, tak platí: Ak* f*,* g *sú* **A**-*morfizmy také, že* $c \circ f = c \circ g$*, tak* $f = g$*.*

Nasledujúce tvrdenie hovorí, že reflexie sú určené jednoznačne až na izomorfizmus.

Tvrdenie 3.1.2. *Ak* **A** *je podkategória kategórie* **B** *a* (r_B, A_B)*,* (r'_B, A'_B) *sú* **A**-*reflexie* B*, tak existuje jediný izomorfizmus* $f\colon A_B \to A'_B$ *taký, že* $f \circ r_B = r'_B$*.*

Dôkaz. Z definície reflexie máme existenciu jediného morfizmu $f\colon A_B \to A'_B$ takého, že $f \circ r_B = r'_B$ a existenciu jediného morfizmu $g\colon A'_B \to A_B$ takého, že $g \circ r'_B = r_B$, Keďže $g \circ f \circ r_B = g \circ r'_B = r_B = id_{A_B} \circ r_B$, podľa tvrdenia 3.1.1 platí $g \circ f = id_{A_B}$. Podobne z $f \circ g \circ r'_B = f \circ r_B = r'_B = id_{A'_B} \circ r'_B$ dostaneme $f \circ g = id_{A'_B}$. Zistili sme, že f je retrakcia aj koretrakcia, čiže izomorfizmus.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "r'_B"'] & A_B \arrow[dl, dashed, shift left, "!f"] \\ A'_B \arrow[ur, dashed, shift left, "!g"] & \end{tikzcd}$$

□

Pripomeňme definíciu extrémneho monomorfizmu a extrémneho epimorfizmu z teórie kategórií.

Definícia 3.1.2. Monomorfizmus m sa nazýva *extrémny monomorfizmus,* ak spĺňa nasledovnú podmienku: Ak $m = f \circ e$, kde e je epimorfizmus, tak e je izomorfizmus.

Duálny pojem: Epimorfizmus e sa nazýva *extrémny epimorfizmus,* ak spĺňa nasledovnú podmienku: Ak $e = m \circ f$, kde m je monomorfizmus, tak m je izomorfizmus.

Usporiadaná dvojica (M, m), kde $m\colon M \to A$ je extrémny monomorfizmus sa nazýva *extrémny podobjekt* objektu A.

Usporiadaná dvojica (k, K), kde $k\colon A \to K$ je extrémny epimorfizmus sa nazýva *extrémny kvocient* objektu A.

Extrémne monomorfizmy sú v **Top** vloženia a v **Haus** uzavreté vloženia (t.j. vloženia na uzavreté podpriestory), extrémne epimorfizmy sú v **Top** aj v **Haus** faktorové zobrazenia. To znamená, že extrémne podobjekty sú (uzavreté) podpriestory a extrémne kvocienty sú faktorové priestory.

Definícia 3.1.3. Reflektívna podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva *epireflektívna* (*monoreflektívna*, *extrémne epireflektívna*, *bireflektívna*), ak každá reflexia je epimorfizmus (monomorfizmus, extrémny epimorfizmus, bimorfizmus).
(Duálne pojmy: *monokoreflektívna*, *epikoreflektívna*, *extrémne monokoreflektívna*, *bikoreflektívna* podkategória.)

Definícia 3.1.4. Podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva *plná*, ak pre každé dva **A** objekty X a Y sú všetky **B**-morfizmy z X do Y súčasne aj **A**-morfizmami.

Podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva *uzavretá na* **B**-*izomorfizmy*, ak pre každý $X \in \mathbf{A}$ a každý **B**-izomorfizmus $f\colon X \to Y$ aj $Y \in \mathbf{A}$.

Tvrdenie 3.1.3. *Každá plná monoreflektívna podkategória* **A** *kategórie* **B** *je tiež epireflektívna.*

Dôkaz.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r_B"] \arrow[drr, "h"'] & A_B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, dashed, "\overline{h}"] & B' \arrow[d, "r_{B'}"] \\
 & & A_{B'}
\end{tikzcd}$$

Nech (r_B, A_B), $r_B\colon B \to A_B$ je reflexia. Nech $f, g\colon A_B \to B'$ sú **B**-morfizmy také, že $f \circ r_B = g \circ r_B$. Chceme ukázať, že $f = g$.

Podľa predpokladu existuje **A**-reflexia B' $(r_{B'}, A_{B'})$. Označme $h := r_{B'} \circ f \circ r_B = r_{B'} \circ g \circ r_B$.

Z definície reflexie vyplýva, že pre h existuje jediný **A**-morfizmus $\overline{h}\colon A_B \to A_{B'}$ taký, že $\overline{h} \circ r_B = h$. Ale $r_{B'} \circ f$ aj $r_{B'} \circ g$ sú **A**-morfizmy (vďaka tomu, že **A** je plná podkategória **B**) a oba spĺňajú túto vlastnosť, čiže máme $r_{B'} \circ f = r_{B'} \circ g$. Keďže **A** je monokoreflektívna, je $r_{B'}$ monomorfizmus, a teda $f = g$. □

Odteraz sa budeme zaoberať len podkategóriami, ktoré sú plné a uzavreté na **B**-izomorfizmy.

Tvrdenie 3.1.4. *Ak (r, A) je reflexia B, tak sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:*

(i) r *je izomorfizmus.*

(ii) r *je koretrakcia.*

Dôkaz. Ak $f \circ r = 1_B$, tak diagram

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "1_B"] \arrow[ddr, "r"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[d, "r"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

komutuje. Jednoznačnosť (v definícii reflexie) potom dáva, že $r \circ f = 1_A$. f je retrakcia aj koretrakcia, čiže f je izomorfizmus. □

Dôsledok 3.1.1. *Nech (r_X, A_X) je **A**-reflexia X, potom platí: $X \in \mathbf{A}$ práve vtedy, keď r_X je izomorfizmus.*

Dôkaz. Ak r_X je izomorfizmus, tak aj $r_X^{-1}\colon A_X \to X$ je izomorfizmus a pretože $A_X \in \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ je uzavretá na izomorfizmy, tak aj $X \in \mathbf{A}$.

Naopak, ak $X \in \mathbf{A}$, tak existuje jediný morfizmus f taký, že $f \circ r_X = id_X$. To znamená, že r_X je koretrakcia a podľa predchádzajúceho tvrdenia je potom r_X izomorfizmus.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & A_X \arrow[d, dashed, "f"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

□

V ľubovoľnej kategórii sa objekt G nazýva *generátor* (*separátor*), ak v nej pre každé dva rôzne morfizmy $f, g\colon A \to B$ existuje morfizmus $h\colon G \to A$ taký, že $f \circ h \neq g \circ h$. V **Top** (**Haus**) je každý neprázdny priestor generátor.

Tvrdenie 3.1.5. *Ak **A** je plná podkategória **B** uzavretá na izomorfizmy a **A** obsahuje **B**-generátor (**B**-separátor), tak sú nasledovné podmienky ekvivalentné:*

(i) **A** *je koreflektívna v* **B**,

(ii) **A** *je bikoreflektívna v* **B**.

Dôkaz. Implikácia $(ii) \Rightarrow (i)$ je zrejmá. Dokážeme $(i) \Rightarrow (ii)$. Podľa duálneho tvrdenia ku tvrdeniu 3.1.3 stačí ukázať, že $\mathbf{A}$ je epikoreflektívna v $\mathbf{B}$. Nech $c_X : A_X \to X$ je $\mathbf{A}$-koreflexia X a $G \in \mathbf{A}$ je $\mathbf{B}$-generátor. Nech $f, g \colon X \to Y$ sú morfizmy také, že $f \circ c_X = g \circ c_X$. Predpokladajme, že by platilo $f \neq g$. Potom by existoval morfizmus $h \colon G \to X$ taký, že $f \circ h \neq g \circ h$. Podľa definície koreflexie existuje $\overline{h}$ tak, že $c_X \circ \overline{h} = h$. Potom $f \circ h = f \circ c_X \circ \overline{h} \neq g \circ h = g \circ c_X \circ \overline{h}$, čo je spor s predpokladom $f \circ c_X = g \circ c_X$. Musí teda platiť $f = g$ a c_X je epimorfizmus. □

Tvrdenie 3.1.6. *Ak* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna v* $\mathbf{B}$*, tak* $\mathbf{A}$ *je uzavretá na vytváranie extrémnych podobjektov v* $\mathbf{B}$.

Dôkaz. Nech A je $\mathbf{A}$-objekt a $f \colon B \to A$ je extrémny monomorfizmus v $\mathbf{B}$. Označme (r, A_B) $\mathbf{A}$-reflexiu B. Podľa definície reflexie existuje morfizmus g taký, že $f = g \circ r$. Keďže r je epimorfizmus a f je extrémny monomorfizmus, musí r byť izomorfizmus. Vďaka tomu, že $\mathbf{A}$ je uzavretá na izomorfizmy, je B $\mathbf{A}$-objekt. □

3.2 Reflektívne podkategórie a limity

Ak $\mathbf{A}$ je reflektívna podkategória, tak funktor vloženia $E : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ má zľava adjungovaný funktor, a preto zachováva limity. To znamená, že limity (súčiny) v $\mathbf{A}$ sú zároveň limitami (súčinmi) v $\mathbf{B}$. Túto vlastnosť teraz ukážeme bez použitia adjungovaných funktorov. Najprv však pripomenieme pojem limity známy z teórie kategórií.

Definícia 3.2.1. *Zdroj* je dvojica $(A, (f_i)_{i\in I})$, kde A je objekt a $f_i \colon A \to A_i$ sú morfizmy. *Ústie* je dvojica $((f_i)_{i\in I}, A)$, kde A je objekt a $f_i \colon A_i \to A$ sú morfizmy.

Diagram v kategórii $\mathbf{A}$ je funktor $D \colon \mathbf{I} \to \mathbf{A}$. $\mathbf{I}$ sa nazýva *schéma* diagramu.

Nech $D \colon \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ je diagram. $\mathbf{A}$-zdroj $(A, (f_i)_{i\in\mathbf{I}})$ $(f_i \colon A \to D_i)$ sa nazýva *prirodzený zdroj* pre D, ak pre každý $\mathbf{I}$-morfizmus $d \colon i \to j$ komutuje diagram:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "Dd"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

Prirodzený $\mathbf{A}$-zdroj $(L, (l_i)_{i\in\mathbf{I}})$ sa nazýva *limita* D, ak má univerzálnu vlastnosť, že pre každý prirodzený zdroj $(A, (f_i)_{i\in\mathbf{I}})$ pre D existuje jediný morfizmus $f \colon A \to L$ taký, že $f_i = l_i \circ f$ pre všetky $i \in \mathbf{I}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & L \arrow[dl, "l_i"] \\ & D_i & \end{tikzcd}$$

Ako duálne pojmy k prirodzenému zdroju a limite sa definujú *prirodzené ústie* a *kolimita*.

Z teórie kategórií vieme, že limita je svojím diagramom určená jednoznačne až na izomorfizmus. Špeciálne prípady limity sú napríklad súčin a ekvalizátor, naopak kosúčin, koekvalizátor a pushout sú kolimity. V kategóriách **Top** a **Haus** sú súčinmi topologické súčiny a kosúčinmi sú topologické súčty. Ekvalizátory a koekvalizátory sú v týchto kategóriách práve extrémne podobjekty a extrémne kvocienty. Významom pushoutu v kategórii **Top** sa budeme zaoberať neskôr.

Lema 3.2.1. *Nech* $\mathbf{A}$ *je podkategória kategórie* $\mathbf{B}$. *Nech* $(L, (l_i : L \to A_i)_{i \in I})$ *je prirodzený zdroj v* $\mathbf{B}$ *vzhľadom na diagram* $E \circ D$ *a* $A_i \in \mathbf{A}$ *pre* $i \in I$. *Nech* (r, A_L) *je* $\mathbf{A}$*-reflexia* L. *Pre každé* $i \in I$ $\overline{l_i}$ *nech je (jednoznačne určený) morfizmus taký, že* $l_i = \overline{l_i} \circ r$. *Potom* $(A_L, \overline{l_i})$ *je prirodzený zdroj v* $\mathbf{A}$ *vzhľadom na* D.

Dôkaz.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, "r"] \arrow[ddl, "l_i"'] \arrow[ddr, "l_j"] & \\
& A_L \arrow[dl, "\overline{l_i}"] \arrow[dr, "\overline{l_j}"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Pre $f : i \to j$ platí $\overline{l_j} \circ r = l_j = D(f) \circ l_i = D(f) \circ \overline{l_i} \circ r$ a podľa tvrdenia 3.1.1 dostaneme $\overline{l_j} = D(f) \circ \overline{l_i}$. □

Tvrdenie 3.2.1. *Nech* $\mathbf{A}$ *je reflektívna v* $\mathbf{B}$, $D : I \to A$ *je diagram a* $(L, (l_i)_{i \in I})$ *je limita* D *v* A. *Potom* $(L, (l_i)_{i \in I})$ *je limita* $E \circ D$ *v* B.

Dôkaz. Je zrejmé, že $(L, (l_i)_{i \in I})$ je prirodzený zdroj vzhľadom na $E \circ D$ v $\mathbf{B}$. Nech aj $(L', (l'_i)_{i \in I})$ je prirodzený zdroj v $\mathbf{B}$ vzhľadom na D. Označme $(r_{L'}, A_{L'})$ $\mathbf{A}$-reflexiu L' a pre každé $i \in I$ $\overline{l'_i}$ morfizmus taký, že $\overline{l'_i} \circ r_{L'} = l'_i$. Podľa predchádzajúcej lemy je aj $(A_{L'}, \overline{l'_i})$ prirodzený zdroj v A vzhľadom na D. Keďže L je limita D, tak existuje jediný morfizmus $h : A'_L \to L$ taký, že $\overline{l'_i} = l_i \circ h$. Potom $h \circ r_{L'} : L' \to L$ je morfizmus taký, že $l'_i = l_i \circ h \circ r_{L'}$.

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[d, "r_{L'}"'] \arrow[dr, "l'_i"] & \\
A_{L'} \arrow[r, "\overline{l'_i}"] \arrow[d, "h"'] & D_i \\
L \arrow[ur, "l_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Ešte treba overiť jednoznačnosť. Nech $g, h : L' \to L$ sú dva morfizmy také, že $l_i \circ h = l'_i = l_i \circ g$. Potom $l_i \circ \overline{g} \circ r_{L'} = l_i \circ \overline{h} \circ r_{L'}$. Použitím tvrdenia 3.1.1 dostaneme $l_i \circ \overline{g} = l_i \circ \overline{h}$. Ale takýto $\mathbf{A}$-morfizmus z $A_{L'}$ do L existuje jediný (lebo L je limita D), čiže $\overline{g} = \overline{h}$, a teda aj $g = \overline{g} \circ r_{L'} = \overline{h} \circ r_{L'} = h$.

$$\begin{tikzcd}
& L' \arrow[dl, "r_{L'}"'] \arrow[dr, "l'_i"] \arrow[dd, shift right, "g"'] \arrow[dd, shift left, "h"] & \\
A_{L'} \arrow[dr, shift left, "\overline{h}"] \arrow[dr, shift right, "\overline{g}"'] & & D_i \\
& L \arrow[ur, "l_i"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Definícia 3.2.2. Nech $E\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ je funktor vloženia a $\mathbf{I}$ je kategória. Potom $\mathbf{A}$ sa nazýva *uzavretá vzhľadom na tvorbu* $\mathbf{I}$*-limít v* $\mathbf{B}$, ak pre každý funktor $D\colon \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ a každú limitu $(L, (l_i))$ funktora $E \circ D$ sú splnené nasledovné ekvivalentné podmienky:

(i) L je $\mathbf{A}$-objekt.

(ii) $(L, (l_i))$ je limita D.

Tvrdenie 3.2.2. *Ak* $\mathbf{A}$ *je reflektívna v* $\mathbf{B}$*, tak pre každú kategóriu* $\mathbf{I}$ *je* $\mathbf{A}$ *uzavretá vzhľadom na vytváranie* $\mathbf{I}$*-limít v* $\mathbf{B}$*.*

Dôkaz. Nech $D\colon \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ je funktor, $(L, (l_i)_{i\in\mathbf{I}})$ je limita $E \circ D$ a $r\colon L \to A_L$ je $\mathbf{A}$-reflexia L. Z definície univerzálneho morfizmu dostávame, že pre každé l_i existuje jediný $\mathbf{B}$-morfizmus $\overline{l}_i$ taký, že $l_i = \overline{l}_i \circ r$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "l_i"'] & A_L \arrow[d, dashed, "\overline{l}_i"] \\
& D(i)
\end{tikzcd}$$

Podľa lemy 3.2.1 je $(A_L, \overline{l}_i)_{i\in\mathbf{I}}$ prirodzený zdroj pre D v $\mathbf{A}$. Z definície limity vyplýva existencia $h\colon A_L \to L$ takého, že $\overline{l}_i = l_i \circ h$. Teda pre každé $i \in \mathbf{I}$ máme $l_i \circ h \circ r = \overline{l}_i \circ r = l_i = l_i \circ id_L$. Každá limita je monozdroj, čiže $h \circ r = id_L$, teda r je koretrakcia. Na základe tvrdenia 3.1.4 je r izomorfizmus. $\mathbf{A}$ je uzavretá na izomorfizmy, preto L je $\mathbf{A}$-objekt. □

3.3 Charakterizácia epireflektívnych podkategórií

Najprv pripomenieme niektoré pojmy z teórie kategórií.

Definícia 3.3.1. Nech E (M) je trieda epimorfizmov (monomorfizmov) uzavretá na skladanie s izomorfizmami v kategórii $\mathbf{A}$. Hovoríme, že $\mathbf{A}$ je (E, M)*-faktorizovateľná*, ak pre každý $\mathbf{A}$-morfizmus f existujú $e \in E$ a $m \in M$ také, že $f = m \circ e$.

$\mathbf{A}$ sa nazýva *jednoznačne (E,M)-faktorizovateľná kategória*, ak navyše požadujeme, že (E, M)-faktorizácia je jednoznačná až na izomorfizmus v tom zmysle, že ak $f = m \circ e = m' \circ e'$, $e, e' \in E$, $m, m' \in M$, sú rôzne (E, M)-faktorizácie, tak existuje izomorfizmus taký, že diagram

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & \bullet \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "j"'] \\ \bullet \arrow[r, "m'"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

komutuje.

A je (E, M)-*kategória*, ak je jednoznačne (E, M)-faktorizovateľná a navyše E a M sú uzavreté vzhľadom na skladanie.

Dôležité sú špeciálne prípady pojmov z tejto definície, ak za E zvolíme všetky extrémne epimorfizmy danej kategórie (resp. všetky epimorfizmy) a za M monomorfizmy (extrémne monomorfizmy).

Top je (epi, ex-mono)-faktorizovateľná kategória a (ex-epi, mono)-faktorizovateľná kategória, je to dokonca (epi,ex-mono)-kategória, (ex-epi, mono)-kategória. Vyplýva to z toho, že ľubovoľné zobrazenie možno napísať ako zloženie vloženia a surjektívneho zobrazenia a ako zloženie prostého a faktorového zobrazenia. Tento rozklad je jednoznačný až na homeomorfizmus.

Takisto **Haus** má obe uvedené vlastnosti. V **Haus** sú epimorfizmami husté zobrazenia. Každé zobrazenie $f\colon X \to Y$ hausdorffovských topologických priestorov môžeme napísať ako zloženie hustého zobrazenia z X do $\overline{f[A]}$ a uzavretého vloženia $\overline{f[A]}$ do Y. Overiť možno aj jednoznačnosť rozkladu. Úplne rovnakým postupom ako pre **Top**, možno overiť, že **Haus** je aj (ex-epi,mono)-kategória.

Definícia 3.3.2. Kategória sa nazýva *lokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina podobjektov (M_i, m_i), $i \in I$ taká, že pre každý podobjekt (M, m) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f\colon M_i \to M$ taký, že $m_i = m \circ f$.

Kategória sa nazýva *kolokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina kvocientov (k_i, K_i), $i \in I$ taká, že pre každý kvocient (k, K) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f\colon M_i \to M$ taký, že $k_i = k \circ f$.

Kategórie **Top** a **Haus** sú lokálne aj kolokálne malé. Na to, aby sme až na homeomorfizmus vyčerpali všetky priestory, ktoré môžu byť spojitým obrazom daného topologického priestoru, resp. ktoré možno prostým zobrazením zobraziť do daného priestoru, stačí sa obmedziť na topologické priestory na jeho podmnožinách, ako vidno z porovnania kardinality jednotlivých množín.

Veta 3.3.1. *Nech* **A** *je podkategória kategórie* **C**, **A** *je plná a uzavretá na izomorfizmy,* **C** *je kolokálne malá, (epi, ex-mono)-faktorizovateľná a má súčiny. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné*

(i) **A** *je epireflektívna v* **C**.

(ii) **A** *je uzavretá na vytváranie súčinov a extrémnych podobjektov v* **C**.

Duálne tvrdenie:
Nech **A** *je podkategória kategórie* **C**, **A** *je plná a uzavretá na izomorfizmy,* **C** *je*

lokálne malá, (ex-epi, mono)-faktorizovateľná a má kosúčiny. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné

(i) **A** *je monokoreflektívna v* **C***.*

(ii) **A** *je uzavretá vzhľadom na vytváranie kosúčinov a extrémnych kvocientov v* **C***.*

Dôkaz. Z tvrdení 3.1.6 a 3.2.2 vieme, že epireflektívna podkategória musí byť uzavretá vzhľadom na vytváranie extrémnych podobjektov a súčinov (dokonca ľubovoľných limít). Ukážeme teda ešte opačnú implikáciu.

Nech $X \in \mathbf{C}$ a $(e_i : X \to A_i)_{i \in I}$ je reprezentujúca množina **C**-epimorfizmov do A. Nech $(P, (p_i)_{i \in I})$ je súčin $(A_i)_{i \in i}$. Podľa predpokladov $P \in \mathbf{A}$. Podľa definície súčinu existuje jediné $f \colon X \to P$ také, že diagramy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "e_i"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

komutujú. Nech $f = m \circ e$ je (epi, extrémne mono)-faktorizácia f, $m \colon X \to X_A$, $e \colon X_A \to P$. X_A je **A**-objekt, lebo je to extrémny podobjekt **A**-objektu P.

Tvrdíme, že e je **A**-reflexia X. Nech Y je **A**-objekt a $g \colon X \to Y$ je ľubovoľný **C**-morfizmus. Nech $g = m' \circ e'$ je (epi,extrémne mono)-faktorizácia g a $e' \colon X \to A$, $m' \colon A \to Y$. Pre A existuje $i \in I$ a izomorfizmus j medzi A a A_i. Potom diagram

$$\begin{tikzcd} & X_A \arrow[dr, "m"] & \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "e_i"] \arrow[d, "g"'] \arrow[ddr, "e'"] & & P \arrow[d, "p_i"] \\ Y & & A_i \arrow[dl, "j"] \\ & A \arrow[ul, "m'"] & \end{tikzcd}$$

komutuje, teda $\overline{g} = m' \circ j \circ p_i \circ m$ je morfizmus taký, že $g = \overline{g} \circ e$. Keďže e je epimorfizmus, existuje jediný takýto morfizmus. $\square$

Veta 3.3.2. *Nech kategória* **B** *má súčiny, je kolokálne malá a (epi, extrémne mono)-faktorizovateľná. Potom:*

(i) Ľubovoľný prienik epireflektívnych podkategórií **B** *je epireflektívna podkategória* **B***.*

(ii) *Pre každú podkategóriu* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *existuje najmenšia epireflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{B}$ *obsahujúca* $\mathbf{A}$*, označujeme ju* $\mathrm{RH}(\mathbf{A})$ *a nazývame* epireflektívny obal *kategórie* $\mathbf{A}$ *v* $\mathbf{B}$*.*

(iii) *Ak* $\mathbf{B}$ *je navyše (epi,extrémne mono)-kategória, tak* $\mathrm{RH}(\mathbf{A})$ *obsahuje práve extrémne podobjekty súčinov objektov z* $\mathbf{A}$*.*

Dôkaz. (i) a (ii) sú dôsledky vety charakterizujúcej epireflektívne podkategórie. Aby sme ukázali (iii) treba podľa tej istej vety ukázať, že $\mathrm{RH}(\mathbf{A})$ je uzavretá na extrémne podobjekty a súčiny. Keďže $\mathbf{B}$ je (epi,extrémne mono)-kategória, tak extrémne monomorfizmy sú uzavreté na skladanie, preto $\mathrm{RH}(\mathbf{A})$ je uzavretá na extrémne podobjekty. Uzavretosť na súčiny vyplýva z toho, že je v (epi, extrémne mono)-kategórii je súčin extrémnych monomorfizmov je extrémny monomorfizmus. □

Platí samozrejme aj duálna veta. Monokoreflektívny obal, čiže najmenšiu monokoreflektívnu podkategóriu, ktorá obsahuje $\mathbf{A}$, označujeme $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$. (Ak $\mathbf{A}$ obsahuje separátor, je to *koreflektívny obal*.)

Už sme spomenuli, že kategórie **Top** a **Haus** sú (epi, ex-mono) aj (ex-epi,mono)-faktorizovateľné a že sú lokálne aj kolokálne malé. Preto aj v týchto kategóriách platia vety, ktoré sme práve uviedli.

Definícia 3.3.3. Epireflektívna podkategória $\mathbf{A}$ kategórie $\mathbf{B}$ sa nazýva *jednoducho generovaná*, ak je epireflektívnym obalom podkategórie obsahujúcej jediný objekt X. Tento objekt sa potom nazýva *extrémny generátor* epireflektívnej podkategórie $\mathbf{A}$ v $\mathbf{B}$. Označujme $\mathbf{A} = \mathrm{RH}(\mathrm{X})$.

Duálne pojmy: *jednoducho generovaná* monokoreflektívna podkategória, *extrémny generátor* monokoreflektívnej kategórie.

3.4 Koreflektívne podkategórie Top

3.4.1 Charakterizácia koreflektívnych podkategórií Top

Veta 3.4.1. *Nech* $\mathbf{A}$ *je podkategória kategórie* **Top** *a* $\mathbf{A}$ *obsahuje aspoň jeden neprázdny priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\mathbf{A}$ *je koreflektívna v* **Top***.*

(ii) $\mathbf{A}$ *je bikoreflektívna v* **Top***.*

(iii) $\mathbf{A}$ *je uzavretá vzhľadom na tvorenie topologických súčtov a faktorových priestorov.*

(iv) *Pre každý topologický priestor* $(X, \mathcal{T})$ *existuje spomedzi všetkých topológií* $\mathcal{T}'$ *na* X*, ktoré sú jemnejšie ako* $\mathcal{T}$ *a pre ktoré patrí* $(X, \mathcal{T}')$ *do* $\mathbf{A}$*, najhrubšia topológia* $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ *a pre každé dva priestory platí* $C((X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})) \subset C((X,\mathcal{T}_{\mathbf{A}}),(Y,\mathcal{S}_{\mathbf{A}}))$*.* *(*$(X,\mathcal{T}_{\mathbf{A}})$ *je potom koreflexia* $(X,\mathcal{T})$*.)*

Dôkaz. Ekvivalencia (i), (ii), (iii) vyplýva z tvrdenia 3.1.5 a vety 3.3.1. $(iv) \Rightarrow (i)$ je zrejmé z toho, že $(X, \mathcal{T}_{\mathbf{A}})$ spĺňa vlastnosti koreflexie. Opačná implikácia platí preto, že o koreflexii môžeme (vďaka tomu, že je to bimorfizmus) predpokladať, že je to identické zobrazenie, čiže ide o zjemnenie pôvodnej topológie. Musí byť však súčasne hrubšia od všetkých topológií z $\mathbf{A}$, aby sa pomocou nej dalo faktorizovať identické zobrazenie z takýchto topológií do $(X, \mathcal{T})$. $\square$

3.4.2 A-generované priestory

Definícia 3.4.1. $\mathbf{A}_{sum}$ je kategória všetkých topologických súčtov prvkov z $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}_{lok}$ je kategória všetkých topologických priestorov takých, že každý bod má okolie, ktoré patrí do $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}_{gen}$ je kategória $\mathbf{A}$-*generovaných* priestorov, t.j. všetkých priestorov X, pre ktoré je podmnožina U uzavretá práve vtedy, keď $U \cap A$ je pre každý topologický podpriestor A priestoru X, ktorý patrí do $\mathbf{A}$, uzavretá v A.

Veta 3.4.2. *Kategória* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ *všetkých faktorových priestorov topologických súčtov priestorov z* $\mathbf{A}$ *je najmenšia koreflektívna podkategória* **Top** *obsahujúca* $\mathbf{A}$. *Navyše platí:*

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}_{sum} \subseteq \mathbf{A}_{lok} \subseteq \mathbf{A}_{gen} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{A})$$

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia vety vyplýva z duálneho tvrdenia k vete 3.3.2.

Prvé dve inklúzie sú zrejmé.

Ukážme, že $\mathbf{A}_{lok} \subseteq \mathbf{A}_{gen}$. Nech $(X, \mathcal{T}) \in \mathbf{A}_{lok}$. Nech $A \cap U$ je uzavretá pre každý podpriestor U topologického priestoru X, ktorý patrí do $\mathbf{A}$. Chceme ukázať, že A je uzavretá. Ukážeme, že ak $x \notin A$, tak existuje okolie V bodu x, také, že $V \cap A = \emptyset$. Nech U_x je okolie x, ktoré patrí do $\mathbf{A}$. $A \cap U_x$ je uzavretá, a teda $U_x \setminus (A \cap U_x) =: V_x$ je otvorená (v podpriestore U_x). To znamená, že $V_x = V_1 \cap U_x$ pre nejakú V_1 otvorenú v $(X, \mathcal{T})$. Ďalej existuje otvorená množina V_2 taká, že $x \in V_2 \subseteq U_x$ (lebo U_x je okolie x). Označme $V := V_1 \cap V_2$. V je otvorená a $V \subseteq V_x$, čiže $V \cap A = \emptyset$.

Ďalej ukážeme, že $\mathbf{A}_{gen} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{A})$. Nech X je $\mathbf{A}$-generovaný a $\{A_i\}_{i \in I}$ je systém všetkých podpriestorov X patriacich do $\mathbf{A}$. Označme $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. B aj $X \setminus B$ sú otvorené v X (lebo prienik s každým A_i je buď prázdna alebo celá množina), teda $X = B \coprod (X \setminus B)$. Pritom každá podmnožina $X \setminus B$ je uzavretá, teda je to diskrétny priestor. Stačí teda ukázať, že $B \in \mathbf{A}$. Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\{A_i\}_{i \in I}$ je pokrytie X.

Označme $f = [id_{A_i}] \colon \coprod A_i \to X$, čiže f je také zobrazenie, ktoré na každom A_i splýva s id_{A_i}. V X je množina uzavretá práve vtedy, keď je uzavretý jej prienik z každým A_i. To znamená, že zobrazenie $f \colon \coprod A_i \to X$ je faktorovým zobrazením, a teda $X \in \mathrm{CH}(\mathbf{A})$. (Surjektívnosť f vyplýva z toho, že $\{A_i\}$ je pokrytie.) $\square$

Definícia 3.4.2. Kategória $\mathbf{A} \subseteq$ **Top** sa nazýva *uzavretá na spojité obrazy*, keď pre každé surjektívne spojité zobrazenie $f \colon X \to Y$ platí, že ak $X \in \mathbf{A}$, tak aj $Y \in \mathbf{A}$.

Veta 3.4.3. *Ak* $\mathbf{A}$ *je uzavretá na spojité obrazy, tak platí:*

(i) $\mathbf{A}_{gen} = \mathrm{CH}(\mathbf{A})$

(ii) $\mathbf{A}_{gen}$ *je koreflektívna v* **Top** *a* $\mathbf{A}_{gen}$*-koreflexia priestoru* X *je taký priestor na množine* X*, že uzavreté množiny sú práve také množiny* U*, ktoré majú pre každý podpriestor* A *patriaci do* $\mathbf{A}$ *prienik* $U \cap A$ *uzavretý v* A*.*

Dôkaz. Stačí ukázať druhú časť tvrdenia, z nej už prvá priamo vyplýva.

Keďže $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}_{gen} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{A})$, majú tieto kategórie rovnaký koreflektívny obal. Z toho vyplýva, že stačí overiť, či $\mathbf{A}_{gen}$ je koreflektívna.

$$\begin{tikzcd} X & cX \arrow[l, "c_X"'] \\ & Y \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Potrebujeme vlastne ukázať, že ak pre Y z $\mathbf{A}_{gen}$ je $f\colon Y \to X$ spojité, bude spojité i ako zobrazenie do priestoru cX, ktorého topológia je určená podmienkou (ii). (Overiť, že podmienka (ii) určuje skutočne topológiu je jednoduché.) Nech teda $B \subseteq cX$ je uzavretá. Potom $B \cap A$ je uzavretá v A pre každý podpriestor A priestoru cX patriaci do $\mathbf{A}$. Keďže $\mathbf{A}$ je uzavretá na spojité obrazy, platí súčasne, že $B \cap f(A)$ je uzavretá v $f(A)$ pre všetky podpriestory $A \subseteq Y$ patriace do $\mathbf{A}$. Zo spojitosti zobrazenia $f|_A$ potom máme, že $A \cap f^{-1}(B \cap f(A)) = f^{-1}(B) \cap A$ je uzavretá v Y pre všetky podpriestory $A \in \mathbf{A}$. Pretože Y je $\mathbf{A}$-generovaný priestor, znamená to, že $f^{-1}(B)$ je uzavretá. □

Príklad 3.4.1. Kategória kompaktných priestorov je uzavretá vzhľadom na spojité obrazy, preto je kategória *kompaktne generovaných* priestorov **CGen** koreflektívna v **Top**.

Kategória konečných priestorov je uzavretá vzhľadom na spojité obrazy, preto je kategória *konečne generovaných* priestorov **FG** koreflektívna v **Top**.

Ak ω_α je ľubovoľné nekonečné kardinálne číslo, tak kategória $\mathbf{A}_\alpha$ všetkých priestorov kardinality menšej alebo rovnej ω_α je uzavretá na spojité obrazy. Z toho vyplýva, že kategória ω_α*-generovaných* priestorov je koreflektívna v **Top**. Túto kategóriu budeme označovať $\mathbf{Gen}(\omega_\alpha)$.

α-generované priestory

V tejto časti charakterizujeme α-generované priestory pomocou tesnosti.

Definícia 3.4.3. $t(x, X)$ - *tesnosť bodu* $x \in X$ je najmenšie kardinálne číslo α také, že $\alpha \geq \omega_0$ a $x \in \overline{C} \Leftrightarrow \exists C_0 \subset C \operatorname{card} C_0 \leq \alpha$ a $x \in \overline{C}_0$.

$t(X) = \sup\limits_{x \in X} t(x, X)$ sa nazýva *tesnosť* priestoru.

Tvrdenie 3.4.1. *Nech* X *je topologický priestor a* α *je nekonečné kardinálne číslo. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $t(X) \leq \alpha$,

(ii) *X je faktorový priestor topologického súčtu svojich podpriestorov kardinality nanajvýš α,*

(iii) $X \in \mathbf{Gen}(\alpha)$,

(iv) *pre každú podmnožinu* $U \subseteq X$ *platí* $\overline{U} = \bigcup\{\overline{V} : V \subseteq U, \operatorname{card} V \leq \alpha\}$.

Dôkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nech $\{A_i; i \in I\}$ sú topologické priestory na podmnožinách X s $\operatorname{card} A_i \leq \alpha$ a s indukovanou topológiou. Označme $f = [id_{A_i}]\colon \coprod A_i \to X$. Chceme ukázať, že f je faktorové. To je ekvivalentné s tvrdením, že ak $U \cap A_i$ je uzavretá v každom podpriestore A_i, tak U je uzavretá v X. Ukážeme to sporom. Nech by U nebola uzavretá. Potom by existovalo $x \in \overline{U} \setminus U$. Z definície tesnosti máme potom zaručenú existenciu podmnožiny $C \subseteq U$ takej, že $x \in \overline{C}$ a $\operatorname{card} C \leq \alpha$. Pre nejaké $i_0 \in I$ platí $A_{i_0} = C \cup \{x\}$. $U \cap A_{i_0}$ nie je uzavretá v A_{i_0}, čo je spor s predpokladom.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Vyplýva z toho, že $\mathbf{Gen}(\alpha)$ je koreflektívny obal priestorov kardinality nanajvýš α.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Označme $B = \bigcup\{\overline{V}; V \subseteq U, \operatorname{card} U \leq \alpha\}$. Platnosť inklúzie $B \subseteq \overline{U}$ je zrejmá. Zostáva overiť, či B je uzavretá. Nech by to tak nebolo. Potom existuje množina A taká, že $\operatorname{card} A \leq \alpha$ a $A \cap B$ nie je uzavretá v A. To znamená, že existuje $x \in \overline{C} \setminus C$, kde C sme označili $A \cap B$. Oindexujme prvky C ordinálmi z α, t.j. $C = \{x_\xi; \xi < \alpha\}$. Pre každé x_ξ existuje $A_\xi \subseteq U$ také, že $\operatorname{card} A_\xi \leq \alpha$ a $x_\xi \in \overline{A_\xi}$. Potom máme $x \in \overline{\{x_\xi; \xi < \alpha\}} \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \overline{A_\xi}}$. Súčasne však platí $\bigcup_{\xi<\alpha} \overline{A_\xi} \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi}$, a teda aj $\overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \overline{A_\xi}} \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi}$. To znamená, že $x \in \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi}$. Ale podľa lemy 2.2.1 $\operatorname{card}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi) \leq \alpha$. Súčasne $\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi \subseteq U$. Z toho dostávame, že $x \in B$, čo je spor.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Zrejmé. □

3.4.3 $\mathbb{P}$-pseudoradiálne priestory

Pojem $\mathbb{P}$-pseudoradiálneho priestoru je prevzatý z článku [12]. Tam je definovaný o niečo všeobecnejšie než v tejto práci, $\mathbb{P}$ v tomto článku predstavuje triedu nahor usmernených množín, pričom konvergencia v tom prípade predstavuje konvergenciu sietí. Aj pri takejto definícii získame koreflektívnu podkategóriu **Top**. My sa budeme zaoberať len špeciálnym prípadom, keď $\mathbb{P}$ je nejaká trieda ordinálnych čísel.

Definícia 3.4.4. Nech $\mathbb{P}$ je trieda ordinálnych čísel. Topologický priestor X sa nazýva $\mathbb{P}$-*pseudoradiálny* priestor, ak pre každú neuzavretú podmnožinu $A \subset X$ existuje $x \notin A$ a α-postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ konvergujúca k x, pričom $\alpha \in \mathbb{P}$ a $x_\xi \in A$. Kategóriu $\mathbb{P}$-pseudoradiálnych priestorov budeme označovať $\mathbb{P}\mathbf{PsRad}$.

Inými slovami možno $\mathbb{P}$-pseudoradiálne priestory charakterizovať tak, že sú to priestory v ktorých sú uzavreté práve množiny obsahujúce všetky limity α-postupností svojich prvkov pre každé $\alpha \in \mathbb{P}$.

Tvrdenie 3.4.2. *Trieda $\mathbb{P}$-pseudoradiálnych priestorov je koreflektívna podkategória* **Top**.

Dôkaz. Uzavretosť na topologické súčty je zrejmá.

Nech X je $\mathbb{P}$-pseudoradiálny a $f\colon X \to Y$ je faktorové zobrazenie. Treba ukázať, že každá podmnožina Y obsahujúca všetky limity α-postupností svojich prvkov pre $\alpha \in \mathbb{P}$ je uzavretá. Nech V je takáto množina. Aby sme ukázali, že V je uzavretá, stačí overiť, či $f^{-1}(V)$ je uzavretá v X. Nech teda $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ je transfinitná postupnosť typu $\alpha \in \mathbb{P}$, pričom $x_\xi \in f^{-1}(V)$ pre všetky $\xi < \alpha$ a nech $x_\xi \to x$. Potom aj $f(x_\xi) \to f(x)$, a teda $f(x) \in V$ a $x \in f^{-1}(V)$. $\square$

Nech α je nekonečné regulárne kardinálne číslo. Definujme na množine $\alpha \cup \{\alpha\}$ topologický priestor $C(\alpha)$, v ktorom všetky prvky z α sú izolované a bázou okolí α sú doplnky počiatočných úsekov dobre usporiadanej množiny α, t.j. $B(\alpha) = \{U_\xi : \xi < \alpha\}$, kde $U_\xi = \{\alpha\} \cup \{\beta \in \alpha : \beta \geq \xi\} = \langle \xi, \alpha \rangle$.

Priestor $C(\alpha)$ súvisí s konvergenciou α-postupností. Postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ konverguje k $x \Leftrightarrow$ zobrazenie $f\colon C(\alpha) \to X$, $f(\xi) = x_\xi$, $f(x) = x$, je spojité.

Lema 3.4.1. *Každý $\mathbb{P}$-pseudoradiálny priestor patrí do koreflektívneho obalu triedy topologických priestorov $\{C(\alpha)|\alpha \in \mathbb{P}\}$ v* **Top**.

Dôkaz. Nech $(X, \mathcal{T}) \in \mathbb{P}$**PsRad**. Označme:
K=množina transfinitných postupností niektorého typu $\alpha \in \mathbb{P}$ v X. α_k bude označovať typ transfinitnej postupnosti $k \in K$.
$L = \{(k, x) \in K \times X; k = (k_\xi)_{\xi<\alpha_k}$ konverguje k $x\}$
$S_l = \{k_\xi | \xi < \alpha_k\} \cup \{x\}$ pre každé $l = (k, x) \in L$.
$\mathcal{S}_l$ = faktorová topológia na S_l vzhľadom na zobrazenie $f_l\colon C(\alpha_k) \to S_l$ také, že $f_l|_{\alpha_k} = k$, $f_l(\alpha_k) = x$.
Uzavreté množiny v $\mathcal{S}_l$, $l = (k, x) \in L$ možno charakterizovať nasledovne:
B je uzavretá v $S_l \Leftrightarrow f^{-1}(B)$ je uzavretá v $C(\alpha_k) \Leftrightarrow \alpha_k \in f^{-1}(B) \vee \exists\eta_0(\eta > \eta_0 \Rightarrow \eta \notin f^{-1}(B)) \Leftrightarrow x \in B \vee (\exists\xi_0 < \alpha_k)(\xi > \xi_0 \Rightarrow x_\xi \notin B)$.
Urobme topologický súčet všetkých $(S_l, \mathcal{S}_l)$ a stotožnime body v $\coprod_{l\in L} S_l$, ktoré zodpovedajú rovnakým bodom v X. Topológiu na X, ktorú takto dostaneme, označme $\mathcal{S}$. Tvrdíme, že $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Porovnajme uzavreté množiny v oboch topológiách.

Nech B je uzavretá v $\mathcal{T}$ a $l = (k, x) \in L$. Potom buď $x \in B$, (a teda $B \cap S_l$ je uzavretá v $\mathcal{S}_l$) alebo $x \notin B$, potom však existuje $\xi_0 < \alpha_k$ také, že pre $\xi > \xi_0$ platí $x_\xi \notin B$, inak by sme vedeli zostrojiť konvergentnú transfinitnú postupnosť x'_ξ typu α_k prvkov z B konvergujúcu k x, a teda by muselo platiť $x \in B$. (Takú postupnosť by sme mohli zostrojiť napríklad tak, že by sme zobrali len tie prvky pôvodnej postupnosti, ktoré sú v B a na miesta pôvodnej postupnosti, na ktorých boli pôvodne prvky neležiace v B by sme dali vždy prvý prvok zo zvyšku postupnosti, ktorý leží v B.) Vidíme, že aj v tomto prípade je $B \cap S_l$ uzavretá v $\mathcal{S}_l$.

Obrátene, nech $B \cap S_l$ je uzavretá v každom $\mathcal{S}_l$. Nech $k = (b_\xi)_{\xi<\alpha_k}$ je ľubovoľná transfinitná postupnosť typu $\alpha_k \in \mathbb{P}$ prvkov z B, ktorá konverguje k $x \in X$. Aby sme ukázali, že B je uzavretá, potrebujeme dokázať, že $x \in B$.

Zrejme $l = (k, x) \in L$. $S_l \cap B$ je uzavretá v $\mathcal{S}_l$ a $S_l \cap B$ obsahuje všetky b_ξ pre $\xi < \alpha_k$, čiže potom $x \in B$ (na základe charakterizácie uzavretých množín v $\mathcal{S}_l$). □

Lema 3.4.2. *Ak $\alpha \in \mathbb{P}$, tak priestor $C(\alpha)$ je $\mathbb{P}$-pseudoradiálny.*

Dôkaz. Uzavreté množiny v $C(\alpha)$ sú množiny obsahujúce α a množiny „odrazené“ od α, t.j. také, že majú horné ohraničenie menšie ako α. Prvky z α môžu byť (vďaka tomu, že sú izolované) len limitami postupností, ktoré sú od určitého člena konštantné. Z toho vyplýva, že ak nejaká množina s každou konvergentnou transfinitnou postupnosť typu α svojich prvkov obsahuje aj všetky jej limity, buď neobsahuje postupnosť konvergujúcu k α (a potom je odrazená od α, čiže uzavretá), alebo obsahuje α (a v tom prípade je tiež uzavretá). Ukázali sme, že v $C(\alpha)$ sú uzavreté všetky množiny, ktoré obsahujú limity α-postupností svojich prvkov, čo znamená, že tento priestor je $\mathbb{P}$-pseudoradiálny. □

Z predchádzajúcich dvoch liem dostaneme nasledovný záver:

Tvrdenie 3.4.3. $\mathbb{P}$**PsRad**=CH($\{C(\alpha)\colon \alpha \in \mathbb{P}\}$)

Definícia 3.4.5. Zobrazenie $f\colon X \to Y$, kde X a Y sú topologické priestory sa nazýva *α-sekvenciálne spojité*, ak pre každú α-postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ platí $x_\xi \to x \Rightarrow f(x_\xi) \to f(x)$. ω_0-sekvenciálne spojité zobrazenie sa nazýva *sekvenciálne spojité*. Ak f je α-sekvenciálne spojité pre každé $\alpha \in \mathbb{P}$, tak hovoríme, že je *$\mathbb{P}$-pseudoradiálne spojité.*

Tvrdenie 3.4.4. *Ak $X \in \mathbb{P}$**PsRad** a $f\colon X \to Y$ je $\mathbb{P}$-pseudoradiálne spojité, tak f je spojité.*

Dôkaz. Nech V je uzavretá v Y. Treba overiť, či $f^{-1}(V)$ obsahuje limity α-postupností svojich prvkov pre $\alpha \in \mathbb{P}$. Ak $x_\xi \to x$, $(x_\xi)_{\xi<\alpha} \subseteq A$, tak máme $f(x_\xi) \to f(x)$. Z uzavretosti V potom vyplýva $f(x) \in B$ a $x \in f^{-1}(B)$. □

Pre topologický priestor X a $A \subseteq X$ zaveďme označenie $A_1 = \{x \in X :$ existuje transfinitná postupnosť typu α prvkov z A konvergujúca k x pre niektoré $\alpha \in \mathbb{P}\}$. Definujme tiež $A_0 = A$. Transfinitnou indukciou definujeme ďalej
$A_{\beta+1} = (A_\beta)_1$
$A_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} A_\gamma$, ak β je limitný ordinál.
Označme $\tilde{A} = \bigcup_{\beta\in\mathrm{On}} A_\beta$.
Je zrejmé, že platí $\tilde{A} \subseteq \overline{A}$.

Tvrdenie 3.4.5. $X \in \mathbb{P}$**PsRad** *práve vtedy, keď $\overline{A} = \tilde{A}$ pre všetky $A \subseteq X$.*

Dôkaz. Nech $X \in \mathbb{P}$**PsRad** a $A \subseteq X$. $\tilde{A}$ obsahuje limitu ľubovoľnej transfinitnej postupnosti svojich prvkov typu $\alpha \in \mathbb{P}$, lebo ak $x_\xi \in \tilde{A}$, tak x_ξ patrí do nejakého A_{β_ξ}. Potom limita tejto transfinitnej postupnosti patrí do A_β, kde $\beta = \sup \beta_\xi$. Teda $\tilde{A}$ je uzavretá, z čoho už vyplýva $\tilde{A} = \overline{A}$.

Obrátene, nech pre všetky podmnožiny $A \subseteq X$ platí $\overline{A} = \tilde{A}$. Nech B je uzavretá vzhľadom na limity α-postupností pre $\alpha \in \mathbb{P}$. Potom $B = B_1 = \tilde{B} = \overline{B}$ a B je uzavretá. □

Definícia 3.4.6. $\mathbb{P}$-pseudoradiálne priestory pre $\mathbb{P} = \{\alpha\}$ budeme nazývať α-*sekvenciálne* priestory. Kategóriu α-sekvenciálnych priestorov budeme označovať $\mathbf{Seq}(\alpha)$. ω_0-sekvenciálne priestory sa nazývajú *sekvenciálne* a kategória sekvenciálnych priestorov sa označuje $\mathbf{Seq}$.

Ak za $\mathbb{P}$ zvolíme celú triedu ordinálnych čísel, nazývame takto získanú kategóriu topologických priestorov *pseudoradiálne* priestory a označujeme $\mathbf{PsRad}$.

Termín α-sekvenciálny priestor sme prebrali z [7] (α-Folgenbestimmt Raum), ale v niektorých prácach sa používa vo význame v akom my budeme používať pojem α-pseudoradiálny priestor. ([12], [9])

Tvrdenie 3.4.6. $\mathbf{Seq}(\alpha) \subseteq \mathbf{Gen}(\alpha)$

Dôkaz. Uvedené tvrdenie vyplýva z toho, že kategória $\mathbf{Seq}(\alpha)$ je generovaná priestorom $C(\alpha)$, ktorý má kardinalitu α. $\square$

α-sekvenciálne priestory

α-sekvenciálne priestory sme definovali pre ľubovoľný ordinál α. Teraz ukážeme, že sa stačí obmedziť na regulárne kardinály.

Pre nelimitný ordinál α sú α-sekvenciálne priestory konečne generované. Prípad keď α je limitný popíšeme v nasledujúcich dvoch lemách.

Lema 3.4.3. *Nech α je limitný ordinál. Nech β je najmenší ordinál taký, že existuje β-postupnosť ordinálnych čísel menších ako α, ktorá konverguje ku α. Potom:*

(i) *β je regulárne kardinálne číslo,*

(ii) *$C(\alpha) \in \mathbf{Seq}(\beta)$,*

(iii) *existuje prostá monotónna β-postupnosť ordinálnych čísel menších ako α konvergujúca k α.*

Dôkaz. Označme $(x_\xi)_{\xi<\beta}$ β-postupnosť ordinálnych čísel menších ako α konvergujúcu k α, ktorej existenciu predpokladáme. Pre ľubovoľné $\eta < \beta$ budeme označovať $\langle\eta) := \{\gamma \in \beta; \gamma < \eta\}$.

(i) Nech by β nebol regulárny kardinál. Potom β je suprémum nejakej γ-postupnosti $(z_\xi)_{\xi<\gamma}$ pre $\gamma < \beta$ a $x_{z_\xi} \to \alpha$, čo je spor s minimalitou β.

(ii) Nech V obsahuje všetky β-limity svojich podpostupností. Ukážeme, že V je uzavretá. Ak $\sup V < \alpha$, tak V je uzavretá. Ak $\sup V = \alpha$, tak $U \cap \langle x_\xi) \neq \emptyset$ pre každé $\xi < \beta$. Ak položíme $y_\xi = \inf(V \cap \langle x_\xi))$, tak $y_\xi \in V$ a $y_\xi \to \alpha$. Z toho vyplýva, že $\alpha \in V$ a V je uzavretá.

(iii) Ak položíme $y_\xi = \sup\{x_\eta; \eta \leq \xi\}$, tak dostaneme monotónnu postupnosť s uvedenými vlastnosťami. Z každej množiny $\{\eta; x_\eta = y_\xi\}$ pre $\xi < \alpha$ vyberme jeden prvok. Dostaneme tak dobre usporiadanú podmnožinu $A \subseteq \beta$. Ak γ označíme ordinálny typ A, tak máme prostú monotónnu γ-postupnosť konvergujúcu k α. Z nasledujúcej lemy vyplynie, že $\gamma \preceq \beta$ a z minimality β aj $\beta \preceq \gamma$. Dostali sme, že $\gamma = \beta$. $\square$

Lema 3.4.4. *Nech A je dobre usporiadaná množina, $B \subseteq A$. Nech* $\mathrm{Ord}(B)$ *je ordinálny typ B a* $\mathrm{Ord}(A)$ *je ordinálny typ A. Potom* $\mathrm{Ord}(B) \preceq \mathrm{Ord}(A)$.

Dôkaz. $\mathrm{Ord}(A) \prec \mathrm{Ord}(B)$ by znamenalo, že dobre usporiadaná množina A je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom $B_b = \{c \in B; c < b\}$ dobre usporiadanej množiny B pre nejaké $b \in B$. Ak $f\colon A \to B_b$ je izomorfizmus, tak $f\colon A \to A$ je izotónne zobrazenie. Navyše platí $f(a) < b$ pre každé $a \in A$, špeciálne aj $f(b) < b$.

To znamená, že $M = \{a \in A; f(a) < a\}$ je neprázdna. Nech a_0 je najmenší prvok tejto množiny. Preň tiež platí $f(a_0) < a_0$. Z monotónnosti f dostaneme, že $f(f(a_0)) < f(a_0)$, teda $f(a_0) \in M$ a súčasne $f(a_0)$ je menšie než $a_0 = \min M$, čo je spor. □

Lema 3.4.5. *Nech $(x_\xi)_{\xi<\beta}$ je monotónna prostá postupnosť ordinálnych čísel menších ako α, ktorá konverguje k α. Potom existuje faktorové zobrazenie $g\colon C(\alpha) \to C(\beta)$.*

Dôkaz. Položme $g(\gamma) = \sup\{\eta \in \beta : x_\eta < \gamma\}$, pričom suprémum prázdnej množiny kladieme 0. g je monotónne zobrazenie a $g(\alpha) = \beta$. Surjektívnosť g vyplýva z toho, že $g(x_\xi + 1) = \xi$.

Spojitosť g je ekvivalentná s podmienkou, že postupnosť $g(\gamma)_{\gamma<\alpha}$ konverguje k β. (Je jedno, či uvažujeme konvergenciu v topologickom priestore $C(\beta)$ alebo konvergenciu postupnosti ordinálov, lebo v tomto prípade sú oba tieto druhy konvergencie ekvivalentné.) Overíme, či je splnená podmienka z definície 2.1.1. Nech $\gamma < \beta$. Potom $g(x_{\gamma+1} + 1) = \gamma + 1 > \gamma$, čiže (vďaka monotónnosti g) aj pre všetky $\xi > x_{\gamma+1} + 1$ platí $g(\xi) > \gamma$.

Ešte treba ukázať, že g je faktorové. Ak $g^{-1}(U)$ je otvorená a obsahuje α, tak $g^{-1}(U)$ obsahuje nejaký horný úsek množiny $\alpha \cup \{\alpha\}$. Potom aj U obsahuje nejaký horný úsek množiny $\alpha \cup \{\alpha\}$ a je teda otvorená. (Overme to podrobnejšie. Ak platí $\xi_0 \leq \xi < \alpha \Rightarrow \xi \in g^{-1}(U)$, tak $g(\xi_0) \in U$. Ak $\eta > g(\xi_0)$, tak $\eta = g(x_{\eta+1} + 1)$ a $x_{\eta+1} + 1 \geq \xi_0$ (z monotónnosti g), preto aj $x_{\eta+1} + 1 \in g^{-1}(U)$ a $\eta \in U$.) □

Tvrdenie 3.4.7. *Nech α je limitný ordinál. Potom existuje regulárne kardinálne číslo β také, že* $\mathbf{Seq}(\alpha) = \mathbf{Seq}(\beta)$.

Dôkaz. Nech β je regulárne kardinálne číslo, o existencii ktorého hovorí lema 3.4.3. Podľa tejto lemy $C(\alpha) \in \mathbf{Seq}(\beta)$, čiže $\mathbf{Seq}(\alpha) \subseteq \mathbf{Seq}(\beta)$. Obrátene, lema 3.4.5 zaručuje, že $C(\beta) \in \mathbf{Seq}(\alpha)$ a $\mathbf{Seq}(\beta) \subseteq \mathbf{Seq}(\alpha)$. □

3.5 Koreflektívne podkategórie Haus

Tvrdenie 3.5.1. *Nech* $\mathbf{B}$ *je podkategória* **Haus**, *ktorá obsahuje aspoň jeden neprázdny priestor. Potom sú nasledovné podmienky ekvivalentné:*

(i) $\mathbf{B}$ *je koreflektívna podkategória* **Haus**.

(ii) $\mathbf{B} = \mathrm{CH}(\mathbf{B}) \cap \mathbf{Haus}$.

(iii) *existuje koreflektívna podkategória* $\mathbf{A}$ *kategórie* $\mathbf{Top}$ *taká, že platí* $\mathbf{A} \cap \mathbf{Haus} = \mathbf{B}$.

(iv) $\mathbf{B}$ *je bikoreflektívna v* $\mathbf{Haus}$.

(v) $\mathbf{B}$ *je uzavretá na tvorbu topologických súčtov a faktorových priestorov v* $\mathbf{Haus}$.

(vi) *Pre každý* T_2*-priestor* $(X, \mathcal{T})$ *existuje najhrubšia topológia* $\mathcal{T}_{\mathbf{B}}$ *spomedzi všetkých topológií* $\mathcal{T}'$ *na* X*, ktoré sú jemnejšie ako* $\mathcal{T}$ *a súčasne také, že* $(X, \mathcal{T}') \in \mathbf{B}$*, pričom platí pre každú dvojicu priestorov* $C((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})) \subset C((X, \mathcal{T}_{\mathbf{B}}), (Y, \mathcal{S}_{\mathbf{B}}))$. $(X, \mathcal{T}')$ *je* $\mathbf{B}$*-koreflexiou priestoru* $(X, \mathcal{T})$.

Dôkaz. Pretože $\mathbf{B}$ obsahuje neprázdny priestor, tak podľa tvrdenia 3.1.5 je $(i) \Leftrightarrow (iv)$. Pretože $\mathbf{Haus}$ spĺňa predpoklady vety 3.3.1 je $(i) \Leftrightarrow (v)$ a z charakterizácie uvedenej v tejto vete vyplýva aj $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Ekvivalencia (ii) a (iii) je zrejmá. Podľa vety 3.4.1 $(ii) \Rightarrow (vi)$. $(vi) \Rightarrow (i)$ dokážeme priamo overením podmienky z definície koreflexie.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}) \arrow[d, "f"'] & (X, \mathcal{T}_{\mathbf{B}}) \arrow[l, "id"'] \arrow[d, "f"] \\
(Y, \mathcal{S}) & (Y, \mathcal{S}_{\mathbf{B}}) \arrow[l, "id"]
\end{tikzcd}$$

Koreflexia $(X, \mathcal{T})$ je $((X, \mathcal{T}_{\mathbf{B}}), id)$. Ak $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ je spojité, tak podľa (vi) je aj $f\colon (X, \mathcal{T}_{\mathbf{B}}) \to (Y, \mathcal{S}_{\mathbf{B}})$ spojité, a pretože $\mathcal{S}_{\mathbf{B}} \prec \mathcal{S}$, tak aj $f\colon (X, \mathcal{T}_{\mathbf{B}}) \to (Y, \mathcal{S})$ je spojité. □

Kapitola 4

Dedičné koreflektívne podkategórie

4.1 Pomocné tvrdenia

V tejto kapitole budeme potrebovať niektoré pojmy a pomocné tvrdenia z všeobecnej topológie. Uviedli sme ich v samostatnej časti, aby neskôr nenarušovali súvislosť výkladu.

4.1.1 Adjungovaný priestor

Nasleduje definícia adjungovaného priestoru. Uvedieme aj význam tohto pojmu z hľadiska teórie kategórií, v ďalšom však budeme potrebovať len tvrdenie 4.1.2.

Definícia 4.1.1. Nech X, Y sú topologické priestory, $M \subset X$ je topologický podpriestor a $f\colon M \to Y$ je spojité zobrazenie. $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/E$, kde E je najmenšia ekvivalencia na $X \cup Y$ taká, že $xEf(x)$ pre všetky $x \in M$. $X \cup_f Y$ sa nazýva *adjungovaný priestor*.

Poznamenajme, že napríklad v [5] sa navyše požaduje, aby M bol uzavretý podpriestor X, my to nepredpokladáme. Vloženie M do X budeme značiť m.

Keď porovnáme uvedenú definíciu s kanonickou konštrukciou pushoutu pomocou kosúčinov a koekvalizátorov (alebo s duálnou konštrukciou pullbacku) známou z teórie kategórií, vidíme, že ide o tú istú konštrukciu, s tým rozdielom, že pri pushoute nežiadame, aby $m\colon M \to X$ bolo vloženie, čiže pushout je všeobecnejší. Platí teda tvrdenie:

Tvrdenie 4.1.1. *Nasledujúci diagram je pushout:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "m"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ X \arrow[r, "j"] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

Nech $i_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y$, $i_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ sú vloženia a $q : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ je prirodzená projekcia. Ich zloženia

$$j = qi_X : X \to X \cup_f Y \text{ a } k = qi_Y : Y \to X \cup_f Y$$

sú spojité a množina $C \subset X \cup_f Y$ je otvorená (uzavretá) práve vtedy, keď $j^{-1}(C)$ a $k^{-1}(C)$ sú otvorené (uzavreté) v X resp. v Y. [C je otvorená (uzavretá) v $X \cup_f Y \Leftrightarrow q^{-1}(C)$ v $X \sqcup Y \Leftrightarrow i_X^{-1} q^{-1}(C)$ v X a $i_Y^{-1} q^{-1}(C)$ v Y.]

Ľahko sa overí, že:

$$j^{-1}k(B) = f^{-1}(B) \text{ a } k^{-1}k(B) = B \text{ pre } B \subset Y, \tag{1}$$

$$j^{-1}j(A) = A \cup f^{-1}f(A \cap M) \text{ a } k^{-1}j(A) = f(A \cap M) \text{ pre } A \subset X. \tag{2}$$

[$j^{-1}k(B) =$ prvky z X, ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $B = f^{-1}(B)$
$k^{-1}k(B) =$ prvky z Y, ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $B = B$
$j^{-1}j(A) =$ prvky z X, ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $A = A \cup f^{-1}f(A \cap M)$
$k^{-1}j(A) =$ prvky z Y, ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $A = f(A \cap M)$]

Použitím týchto vzťahov môžeme ukázať, že platí:

Tvrdenie 4.1.2. *Nech X, Y sú topologické priestory, $M \subset X$, $f : M \to Y$ je faktorové zobrazenie. (Nepredpokladáme uzavretosť M.) Potom $k : Y \hookrightarrow X \cup_f Y$ je vloženie a $j : X \to X \cup_f Y$ je faktorové zobrazenie.*

Ak navyše $M \subseteq Y$ je otvorený (uzavretý) podpriestor, tak $k(Y)$ je otvorený (uzavretý) podpriestor priestoru $X \cup_f Y$.

Dôkaz. Rovnosť $k^{-1}k(B) = B$ implikuje, že k je prosté zobrazenie. Každá trieda ekvivalencie E musí obsahovať aj nejaký prvok z X, pretože zobrazenie f je surjektívne. Z toho vyplýva, že aj j, ktoré priradí ľubovoľnému prvku z X jeho triedu ekvivalencie, je surjektívne.

Najprv ukážeme, že k je vloženie. Nech $U \subset Y$ je otvorená. Treba zistiť, či $k[U]$ je otvorená v $k[Y]$. f je faktorové, preto $f^{-1}(U)$ je otvorená v M, čo znamená, že existuje otvorená podmnožina $V \subset X$ taká, že $f^{-1}(U) = V \cap M$. Súčasne platí $j[V \setminus M] \cap j[M] \subseteq j[X \setminus M] \cap j[M] = \emptyset$ (žiadny prvok z $X \setminus M$ nie je v relácii E s prvkom z Y resp. z M), a teda $j[V] \cap j[M] = (j[(V \setminus M)] \cup j[V \cap M]) \cap j[M] = (j[V \setminus M] \cap j[M]) \cup (j[V \cap M] \cap j[M]) = j[V \cap M]$. Pomocou tejto rovnosti dostaneme $j[V] \cap k[Y] = j[V] \cap k[f[M]] = j[V] \cap j[M] = j[V \cap M] = j[f^{-1}(U)] = k[U]$.

Stačí ukázať, že $j[V]$ je otvorená v $X \cup_f Y$, čo je ekvivalentné s tým, že $j^{-1}j[V]$ je otvorená v X a $k^{-1}j[V]$ je otvorená v Y. Na základe (2) však dostaneme $j^{-1}j[V] = V \cup f^{-1}f[V \cap M] = V \cup f^{-1}ff^{-1}(U) = V \cup f^{-1}(U) = V$, $k^{-1}j[V] = f[V \cap M] = ff^{-1}(U) = U$ a obe tieto množiny sú otvorené.

Overme tiež, či j je faktorové. Ak $j^{-1}(U)$ je otvorená v X, tak $f^{-1}k^{-1}(U) = m^{-1}j^{-1}(U) = j^{-1}(U) \cap M$ je otvorená v M, čiže aj $k^{-1}(U)$ je otvorená (f je faktorové). Keďže $j^{-1}(U)$ aj $k^{-1}(U)$ sú otvorené, aj U je otvorená.

Ak M je otvorený (uzavretý) podpriestor X, tak $j^{-1}(k(Y)) = f^{-1}(Y) = M$ a $k^{-1}(k(Y)) = Y$ sú otvorené (uzavreté), preto aj $k(Y)$ je otvorená (uzavretá). $\square$

4.1.2 Induktívna limita

Definícia 4.1.2. Nech A je usmernená množina a $\{R_\alpha; \alpha \in A\}$ je systém navzájom disjunktných topologických priestorov. Nech pre každú dvojicu $\alpha, \beta \in A$ takú, že $\alpha \leq \beta$ je dané spojité zobrazenie $\varphi_\alpha^\beta \colon R_\alpha \to R_\beta$ a platí $\varphi_\alpha^\gamma = \varphi_\beta^\gamma \circ \varphi_\alpha^\beta$ pre $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ a $\varphi_\alpha^\alpha = id_{R_\alpha}$. Potom systém $\{R_\alpha, \varphi_\alpha^\beta; \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta\}$ nazývame *usmernený (induktívny) systém* topologických priestorov.

Nech $R = \coprod_{\alpha \in A} R_\alpha$ a $\sim$ je ekvivalencia na R taká, že pre $p_\alpha \in R_\alpha$, $p_\beta \in R_\beta$ je $p_\alpha \sim p_\beta$ práve vtedy, keď $\varphi_\alpha^\gamma(p_\alpha) = \varphi_\beta^\gamma(p_\beta)$ pre nejaké $\gamma \in A$. Faktorový priestor $R/{\sim}$ sa nazýva *priama (induktívna, usmernená) limita* systému $\{R_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ a označuje sa $\varinjlim\{R_\alpha, \varphi_\alpha^\beta; \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta\}$.

V teórii kategórií sa definuje usmernená kolimita, ako kolimita diagramu, ktorého schéma je nahor usmernená množina interpretovaná ako kategória. Poznamenajme bez dôkazu, že v kategórii **Top** je to práve induktívna limita.

My budeme potrebovať len špeciálny prípad induktívnej limity, keď $A = \mathbb{N}$ a všetky φ_α^β sú vloženia. V tomto prípade sa induktívna limita dá intuitívne chápať ako zjednotenie induktívneho systému priestorov, ak predpokladáme, že všetky vloženia sú v skutočnosti identity.

Tvrdenie 4.1.3. *Nech $\{R_n; n \in \mathbb{N}\}$ je induktívny systém topologických priestorov taký, že všetky $\varphi_n^{n+1} \colon R_n \to R_{n+1}$ sú vloženia. Nech R^* je jeho induktívna limita. Označme $\varphi_n := \varphi_n^{n+1}$. Potom existujú vloženia $i_n \colon R_n \hookrightarrow R^*$ také, že platí $i_n = i_{n+1} \circ \varphi_n$.*

Dôkaz. Vloženie i_n priradí bodu $x \in R_n$ jeho triedu ekvivalencie $[x]$ v R^*. $i_{n+1} \circ \varphi_n(x) = [\varphi_n(x)] = [x] = i_n(x)$, lebo podľa definície induktívnej limity $x \sim \varphi_n(x) = \varphi_n^{n+1}(x)$. Treba overiť, či i_n je vloženie. Zrejme i_n je prosté. Ak by totiž pre $x \neq y$ platilo $i_n(x) = i_n(y)$, tak by musela nastať rovnosť $\varphi_n^{n+k}(x) = \varphi_n^{n+k}(y)$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$, čo je spor s tým, že $\varphi_n^{n+k} = \varphi_{n+k-1} \circ \cdots \circ \varphi_n$ je vloženie. To znamená, že môžeme predpokladať $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots \subseteq R_n \subseteq \ldots \subseteq R^*$. Topológia na R^* je teraz daná tak, že U je otvorená v R^* práve vtedy, keď $U \cap R_n$ je otvorená v R_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ak množina U je otvorená v R^*, tak $i_n^{-1}(U) = U \cap R_n$ je otvorená v R_n.

Nech U je otvorená v R_n. Treba overiť, či $i_n[U]$ je otvorená v $i_n[R_n]$. Indukciou zostrojíme monotónny systém množín $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ taký, že platí $U_k \cap R_n = U$ a $U_k \cap R_{n+l} = U_l$ pre $l < k$ a U_k je otvorená v R_{n+k}. V prvom kroku indukcie stačí zvoliť množinu U_1 otvorenú v R_{n+1} takú, že $U_1 \cap R_n = U$. Jej existencia vyplýva z toho, že R_n je podpriestor R_{n+1} (φ_n je vloženie). Indukčný krok: Ak máme definované $U_1, \ldots, U_k$ s uvedenými vlastnosťami, opäť môžeme zvoliť za U_{k+1} otvorenú množinu v R_{n+k+1} takú, že $U_{k+1} \cap R_{n+k} = U_k$. Potom tiež platí: $U_{k+1} \cap R_n = U_{k+1} \cap R_{n+k} \cap R_n = U_k \cap R_n = U$, $U_{k+1} \cap R_{n+k} = U_k$ a $U_{k+1} \cap R_{n+l} = U_{k+1} \cap R_{n+k} \cap R_{n+l} = U_k \cap R_{n+l} = U_l$ pre $l < k$.

Pomocou systému $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ môžeme zostrojiť množinu $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$. $V \cap R_m = U \cap R_m$ je otvorená v R_m pre každé $m \leq n$. $V \cap R_{n+l} = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) \cap R_{n+l} = \left(\bigcup_{k > l} U_k\right) \cap R_{n+l} = \bigcup_{k > l} (U_k \cap R_{n+l}) = U_l$ je otvorená v R_l. Tým sme overili, že V je otvorená v R^*. Súčasne $V \cap R_n = U$, teda U je otvorená v topológii indukovanej na R_n z R^*. $\square$

4.2 Dedičné koreflektívne podkategórie Top

Definícia 4.2.1. Podkategória kategórie **Top** sa nazýva *dedičná*, ak je uzavretá na vytváranie podpriestorov, *uzavreto dedičná*, ak je uzavretá na vytváranie uzavretých podpriestorov a *otvorene dedičná*, ak je uzavretá na vytváranie otvorených podpriestorov.

Pre podkategóriu $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ označíme S**A** (CS**A**, OS**A**) kategóriu pozostávajúcu zo všetkých (uzavretých, otvorených) podpriestorov priestorov z **A**.

Dedičná koreflektívna podkategória **Top** znamená kategóriu uzavretú na topologické súčty, faktorové priestory a podpriestory. Prienik takýchto kategórií je opäť uzavretý vzhľadom na všetky spomínané konštrukcie. Môžeme preto hovoriť o dedičnom koreflektívnom obale, podobne aj o otvorene dedičnom koreflektívnom a uzavreto dedičnom koreflektívnom obale.

Tvrdenie 4.2.1. *Ak* **A** *je koreflektívna podkategória kategórie* **Top**, *tak* S**A** *je dedičný koreflektívny obal kategórie* **A** *a* CS**A** (OS**A**) *je uzavreto dedičný (otvorene dedičný) koreflektívny obal* **A**.

Dôkaz. Potrebujeme iba overiť, či kategória S**A** (CS**A**, OS**A**) je koreflektívna. Uzavretosť vzhľadom na tvorbu topologických súčtov je zrejmá, overíme teda uzavretosť na faktorové priestory.

Nech $X \in \mathbf{A}$, $A \subset X$ je podpriestor (uzavretý podpriestor, otvorený podpriestor) a $f \colon A \to Y$ je faktorové zobrazenie. Potom podľa tvrdenia 4.1.2 je Y podpriestor (uzavretý podpriestor, otvorený podpriestor) $X \cup_f Y$. Keďže zobrazenie $f \colon A \to Y$ je faktorové, tak potom aj $X \cup_f Y$ je faktorový priestor priestoru X (tvrdenie 4.1.2). Teda tento priestor patrí do **A** a Y ako jeho podpriestor (uzavretý podpriestor, otvorený podpriestor) patrí do S**A** (CS**A**, OS**A**). □

Lema 4.2.1. *Ak* $f \colon X \to Y$ *je faktorové a* $A \subseteq Y$ *je uzavretá (otvorená), tak aj* $f|_{f^{-1}(A)} \colon f^{-1}(A) \to A$ *je faktorové.*

Dôkaz. Nech $U \subseteq A$ a $f^{-1}(U)$ je uzavretá (otvorená) v $f^{-1}(A)$. Potom $f^{-1}(U)$ je uzavretá (otvorená) v X, lebo $f^{-1}(A)$ je uzavretá (otvorená) v X. Pretože $f \colon X \to Y$ je faktorové, U je uzavretá (otvorená). □

Uvedená lema neplatí bez predpokladu, že A je uzavretá alebo otvorená. Kontrapríklad je na nasledujúcom obrázku. Nad a pod čiarou sú zobrazené bázy topológií priestorov. Horný priestor nech je X a dolný Y. Zobrazenie $f \colon X \to Y$ definujeme tak, že každý bod priestoru X sa zobrazí na bod priestoru Y, ktorý leží na obrázku pod ním. Zobrazenie f na obrázku vľavo je faktorové, ale jeho zúženie na obrázku vpravo už nie je.

Tvrdenie 4.2.2. *Ak* $\mathbf{A}$ *je uzavreto dedičná (otvorene dedičná) trieda topologických priestorov, tak* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ *(koreflektívny obal* $\mathbf{A}$ *v* **Top***) je uzavreto dedičný (otvorene dedičný).*

Dôkaz. Ak $X \in \mathrm{CH}(\mathbf{A})$, tak X je faktorový priestor súčtu priestorov z $\mathbf{A}$. Uzavretý (otvorený) topologický podpriestor topologického súčtu je topologický súčet uzavretých podpriestorov (otvorených podpriestorov). Čiže $\mathbf{A}_{sum}$ je uzavreto dedičná (otvorene dedičná) trieda topologických priestorov. Ak Y je uzavretý (otvorený) podpriestor faktorového priestoru nejakého priestoru z $\mathbf{A}_{sum}$, tak je podľa predchádzajúcej lemy faktorový priestor jeho uzavretého (otvoreného) podpriestoru, ktorý tiež patrí do $\mathbf{A}_{sum}$. Teda $Y \in \mathrm{CH}(\mathbf{A}_{sum}) = \mathrm{CH}(\mathbf{A})$. □

Dôsledok 4.2.1. *Ak* $\mathbf{A}$ *je trieda topologických priestorov,* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ *je koreflektívny obal* $\mathbf{A}$ *v* **Top** *a všetky uzavreté (otvorené) podpriestory prvkov* $\mathbf{A}$ *patria do* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$*, tak* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ *je uzavreto dedičná (otvorene dedičná) kategória.*

Dôkaz. $\mathbf{A} \subseteq \mathrm{CS}\mathbf{A} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathrm{CH}(\mathbf{A}) = \mathrm{CH}(\mathrm{CS}\mathbf{A})$ (Podobne pre $\mathrm{OS}\mathbf{A}$.) □

4.2.1 Prvotné priestory

Táto časť obsahuje charakterizáciu dedičných koreflektívnych kategórií pomocou prvotných priestorov, ktorá je uvedená v [4].

Definícia 4.2.2. Topologický priestor X je *prvotný priestor*, ak práve jeden jeho bod nie je izolovaný.

Nasledujúce dve tvrdenia ukazujú korešpondenciu medzi prvotnými priestormi a filtrami.

Tvrdenie 4.2.3. *Ak* X *je prvotný priestor a* a *je jeho neizolovaný bod, tak systém množín* $\{U \setminus \{a\}; U$ *je otvorené okolie* $a\}$ *tvorí filter na* $X \setminus \{a\}$.

Dôkaz. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, inak by a bol izolovaný bod. Ak $U \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$ pre nejaké otvorené okolie U bodu a a $U \setminus \{a\} \subseteq V \subseteq X \setminus \{a\}$, tak $V = U \cup (V \setminus (U \setminus \{a\}))$ je otvorená, lebo množina $V \setminus (U \setminus \{a\})$ pozostáva z izolovaných bodov, je teda otvorená. Uzavretosť $\mathcal{F}$ na konečné prieniky vyplynie z toho, že prienik konečného počtu otvorených množín je otvorená. □

Tvrdenie 4.2.4. *Nech* $\mathcal{F}$ *je filter na* A *a* $a \notin A$*. Definujeme topológiu* $\mathcal{T}$ *na* $A \cup \{a\}$ *tak, že* U *je otvorená práve vtedy, keď* $U \subseteq A \vee U \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$*. Potom* $(A \cup \{a\}, \mathcal{T})$ *je prvotný priestor. Označíme ho* $(A, \mathcal{F}, a)$.

Dôkaz. Overme, či takto dostaneme skutočne topológiu.
1. $\emptyset \subseteq A$, teda $\emptyset \in \mathcal{T}$. $(A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A \in \mathcal{F}$, teda $A \cup \{a\} \in \mathcal{T}$.
2. Ak $U, V \in \mathcal{T}$, tak nastane niektorá z možností:
a) $U \subseteq A \vee V \subseteq A$, potom $U \cap V \subseteq A$ a $U \cap V \in \mathcal{T}$.
b) $U \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$, $V \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$, potom $(U \cap V) \setminus \{a\} = (U \setminus \{a\}) \cap (V \setminus \{a\}) \in \mathcal{F}$, a teda $U \cap V \in \mathcal{T}$.

3. Ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I$, tak nastane niektorá z možností:
a) pre nejaké $i \in I$ platí $U_i \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$. Potom $U_i \setminus \{a\} \subseteq (\cup U_i) \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$.
b) pre všetky $i \in I$ je $U_i \subseteq A$. Potom $\cup U_i \subseteq A$ a $\cup U_i \in \mathcal{T}$.
Je zrejmé, že body z A sú izolované, lebo $\{b\} \subseteq A$ pre $b \neq a$. Bod a je neizolovaný, lebo inak by $\{a\} \setminus \{a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$. □

Lema 4.2.2. *Podpriestor prvotného priestoru je buď prvotný priestor alebo diskrétny priestor.*

Z lemy 4.2.2 a tvrdenia 4.2.1 dostaneme, že platí:

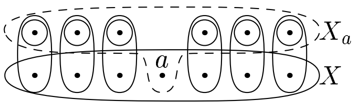
Dôsledok 4.2.2. *Ak* $\mathbf{K}$ *je trieda prvotných priestorov, tak jej koreflektívny obal* $\mathrm{CH}(\mathbf{K})$ *je uzavreto dedičný aj otvorene dedičný.*

Definícia 4.2.3. Ak X je topologický priestor a $a \in X$, tak *prvotný faktor* priestoru X v bode a je topologický priestor X_a na tej istej množine, v ktorom a má rovnaké okolia ako v X a ostatné body sú izolované.

Je zrejmé, že prvotný faktor je buď diskrétny priestor alebo prvotný priestor.

Koreflektívnu podkategóriu $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ nazveme *netriviálnou*, ak $\mathbf{FG} \subseteq \mathbf{A}$. Jediné triviálne koreflektívne podkategórie $\mathbf{Top}$, ktoré obsahujú neprázdny priestor, sú $\mathbf{Disc}$ - diskrétne priestory a $\mathbf{Ind}_{sum}$ - topologické súčty indiskrétnych priestorov.

Tvrdenie 4.2.5. *Ak* $\mathbf{A}$ *je netriviálna dedičná koreflektívna podkategória* $\mathbf{Top}$*, tak pre každé* $X \in \mathbf{A}$ *a* $a \in X$ *aj prvotný faktor* X_a *priestoru* X *v bode a patrí do* $\mathbf{A}$.



Dôkaz. Nech S je Sierpińského priestor na množine $\{0,1\}$, pričom množina $\{1\}$ je otvorená. Pretože $\mathbf{A}$ je netriviálna, tak $S \in \mathbf{A}$. Ak a je izolovaný v X, tak X_a je diskrétny priestor, a preto $X_a \in \mathbf{A}$. Nech a je neizolovaný bod X. Označme Y topologický priestor na množine $((X \setminus \{a\}) \times \{0,1\}) \cup \{a\}$, ktorý je faktorový vzhľadom na zobrazenie $p\colon X \sqcup \coprod_{x \in X \setminus \{a\}} (\{x\} \times S) \to Y$ definované $p(a) = a$, $p(x) = (x,0)$ pre $x \in X \setminus \{a\}$ a $p(x,y) = (x,y)$ pre $(x,y) \in \coprod_{x \in X \setminus \{a\}} (\{x\} \times S)$. Y je faktorový priestor topologického súčtu priestorov z $\mathbf{A}$, teda $Y \in \mathbf{A}$. Nech Z je podpriestor Y na množine $((X \setminus \{a\}) \times \{1\}) \cup \{a\}$. Potom $Z \in \mathbf{A}$ a Z je homeomorfný s X_a. □

Tvrdenie 4.2.6. *Ak* $(A, \mathcal{F}, a)$ *je prvotný priestor a* B *je jeho podpriestor taký, že* $a \in B$*, tak zobrazenie* $f\colon A \to B$ *také, že* $f|_B = id_B$ *a* $f(A \setminus B) = \{a\}$ *je faktorové.*

Dôkaz. Najprv overme spojitosť f. Nech $U \subseteq B$ je otvorená v B. Ak $a \notin U$, tak $f^{-1}(U) = U$ je otvorená v $(A, \mathcal{F}, a)$. Ak $a \in U$, tak $U = V \cap B$, kde V je otvorená v $(A, \mathcal{F}, a)$. Potom $f^{-1}(U) = (A \setminus B) \cup U = (A \setminus B) \cup V$ je otvorená.

Teraz si stačí všimnúť, že f je retrakcia B na A, preto f je faktorové zobrazenie. □

Tvrdenie 4.2.7. *Ak* $\mathbf{A}$ *je netriviálna koreflektívna podkategória kategórie* **Top** *a* $\mathbf{K}$ *je trieda všetkých prvotných faktorov prvkov* $\mathbf{A}$*, tak koreflektívny obal* $\mathrm{CH}(\mathbf{K})$ *kategórie* $\mathbf{K}$ *v* **Top** *je dedičný koreflektívny obal* $\mathbf{A}$.

Dôkaz. Chceme ukázať, že $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathrm{CH}(\mathbf{K})$. Keďže $\mathrm{S}\mathbf{A}$ je koreflektívna a $\mathbf{K} \subseteq \mathrm{S}\mathbf{A}$, stačí ukázať $\mathrm{S}\mathbf{A} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{K})$. Každý priestor z $\mathbf{A}$ možno získať ako faktorový priestor topologického súčtu jeho prvotných faktorov. Prvotné faktory podpriestorov možno získať podľa tvrdenia 4.2.6 ako faktorové priestory priestorov z $\mathbf{K}$. □

Dôsledok 4.2.3. *Netriviálna koreflektívna podkategória* $\mathbf{A}$ *kategórie* **Top** *je dedičná práve vtedy, keď pre každé* $X \in \mathbf{A}$ *všetky prvotné faktory* X *patria do* $\mathbf{A}$ *(t.j.* $\mathbf{A}$ *je uzavretá na tvorbu prvotných faktorov).*

Tvrdenie 4.2.8. *Netriviálna dedičná koreflektívna podkategória* $\mathbf{A}$ *kategórie* **Top** *je generovaná triedou prvotných priestorov.*

Dôkaz. Stačí zobrať všetky prvotné faktory priestorov z $\mathbf{A}$. □

Lema 4.2.3. *Nech* X *je ľubovoľný topologický priestor a* $\mathbf{H}$ *je trieda všetkých hausdorffovských prvotných faktorov podpriestorov* X*. Nech* $\mathbf{K} = \mathbf{H} \cup \{S\}$*, kde* S *je Sierpińského priestor. Potom* $X \in \mathrm{CH}(\mathbf{K})$.

Dôkaz. Stačí ukázať, že do $\mathrm{CH}(\mathbf{K})$ patria všetky prvotné faktory priestoru X. Ak sú všetky prvotné faktory hausdorffovské, tak je to triviálne.

Nech teda $(X_a, \mathcal{T}_a)$ je nehausdorffovský prvotný faktor priestoru $(X, \mathcal{T})$. Označme $A = \cap\{U \in \mathcal{T} | a \in U\}$ prienik všetkých okolí bodu a. Nech $Y = (X \setminus A) \cup \{a\}$. Potom prvotný faktor $(Y_a, \mathcal{T}'_a)$ podpriestoru Y je už zrejme hausdorffovský, čiže $Y_a \in \mathbf{K}$.

Definujme na A topológiu $\mathcal{S}$ tak, že $V \in \mathcal{S} \Leftrightarrow a \notin V \vee V = A$. $(A, \mathcal{S})$ je konečne generovaný, preto $A \in \mathbf{K}$. (Konečne generované priestory sú totiž koreflektívnym obalom Sierpińského priestoru - pozri napríklad v [7].) Na X vytvorme topológiu $\mathcal{T}'$ faktorovú vzhľadom na zobrazenie $f\colon (Y_a, \mathcal{T}'_a) \sqcup (A, \mathcal{S}) \to X$, $f = [id_Y, id_A]$. Tvrdíme, že $(X, \mathcal{T}') = (X_a, \mathcal{T}_a)$.

V oboch topológiách je otvorená každá množina, ktorá neobsahuje a, stačí sa teda zaoberať množinami, ktoré ho obsahujú. Otvorená množina V v $\mathcal{T}$' obsahujúca a je tvaru $U \cup A$, kde U je otvorená množina v $\mathcal{T}'_a$ obsahujúca a. U potom musí byť prienik množiny otvorenej v $\mathcal{T}$ s Y. Každá takáto množina musí však obsahovať celé A, čiže $V = U \cup A$ je otvorená v $\mathcal{T}$. Naopak, ak V je otvorená v $\mathcal{T}$, tak za U možno zvoliť $V \cap Y$. □

Dôsledok 4.2.4. *Nech* $\mathbf{A}$ *je netriviálna koreflektívna podkategória kategórie* **Top** *a* $\mathbf{H}$ *je trieda všetkých hausdorffovských prvotných faktorov prvkov* $\mathrm{S}\mathbf{A}$*. Označme* $\mathbf{K} = \mathbf{H} \cup \{S\}$*. Potom koreflektívny obal* $\mathrm{CH}(\mathbf{K})$ *kategórie* $\mathbf{K}$ *v* **Top** *je dedičný koreflektívny obal* $\mathbf{A}$.

Dôkaz. Podľa tvrdenia 4.2.7 stačí ukázať, že CH($\mathbf{K}$) obsahuje všetky prvotné faktory prvkov z $\mathbf{A}$. To je však zaručené lemou 4.2.3. $\square$

Keďže sme ukázali, že dedičné podkategórie **Top** sa dajú vygenerovať pomocou hausdorffovských priestorov a Sierpińského priestoru, tak spolu s tvrdením 3.5.1 máme, že existuje jednojednoznačná korešpondencia medzi netriviálnymi dedičnými koreflektívnymi podkategóriami v **Top** a **Haus**.

Dôsledok 4.2.5. *Ak* $\mathbf{A}$ *je dedičná trieda topologických priestorov taká, že aj* $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ *je dedičná a* $\mathbf{FG} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{A})$*, tak* $\mathrm{CH}(\mathbf{A}) = \mathrm{CH}(\mathbf{K})$*, kde* $\mathbf{K} = \mathbf{H} \cup \{S\}$ *a* $\mathbf{H}$ *je trieda všetkých hausdorffovských prvotných faktorov priestorov z* $\mathbf{A}$*.*

Dôkaz. Podľa lemy 4.2.3 do CH($\mathbf{K}$) patria všetky prvotné faktory prvkov z $\mathbf{A}$. Preto $\mathrm{CH}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{K})$.

Opačná inklúzia vyplýva z toho, že CH($\mathbf{A}$) je netriviálna dedičná koreflektívna podkategória **Top**, teda podľa tvrdenia 4.2.5 je uzavretá vzhľadom na tvorenie prvotných faktorov. $\square$

Poznamenajme, že hausdorffovské prvotné priestory, pomocou ktorých sme charakterizovali netriviálne dedičné podkategórie v **Top** sú práve tie hausdorffovské priestory, v ktorých je každá množina buď uzavretá alebo otvorená. (Je to uvedené napríklad v [6].)

4.3 Jednoducho generované dedičné kategórie

Je zrejmé, že koreflektívna kategória, ktorá je jednoducho generovaná, musí byť podkategóriou $\mathbf{Gen}(\alpha)$, pre nejaké kardinálne číslo α. Či to však platí aj naopak už vôbec nie je jasné. V tejto časti ukážeme, že aspoň pre dedičné koreflektívne podkategórie **Top** a uzavreto dedičné koreflektívne podkategórie **Haus** to platí.

Lema 4.3.1. *Nech kategória* $\mathbf{C}$ *má kosúčiny, je lokálne malá, (epi,ex-mono)-kategória a (ex-epi,mono)-kategória a nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ *sú plné podkategórie. Nech* $\mathbf{A}$ *je koreflektívna a uzavretá na extrémne podobjekty. Nech* $\mathbf{B}$ *je uzavretá na kvocienty a platí* $\mathbf{A} \subseteq \mathrm{CH}(\mathbf{B})$*. Potom* $\mathbf{A} = \mathrm{CH}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$*.*

Dôkaz. Všimnime si najprv, že kategória $\mathbf{C}$ spĺňa predpoklady vety 3.3.1, čiže má zmysel hovoriť o koreflektívnom obale a tento obal je charakterizovaný vetou 3.3.2.

Inklúzia $\supseteq$ vyplýva z toho, že $\mathbf{A}$ je koreflektívna podkategória $\mathbf{C}$. Ukážeme, že platí aj opačná inklúzia.

Nech $A \in \mathbf{A}$. Potom $A \in \mathrm{CH}(\mathbf{B})$, t.j. A je extrémnym kvocientom kosúčinu prvkov z $\mathbf{B}$. Označme $q\colon \coprod B_\alpha \to A$ príslušný extrémny epimorfizmus. Označme $i_\alpha\colon B_\alpha \to \coprod B_\alpha$ injekcie a $q_\alpha := q \circ i_\alpha$. Nech $q_\alpha = p_\alpha \circ f_\alpha$ je (epi,ex-mono)-faktorizácia q_α, $f_\alpha\colon B_\alpha \to A_\alpha$, $p_\alpha\colon A_\alpha \to A$. Potom $A_\alpha \in \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$, lebo $\mathbf{B}$ je uzavretá na kvocienty a $\mathbf{A}$ je uzavretá na extrémne podobjekty. Nech $\coprod A_\alpha$ je kosúčin s injekciami $j_\alpha\colon A_\alpha \to \coprod A_\alpha$. Nech $p = [p_\alpha]$, t.j. $p\colon \coprod A_\alpha \to A$ je jediný morfizmus taký, že $p \circ j_\alpha = p_\alpha$. Ďalej $p = m \circ e$ označme (ex-epi,mono)-faktorizáciu p.

$$\begin{tikzcd}
B_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dd, "f_\alpha"'] & \coprod B_\alpha \arrow[dd, "\coprod f_\alpha"'] \arrow[dr, "q"] & \\
 & & A \\
A_\alpha \arrow[r, "j_\alpha"'] & \coprod A_\alpha \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "e"'] & {} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Potom máme $q = m \circ (e \circ \coprod f_\alpha)$. Z definície extrémneho epimorfizmu vyplýva, že m je izomorfizmus, teda $p = m \circ e$ je tiež extrémny epimorfizmus. To znamená, že A je extrémny kvocient kosúčinu objektov z $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, teda $A \in \mathrm{CH}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$. □

Tvrdenie 4.3.1. *Ak* $\mathbf{A}$ *je koreflektívna podkategória* **Top** *uzavretá na podpriestory a existuje* α *také, že* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Gen}(\alpha)$, *tak* $\mathbf{A}$ *je jednoducho generovaná.*

Dôkaz. Ak položíme za $\mathbf{B}$ v predchádzajúcej leme triedu všetkých priestorov kardinality nanajvýš α, tak dostaneme, že $\mathbf{A}$ je koreflektívny obal priestorov z $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Z nich môžeme vybrať reprezentatívnu množinu a topologický súčet tejto množiny priestorov bude extrémnym generátorom kategórie $\mathbf{A}$. □

Tvrdenie 4.3.2. *Ak* $\mathbf{A}$ *je koreflektívna podkategória* **Haus** *uzavretá vzhľadom na uzavreté podpriestory a existuje* α *také, že* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Gen}(\alpha) \cap \mathbf{Haus}$, *tak* $\mathbf{A}$ *je jednoducho generovaná.*

Dôkaz. V tomto prípade je postup analogický, ale za $\mathbf{B}$ treba zvoliť triedu všetkých hausdorffovských priestorov obsahujúcich hustú podmnožinu kardinality najviac α. Pretože hustá množina sa spojitým surjektívnym zobrazením zobrazí na hustú množinu, je táto trieda priestorov uzavretá na **Haus**-epimorfizmy.

Ešte potrebujeme overiť, či pre túto triedu existuje reprezentatívna množina topologických priestorov. V hausdorffovských priestoroch platí, že ak priestor obsahuje hustú množinu kardinality najviac α, tak kardinalita celého priestoru je najviac 2^{2^α}. Pretože sme našli horný odhad na kardinalitu, možno skutočne takúto reprezentatívnu množinu skonštruovať. □

4.4 α-subsekvenciálne priestory

Definícia 4.4.1. Nech α je nekonečné regulárne kardinálne číslo. Topologický priestor sa nazýva α-*subsekvenciálny*, ak existuje α-sekvenciálny priestor Y taký, že $X \subseteq Y$ je topologický podpriestor. Kategóriu α-subsekvenciálnych priestorov budeme značiť $\mathbf{SSeq}(\alpha)$. ω_0-subsekvenciálne priestory nazývame *subsekvenciálne* a kategóriu subsekvenciálnych priestorov značíme **SSeq**.

Z tvrdenia 4.2.1 a z toho, že α-sekvenciálne priestory tvoria koreflektívnu podkategóriu **Top** vyplýva:

Tvrdenie 4.4.1. $\mathbf{SSeq}(\alpha)$ *je koreflektívna podkategória* **Top**.

Je zrejmé, že tiež platí:

Tvrdenie 4.4.2. *Kategória α-subsekvenciálnych podpriestorov je dedičná.*

Lema 4.4.1. *Tesnosť podpriestoru je menšia alebo sa rovná tesnosti celého priestoru.*

Dôkaz. Nech $X \subseteq Y$ je topologický podpriestor priestoru Y a Y má tesnosť α. Ak $a \in \overline{A}$ v X, tak aj $a \in \overline{A}$ v Y. Potom existuje $B \subseteq A$ taká, že $\operatorname{card} B \leq \alpha$ a $a \in \overline{B}^Y$. Ale uzáver množiny B v X je $\overline{B}^Y \cap X$, čo znamená, že $a \in \overline{B}^X$. □

Dôsledok 4.4.1. *Kategória* $\mathbf{Gen}(\alpha)$ *je dedičná.*

Dôkaz. Vyplýva z tvrdenia 3.4.1 a predchádzajúcej lemy. □

Tvrdenie 4.4.3. $\mathbf{SSeq}(\alpha) \subseteq \mathbf{Gen}(\alpha)$

Dôkaz. Vyplýva z tvrdenia 3.4.6 a predchádzajúceho dôsledku. □

Z tvrdenia 4.3.1 vyplýva, že kategória $\mathbf{SSeq}(\alpha)$ je jednoducho generovaná. My zostrojíme dokonca extrémny generátor kardinality α. Ide o zovšeobecnenie analogického výsledku z [6] pre subsekvenciálne priestory.

α-sekvenciálnym uzáverom budeme rozumieť podobný operátor uzáveru, aký sme už zaviedli pre $\mathbb{P}$-pseudoradiálne priestory. V tomto prípade je $\mathbb{P} = \{\alpha\}$.
$A_0 = A$
$A_{\beta+1} = (A_\beta)_1$ a
$A_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$, ak β je limitný ordinál, pričom
$A_1 = \{x \in X :$ existuje α-postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ v A, ktorá konverguje k $x\}$.
$\tilde{A} = \bigcup_{\beta\in \mathrm{On}} A_\beta$

V ďalšom budeme stále pracovať s ω_α-sekvenciálnymi a ω_α-subsekvenciálnymi priestormi pre nejaké nekonečné kardinálne číslo ω_α. Aj A_β bude vždy predstavovať iteráciu ω_α-sekvenciálneho uzáveru.

Tvrdenie 4.4.4. *Ak ω_α je nekonečné kardinálne číslo a X je ω_α-sekvenciálny, tak pre každé $A \subset X$ platí: $\overline{A} = A_{\omega_{\alpha+1}}$.*

Dôkaz. Inklúzia $\supseteq$ platí pre ľubovoľnú iteráciu ω_α-sekvenciálneho uzáveru. Predpokladajme, že opačná inklúzia neplatí. Potom $\overline{A} \setminus A_{\omega_{\alpha+1}} \neq \emptyset$, z čoho vyplýva $(A_{\omega_{\alpha+1}})_1 \setminus A_{\omega_{\alpha+1}} \neq \emptyset$. Musí teda existovať ω_α-postupnosť prvkov z $A_{\omega_{\alpha+1}}$ konvergujúca k prvku $x \notin A_{\omega_{\alpha+1}}$. Označme takúto postupnosť $(x_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$. Pre každé ξ definujeme $\beta_\xi = \min\{\beta \leq \omega_\alpha \colon x_\xi \in A_\beta\}$, t.j. β_ξ označíme ordinálne číslo také, že x_ξ sa po prvýkrát vyskytne v iterácii A_{β_ξ} ω_α-sekvenciálneho uzáveru množiny A. Potom musí platiť $\sup \beta_\xi = \omega_{\alpha+1}$, ak by totiž platilo $\beta = \sup \beta_\xi < \omega_{\alpha+1}$, tak by $x_\xi \in A_\beta$ pre všetky ξ a potom by $x \in A_{\omega_{\alpha+1}}$. Navyše tiež platí $\beta_\xi < \omega_{\alpha+1}$, lebo pre limitné ordinály je A_β definované ako zjednotenie predchádzajúcich iterácií, preto každý prvok z $A_{\omega_{\alpha+1}}$ sa musel vyskytnúť už v nejakej nižšej iterácii. To ale znamená, že $\omega_{\alpha+1} = \cup\beta_\xi$ vyjadruje množinu kardinality $\omega_{\alpha+1}$ ako zjednotenie ω_α množín menšej kardinality, čo je spor s tým, že $\omega_{\alpha+1}$ je pre každý ordinál α regulárne kardinálne číslo. (Tvrdenie 2.2.3.) □

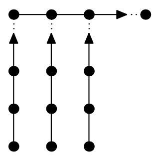
Dôsledok 4.4.2. *V ω_α-sekvenciálnom priestore platí $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje ordinál $\beta < \omega_{\alpha+1}$ taký, že $x \in A_\beta$.*

Pripomeňme, ako sme definovali priestor $C(\omega_\alpha)$, ktorý bol generátorom koreflektívnej podkategórie ω_α-sekvenciálnych priestorov. Bol to priestor na množine $\omega_\alpha \cup \{\omega_\alpha\}$, v ktorom okolia bodu ω_α boli množiny, ktorých doplnky mali kardinalitu menšiu ako ω_α a všetky ostatné body boli izolované. Bod $\omega_\alpha \in C(\omega_\alpha)$ budeme nazývať *bodom rádu 0* priestoru $C(\omega_\alpha)$.

Pri hľadaní generátorov kategórie $\mathbf{SSeq}(\omega_\alpha)$ využijeme pojem ω_α-sekvenciálnej sumy, ktorá je zovšeobecnením sekvenciálnej sumy z [2]. Pod priestorom s význačným bodom budeme rozumieť dvojicu (X, x), kde X je topologický priestor a $x \in X$.

ω_α-sekvenciálnou sumou ω_α-postupnosti $(X_\xi, x_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$ priestorov s význačnými bodmi budeme nazývať priestor $\sum\langle X_\xi, x_\xi\rangle := C(\omega_\alpha) \cup_f (\coprod X_\xi)$, kde zobrazenie $f\colon \{x_\xi : \xi < \omega_\alpha\} \to C(\omega_\alpha)$ zobrazuje x_ξ na $\xi \in C(\omega_\alpha)$. Bod $\omega_\alpha \in C(\omega_\alpha)$ sa nazýva *bod rádu* 0 ω_α-sekvenciálnej sumy. Body zodpovedajúce bodom z $C(\omega_\alpha)$ budeme označovať priamo ordinálmi z $\omega_\alpha \cup \{\omega_\alpha\}$ a budeme ich nazývať *bodmi rádu* 1 ω_α-sekvenciálnej sumy. Ostatné body budeme označovať prvkami z $X_\xi \setminus \{x_\xi\}$. To znamená, že ω_α-sekvenciálnu sumu chápeme ako priestor na množine $\bigcup_{\xi<\omega_\alpha}(X_\xi \setminus \{x_\xi\}) \cup \omega_\alpha \cup \{\omega_\alpha\}$, pričom predpokladáme, že všetky uvedené množiny sú disjunktné. Keďže podpriestor na množine $X'_\xi = X_\xi \setminus \{x_\xi\} \cup \{\xi\}$ ω_α-sekvenciálnej sumy je homeomorfný s X_ξ, budeme ho často (kvôli zjednodušeniu označenia) označovať priamo X_ξ.

Nasledujúci obrázok znázorňuje ω_0-sekvenciálnu sumu ω_0 kópií priestoru $C(\omega_0)$.



Priamo z definície je zrejmá platnosť tejto lemy:

Lema 4.4.2. *Množina $U \subset \sum\langle X_\xi, x_\xi\rangle$ je otvorená (uzavretá) práve vtedy, keď pre všetky $\xi < \omega_\alpha$ je $U \cap X_\xi$ otvorená (uzavretá) v X_ξ a $U \cap C(\omega_\alpha)$ je otvorená (uzavretá) v $C(\omega_\alpha)$.*

Ak $f_\xi\colon X_\xi \to Y_\xi$, $\xi < \omega_\alpha$ sú zobrazenia, tak tieto zobrazenia prirodzeným spôsobom určujú zobrazenie $f = \sum f_\xi\colon \sum\langle X_\xi, x_\xi\rangle \to \sum\langle Y_\xi, f(x_\xi)\rangle$. Toto zobrazenie je dané vzťahmi $f|_{X_\xi\setminus\{x_\xi\}} = f_\xi|_{X_\xi\setminus\{x_\xi\}}$ a $f|_{C(\omega_\alpha)} = id_{C(\omega_\alpha)}$. Teda $\sum f_\xi$ na každom X_ξ (resp. X'_ξ) splýva s f_ξ.

Lema 4.4.3. *Nech $f_\xi\colon X_\xi \to Y_\xi$, $\xi < \omega_\alpha$ sú zobrazenia. Ak všetky f_ξ sú spojité, tak aj $\sum f_\xi$ je spojité. Ak všetky f_ξ sú vloženia, tak aj $\sum f_\xi$ je vloženie. Ak všetky f_ξ sú faktorové, tak aj $\sum f_\xi$ je faktorové.*

Dôkaz. Označme $f = \sum f_\xi$, $X = \sum X_\xi$, $Y = \sum Y_\xi$. Nech $V \subseteq \sum Y_\xi$ je uzavretá. To znamená, že $V \cap Y_\xi$ aj $V \cap C(\omega_\alpha)$ sú uzavreté v Y. Potom $f^{-1}(V) \cap X_\xi = f_\xi^{-1}(V \cap Y_\xi)$ je uzavretá aj $f^{-1}(V) \cap C(\omega_\alpha) = V \cap C(\omega_\alpha)$ je uzavretá, čo je podľa predchádzajúcej lemy ekvivalentné s uzavretosťou $f^{-1}(V)$ v X.

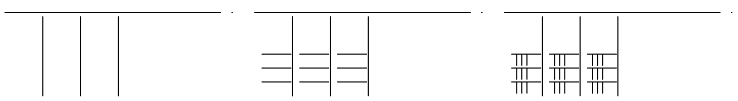
Aby sme overili, že f je vloženie, overíme, že obraz otvorenej množiny je otvorená množina v $f[X]$. Ak $V \subseteq X$ je otvorená, tak $f[V] \cap Y_\xi = f_\xi[V \cap X_\xi]$ je obraz otvorenej množiny vo vložení $f_\xi \colon X_\xi \hookrightarrow Y_\xi$, preto existuje otvorená podmnožina $W_\xi \subseteq Y_\xi$ taká, že $f[V] \cap Y_\xi = W_\xi \cap f_\xi[X_\xi]$. Tiež $f[V] \cap C(\omega_\alpha) = V \cap C(\omega_\alpha) =: W$ je otvorená. Potom $W' := W \cup (\bigcup_{\xi < \omega_\alpha} W_\xi)$ je otvorená v Y, lebo prienik s Y_ξ je buď otvorená množina W_ξ alebo prázdna množina a takisto prienik s $C(\omega_\alpha)$ je nadmnožina otvorenej množiny W. Pritom platí $f[V] = W' \cap f[X]$, čo znamená, že $f[V]$ je otvorená v $f[X]$.

Teraz predpokladajme, že všetky f_ξ sú faktorové a $f^{-1}(V)$ je uzavretá v X. Z tejto podmienky vyplýva, že $f^{-1}(V) \cap X_\xi = f_\xi^{-1}(V \cap Y_\xi)$ a $f^{-1}(V) \cap C(\omega_\alpha) = V \cap C(\omega_\alpha)$ sú uzavreté. Potom aj $V \cap Y_\xi$ a $V \cap C(\omega_\alpha)$ sú uzavreté, a teda V je uzavretá. Tiež je zrejmé, že f je surjektívne. □

Transfinitnou indukciou definujeme pre každé ordinálne číslo γ systém priestorov TS_γ. $TS_1 = \{C(\omega_\alpha)\}$. Pre nelimitný ordinál γ TS_γ pozostáva zo všetkých ω_α-sekvenciálnych súm priestorov z $TS_{\gamma-1}$ a pre limitné ordinály TS_γ pozostáva zo všetkých ω_α-sekvenciálnych súm, kde každý sčítanec patrí do TS_{γ_i} a $\gamma = \sup\{\gamma_i\}$, pričom sa sekvenciálna suma robí v oboch prípadoch cez body rádu 0.

Keďže TS_γ sme získali iterovaním ω_α-sekvenciálnej sumy z $C(\omega_\alpha)$, všetky priestory z TS_γ sú faktorové priestory topologického súčtu kópií $C(\omega_\alpha)$. To znamená, že $TS_\gamma \subseteq \mathbf{SSeq}(\omega_\alpha)$.

Nasledujúci obrázok predstavuje jediné priestory z TS_1, TS_2 a TS_3. (Plné čiary predstavujú ω_α-postupnosti.)



Lema 4.4.4. *Ak $p \in M_\beta \setminus M_\gamma$ pre všetky $\gamma < \beta$, tak existuje priestor $S_\beta \in TS_\beta$ a spojité zobrazenie $f \colon S_\beta \to X$, ktoré zobrazí všetky izolované body S_β do M a jedine bod rádu 0 zobrazí na p.*

Dôkaz. Pre $\beta = 1$ vyplýva tvrdenie priamo z definície limity transfinitnej postupnosti, hľadané spojité zobrazenie $f \colon C(\omega_\alpha) \to X$ je $f \colon \xi \mapsto x_\xi$, $f \colon \omega_\alpha \mapsto p$. Pretože $p \notin M_0 = M$, tak žiadne $\xi < \omega_\alpha$ sa nemôže zobraziť na p. Pretože f je očividne ω_α-sekvenciálne spojité, tak podľa tvrdenia 3.4.4 musí byť spojité.

Ak $p \in M_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma$, tak z definície ω_α-sekvenciálneho uzáveru je zrejmé, že β nie je limitný ordinál. p je potom limita nejakej ω_α-postupnosti (a_η), kde $a_\eta \in M_{\beta-1}$.

Rozlíšme dva prípady. Nech $\beta-1$ je nelimitný ordinál. Určite existuje $\eta_0 \in \omega_\alpha$ také, že pre $\eta > \eta_0$ platí $a_\eta \in M_{\beta-1} \setminus M_{\beta-2}$. V opačnom prípade by sme totiž mohli zostrojiť ω_α-postupnosť konvergujúcu k p z bodov $M_{\beta-2}$ a platilo by $p \in M_{\beta-1}$. Ak položíme $a'_\eta = a_{\eta_0}$ pre $\eta < \eta_0$, tak dostaneme ω_α postupnosť a'_η

konvergujúcu k p, pre ktorú navyše platí $a'_\eta \in M_{\beta-1} \setminus M_{\beta-2}$. Podľa indukčného predpokladu existuje spojité zobrazenie $f_\eta\colon X_\eta \to X$ pre nejaké $X_\eta \in TS_{\beta-1}$ také, že f_η zobrazí jedine bod rádu 0 priestoru X_η na bod a'_η a všetky izolované body zobrazí do M.

Ak $\beta-1$ je limitný ordinál, tak z podobných dôvodov musí existovať ω_α-postupnosť γ_η taká, že $\sup\gamma_\eta = \beta - 1$ a $a_\eta \in M_{\gamma_\eta} \setminus \bigcup_{\gamma<\gamma_\eta} M_\gamma$. Takže aj v tomto prípade máme spojité zobrazenie $f_\eta\colon X_\eta \to X$, kde $X_\eta \in TS_{\gamma_\eta}$ a f_η má tie isté vlastnosti.

V oboch prípadoch máme teda zobrazenie $f\colon \sum\langle X_\eta, x_\eta\rangle \to X$, určené tým, že $f|_{X_\eta} = f_\eta$ a $f(\omega_\alpha) = p$ a platí $\sum\langle X_\eta, x_\eta\rangle \in TS_\beta$. Žiadne zo zobrazení f_η nemôže vo svojom obraze obsahovať bod p, lebo vtedy by $p \in M_{\gamma_\eta}$ alebo $p \in M_{\beta-1}$. Takisto každé f_η zobrazuje izolované body priestorov X_η (ktoré sú súčasne izolovanými bodmi ω_α-sekvenciálnej sumy) do M. Treba preto už len overiť spojitosť tohto zobrazenia.

$\sum\langle X_\eta, x_\eta\rangle$ je faktorový priestor priestoru $C(\omega_\alpha) \sqcup \coprod_{\eta<\omega_\alpha} X_\eta$. Označme q kanonickú projekciu. Potom f je spojité práve vtedy, keď $f\circ q$ je spojité. Pritom $f|_{X_\eta} = f_\eta$ sú spojité a $f|_C(\omega_\alpha)$ je ω_α-sekvenciálne spojité, a teda podľa tvrdenia 3.4.4 spojité. □

Pre $S_\gamma \in TS_\gamma$ označme T_γ podpriestor S_γ pozostávajúci z jeho bodu rádu 0 a všetkých izolovaných bodov. TSS_γ označme triedu všetkých T_γ vytvorených z $S_\gamma \in TS_\gamma$.

Lema 4.4.5. *Ak $p \in M_\beta$ a $p \notin M_\gamma$ pre ľubovoľné $\gamma < \beta$, tak existuje priestor $T_\beta \in TSS_\beta$ a spojité zobrazenie $f\colon T_\beta \to X$, ktoré zobrazí všetky izolované body T_β do M a iba bod rádu 0 na p.*

Dôkaz. Táto lema je dôsledkom lemy 4.4.4. □

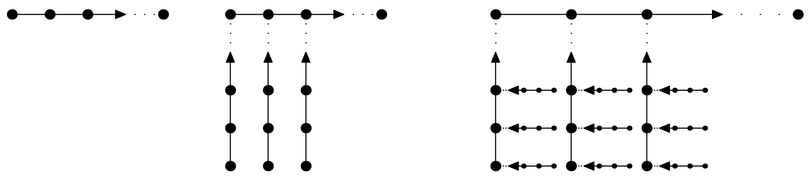
Veta 4.4.1. *Trieda priestorov $\bigcup\limits_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} TSS_\gamma$ generuje koreflektívnu podkategóriu ω_α-subsekvenciálnych priestorov.*

Dôkaz. Ak X je ω_α-subsekvenciálny priestor, tak $X \subseteq Y$ pre nejaký ω_α-sekvenciálny priestor. Ak $x \in \overline{A}$ v X, tak podľa tvrdenia 4.4.4 $x \in A_{\omega_{\alpha+1}}$ v Y. Podľa lemy 4.4.5 potom existuje spojité zobrazenie f_x z nejakého priestoru P_x patriaceho do TSS_γ pre nejaké $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ do priestoru X. (Izolované body sa zobrazia do $A \subseteq X$ a bod x tiež patrí do X). Takto získame zobrazenia $f_x\colon P_x \to X$ pre každú podmnožinu $A \subset X$ a každé $x \in \overline{A} \setminus A$, kde všetky P_x sú prvotné priestory a izolovaný bod sa zobrazuje na x. Ak ešte pridáme pre každý izolovaný bod priestoru X zobrazenie z jednoprvkového priestoru na tento bod, tvrdíme, že tieto zobrazenia určujú faktorové zobrazenie $f = [f_x]\colon \coprod P_x \to X$. Surjektívnosť zaručí to, že neizolované body patria do uzáveru svojho doplnku. Ak pre množinu V platí, že $f^{-1}(V)$ je uzavretá v každom P_x, treba ukázať, že V je potom uzavretá. Nech by to tak nebolo. Potom by existovalo $x \in \overline{V} \setminus V$, teda aj jemu prislúchajúce spojité zobrazenie f_x, lenže potom aj $f_x^{-1}(V)$ by musela byť uzavretá, teda by musela obsahovať aj neizolovaný bod priestoru P_x. To je spor s predpokladom, že $x \notin V$. □

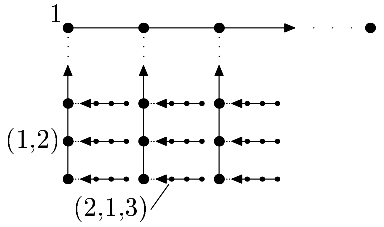
Táto trieda priestorov generujúca $\mathbf{SSeq}(\omega_\alpha)$ nám umožní zostrojiť generátor kardinality ω_α. Všimnime si, že všetky priestory z TSS_γ sú prvotné priestory.

Teraz skonštruujeme priestor S_ω rovnakým spôsobom ako v [2], ibaže použijeme ω_α-sekvenciálnu sumu. Najprv indukciou definujeme priestory S_n pre $n \in \mathbb{N}$ tak, že položíme $S_1 = C(\omega_\alpha)$ a $S_{n+1} = \sum \langle \{\xi\} \times S_n, (\xi, \omega_\alpha) \rangle$.

Nasledujúci obrázok predstavuje priestory S_1, S_2, S_3.



To znamená S_{n+1} je ω_α-sekvenciálna suma ω_α kópií priestoru S_n, pričom sa suma robí cez body rádu 0 týchto kópií. Kvôli zjednodušeniu označenia (a tiež kvôli tomu, aby priestory, z ktorých robíme ω_α-sekvenciálnu sumu boli navzájom disjunktné) sme však pridali do každej kópie ešte prvú zložku ξ, identifikujúcu do ktorej kópie priestoru S_n tento bod patrí.



S_2 obsahuje S_1 a ostatné body z S_2 sú tvaru $(\alpha, \beta) \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$. (Postupnosť pozostávajúcu z bodov rádu 0 stotožňujeme podľa dohody spomínanej pri zavedení ω_α-sekvenciálnej sumy ordinálmi z $\omega_\alpha \cup \{\omega_\alpha\}$, preto platí $S_1 \subset S_2$.) Ďalej S_3 obsahuje prvky z S_1 a S_2 a prvky tvaru $(\alpha, (\beta, \gamma)) = (\alpha, \beta, \gamma)$, čiže body z $S_3 \setminus S_2$ môžeme interpretovať ako trojice prvkov z ω_α. Analogicky body z $S_{n+1} \setminus S_n$ sú $(n+1)$-tice prvkov z ω_α. Opäť platí inklúzia $S_n \subset S_{n+1}$. Nasledujúca lema hovorí, že nejde iba o podmnožinu, ale o topologický podpriestor.

Lema 4.4.6. *S_n je topologický podpriestor S_{n+1}.*

Dôkaz. Priamo z definície ω_α-sekvenciálnej sumy máme, že S_1 je topologický podpriestor S_2. Overíme platnosť tejto vlastnosti pre $n > 1$. Ak $id_{S_{n-1}} : S_{n-1} \hookrightarrow S_n$ je vloženie, tak podľa lemy 4.4.3 aj $\sum id_{\{\xi\} \times S_n} : S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ je vloženie. Potrebné je len overiť, či platí $\sum id_{\{\xi\} \times S_n} = id_{S_n}$. Podľa definície ω_α-sekvenciálnej sumy zobrazení platí $\sum id_{\{\xi\} \times S_n}|_{C(\omega_\alpha)} = id_{C(\omega_\alpha)}$. Ostatné body S_n sú body tvaru (ξ, η), kde $\eta \in S_{n-1}$. Pre ne platí $\sum id_{\{\xi\} \times S_n}(\xi, \eta) = id_{\{\xi\} \times S_n}(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$. □

Keďže máme postupnosť topologických podpriestorov $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset S_{n+1}$, môžeme definovať induktívnu limitu tohto induktívneho systému a označíme ju S_ω. Vloženia φ_n^k z definície induktívnej limity sú v našom prípade identické zobrazenia, preto S_ω môžeme chápať ako priestor na množine $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, pričom podmnožina $U \subset S_\omega$ bude otvorená (uzavretá) práve vtedy, keď je pre každé $n \in \mathbb{N}$ množina $U \cap S_n$ otvorená (uzavretá) v S_n. Pri tejto interpretácii sú body priestoru S_ω konečné postupnosti (n-tice) ordinálov z ω_α, *rádom bodu* patriaceho do S_ω rozumieme dĺžku tejto postupnosti. (Teda body rádu 1 sú prvky z $C(\omega_\alpha) \setminus \{\omega_\alpha\}$ a body rádu $n+1$ pre $n > 1$ sú práve body z $S_{n+1} \setminus S_n$. Inak povedané, S_ω je topologický priestor na množine $\{\omega_\alpha\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_\alpha^n)$ a body rádu n sú prvky z ω_α^n.)

Nasledujúce tvrdenie v podstate hovorí, že S_ω je ω_α-sekvenciálnou sumou ω_α kópií samého seba.

Tvrdenie 4.4.5. $S_\omega = \sum\langle\{\xi\} \times S_\omega, (\xi, \omega_\alpha)\rangle$

Dôkaz. Označme $X := \sum\langle\{\xi\} \times S_\omega, (\xi, \omega_\alpha)\rangle$. Obidve topológie sú definované na tej istej množine, treba ukázať, že otvorené množiny v X aj v S_ω sú tie isté. Podľa lemy 4.4.2 je U otvorená v X práve vtedy, keď $U \cap C(\omega_\alpha)$ je otvorená v $C(\omega_\alpha)$ a $U \cap (\{\xi\} \times S_\omega)$ je otvorená v $\{\xi\} \times S_\omega$ pre každé $\xi < \omega_\alpha$. (Správnejšie by bolo písať $(\{\xi\} \times S_\omega)'$, ale podľa dohody zavedenej pri definícii ω_α-sekvenciálnej sumy tieto priestory môžeme stotožniť.) Otvorenosť $U \cap (\{\xi\} \times S_\omega)$ v $\{\xi\} \times S_\omega$ je ekvivalentná s otvorenosťou $U \cap (\{\xi\} \times S_n)$ v $\{\xi\} \times S_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (lebo $\{\xi\} \times S_\omega$ je induktívna limita $\{\xi\} \times S_n$). Opäť z lemy 4.4.2 máme, že $U \cap C(\omega_\alpha)$ je otvorená v $C(\omega_\alpha)$ a $U \cap (\{\xi\} \times S_n)$ je otvorená v $\{\xi\} \times S_n \Leftrightarrow$ v priestore $\sum(\{\xi\} \times S_n) = S_{n+1}$ je otvorená množina $U \cap S_{n+1}$. Vcelku teda dostávame, že U je otvorená v X práve vtedy, keď $U \cap S_n$ je otvorená v S_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$, čo je ekvivalentné s tým, že U je otvorená v S_ω. $\square$

Lema 4.4.7. $\operatorname{card} S_\omega = \omega_\alpha$.

Dôkaz. $\operatorname{card} S_\omega = \operatorname{card} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n = \omega_0.\omega_\alpha = \omega_\alpha$ $\square$

Lema 4.4.8. *Každý priestor z TS_γ pre $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ je podpriestorom S_ω. Navyše vloženie TS_γ do S_ω možno zvoliť tak, že bod rádu 0 priestoru TS_γ sa zobrazí na bod rádu 0 priestoru S_ω.*

Dôkaz. Transfinitnou indukciou na γ. Z vlastností induktívnej limity máme existenciu vloženia $i_1 \colon C(\omega_\alpha) \hookrightarrow S_\omega$, čím je overená platnosť pre $\gamma = 1$.

Nech $\gamma > 1$ a uvedená vlastnosť platí pre všetky $\beta < \gamma$. Ak $X \in TS_\gamma$, tak $X = \sum X_\xi$, kde $X_\xi \in TS_{\beta_\xi}$ a $\beta_\xi < \xi$ pre každé $\xi < \omega_\alpha$. Podľa indukčného predpokladu máme potom vloženia $i_\xi \colon X_\xi \hookrightarrow S_\omega$ a podľa lemy 4.4.3 aj $\sum i_\xi \colon \sum X_\xi \hookrightarrow \sum S_\omega = S_\omega$ je vloženie. Z definície $\sum i_\xi$ vidíme, že bod rádu 0 sa zobrazí na bod rádu 0. $\square$

Tvrdenie 4.4.6. *Prvotný faktor $(S_\omega)_{\omega_\alpha}$ priestoru S_ω v bode ω_α generuje celú kategóriu* **SSeq**(ω_α). *Tento generátor má kardinalitu ω_α a je prvotný priestor.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že $(S_\omega)_{\omega_\alpha}$ vygeneruje všetky priestory z TSS_γ pre $\gamma < \omega_{\alpha+1}$. Každý priestor z TSS_γ je podpriestorom S_ω a súčasne je prvotný priestor, je teda podpriestorom jeho prvotného faktoru. Keďže neizolovaný bod sa vložením zobrazí na bod ω_α, je podpriestorom prvotného faktoru $(S_\omega)_{\omega_\alpha}$. Podľa lemy 4.2.6 je potom aj faktorovým priestorom tohto prvotného faktoru. $\square$

4.5 Podpriestory pseudoradiálnych priestorov

Ak v definícii $\mathbb{P}$-pseudoradiálnych priestorov (definícia 3.4.4) vezmeme za $\mathbb{P}$ triedu všetkých ordinálnych čísel $\xi \leq \beta$ pre nejaký kardinál β, tak budeme túto kategóriu nazývať *β-pseudoradiálne priestory* a označovať $\mathbf{PsRad}(\beta)$. Kategóriu podpriestorov všetkých β-pseudoradiálnych priestorov budeme označovať $\mathbf{SPsRad}(\beta)$. Vzťah medzi pseudoradiálnymi a β-pseudoradiálnymi priestormi je nasledovný:

Tvrdenie 4.5.1. *Topologický priestor X je pseudoradiálny práve vtedy, keď je β-pseudoradiálny pre nejaké nekonečné kardinálne číslo β. To znamená, že* $\mathbf{PsRad} = \bigcup\limits_{\beta \in \mathrm{Cn}} \mathbf{PsRad}(\beta)$.

Dôkaz. Zrejme každý β-pseudoradiálny priestor je pseudoradiálny.

Naopak, nech X je pseudoradiálny priestor. Označme $\beta := \operatorname{card} X$. Pre každú neuzavretú množinu $A \subseteq X$ existuje $x \in \overline{A} \setminus A$ a transfinitná postupnosť $(a_\xi)_{\xi<\gamma}$ prvkov z A konvergujúca k x. Pre $\eta < \gamma$ označme $\xi_\eta = \sup\{\xi : x_\xi = x_\eta\}$. Ak pre nejaké $\eta < \gamma$ platí $\xi_\eta = \gamma$, tak aj konštantná ω_0-postupnosť obsahujúca prvok x_η konverguje k x. V opačnom prípade je $\xi_\eta < \gamma$ pre všetky $\eta < \gamma$. Množina $B = \{\xi_\eta : \eta < \gamma\}$ je podmnožinou γ, je teda tiež dobre usporiadaná. Navyše je B zrejme neohraničená v γ. Pre každé $b \in B$ vyberieme nejaké $f(b) = x_\eta$ také, že $b = \xi_\eta$. Keďže B je dobre usporiadaná, je izomorfná s nejakým ordinálom α. Preto zobrazenie f možno chápať ako α-postupnosť, ktorá je navyše prostá.

Tvrdíme, že α-postupnosť f konverguje k x. Ak U je ľubovoľné okolie x, tak existuje η_0 také, že pre $\xi > \eta_0$ platí $x_\xi \in U$. Položme $b_0 = \xi_{\eta_0}$. Chceme ukázať, že pre $b > b_0$ je $f(b) \in U$. Ku b sme vybrali η také, že $b = \sup\{\xi : x_\xi = x_\eta\}$. Z vlastností supréma potom existuje také ξ, že $\xi > b_0$ a $x_\xi = x_\eta = f(b)$. Súčasne platí $b_0 \geq \eta_0$, preto $f(b) \in U$.

Získali sme teda prostú α-postupnosť konvergujúcu k x. Podľa lemy 3.4.3 dokonca potom musí existovať takáto prostá postupnosť aj pre nejaký regulárny kardinál α. Z injektívnosti máme $\alpha \leq \operatorname{card}(X) = \beta$. Tým sme ukázali, že X je β-pseudoradiálny. $\square$

Dôsledok 4.5.1. *Topologický priestor X je podpriestorom nejakého pseudoradiálneho priestoru práve vtedy, keď je podpriestorom β-pseudoradiálneho priestoru pre nejaké $\beta \in$* Cn.

Pod *β-pseudoradiálnym uzáverom* množiny A budeme rozumieť najmenšiu nadmnožinu množiny A, ktorá je uzavretá na limity α-postupností pre všetky $\alpha \leq \beta$. Budeme ho označovať $\tilde{A}$. β-pseudoradiálny uzáver je totožný s množinou $\tilde{A}$ definovanou pred tvrdením 3.4.5 pre $\mathbb{P} = \{\xi; \xi \leq \beta\}$, teda ho možno definovať transfinitnou indukciou:
$A_0 = A$
$A_1 = \{x \in X :$ existuje transfinitná postupnosť typu $\alpha \leq \beta$ prvkov z A konvergujúca k $x\}$
$A_{\beta+1} = (A_\beta)_1$

$A_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$, ak β je limitný ordinál.
$\tilde{A} = \bigcup A_\beta$.

Aplikovaním tvrdenia 3.4.5 na náš prípad dostaneme:

Tvrdenie 4.5.2. *Topologický priestor X je β-pseudoradiálny práve vtedy, keď pre každú podmnožinu $A \subseteq X$ platí $\overline{A} = \tilde{A}$.*

Podobne ako pri β-sekvenciálnych priestoroch aj v definícii β-pseudoradiálnych priestorov sa stačí obmedziť na regulárne kardinálne čísla $\xi < \beta$.

Rovnakým spôsobom ako v dôkaze tvrdenia 4.4.4 možno ukázať, že pre β-pseudoradiálny uzáver platí $\tilde{U} = U_{\beta^+}$, kde β^+ je kardinálny nasledovník kardinálneho čísla β.

V tejto časti vyslovíme tvrdenie, ktoré popisuje vzťah medzi $\mathbf{Gen}(\omega_\alpha)$ a $\mathbf{SPsRad}(2^{\omega_\alpha})$. Z neho potom vyplynie, že každý priestor je podpriestorom nejakého pseudoradiálneho priestoru. Tento výsledok bol pre priestory so spočítateľnou tesnosťou publikovaný v [15] za dodatočného množinovo-teoretického predpokladu. Najprv uvedieme niekoľko pomocných tvrdení, ktoré budeme v dôkaze potrebovať.

Tvrdenie 4.5.3 ([5, Theorem 2.3.26]). *Každý T_0-priestor možno vložiť do priestoru $S^{w(X)}$, kde S je Sierpinského priestor a $w(X)$ je najmenšia mohutnosť bázy topológie priestoru X (tzv. váha priestoru X).*

Lema 4.5.1. *Ak A a B sú konečne generované priestory, tak aj $A \times B$ je konečne generovaný.*

Dôkaz. Priestor je konečne generovaný práve vtedy, keď ľubovoľný prienik jeho otvorených množín je otvorená množina (pozri [7]). Nech W_i, $i \in I$ sú otvorené v $A \times B$. Označme $W := \bigcap_{i \in I} W_i$. Stačí ukázať, že každý bod $a \in W$ má otvorené okolie ležiace pod W. Pre každé $i \in I$ platí $a \in W_i$, a preto existujú otvorené podmnožiny $U_i \subseteq A$ a $V_i \subseteq B$také, že $a \in U_i \times V_i \subseteq W_i$. Potom $a \in (\bigcap U_i) \times (\bigcap U_i) = (\bigcap U_i \times V_i) \subseteq W$ a množiny $U = \bigcap U_i$, $V = \bigcap V_i$ sú otvorené v A resp. v B, lebo A aj B sú konečne generované. $\square$

Lema 4.5.2. *Nech β je ľubovoľné nekonečné kardinálne číslo. Priestor S^β je β-pseudoradiálny.*

Dôkaz. Označme izolovaný bod priestoru S 0 a jeho neizolovaný bod 1. Body priestoru S^β sú funkcie $f \colon \beta \to S$ a konvergencia transfinitnej postupnosti v karteziánskom súčine je ekvivalentná s konvergenciou po súradniciach. Všimnime si, že na tých súradniciach, kde $f(\gamma) = 1$, konverguje k f ľubovoľná transfinitná postupnosť.

Nech γ je najmenšie kardinálne číslo také, že S^γ nie je β-pseudoradiálny. Ak ukážeme, že $\gamma > \beta$, tak priestor S^β je β-pseudoradiálny. Postupujme sporom, predpokladajme, že $\gamma \leq \beta$. Podľa predchádzajúcej lemy je $\gamma \geq \omega_0$. Keďže S^γ nie je β-pseudoradiálny, existuje $U \subseteq S^\gamma$ taká, že $\overline{U} \setminus \tilde{U} \neq \emptyset$. ($\tilde{U}$ bude v celom dôkaze označovať β-pseudoradiálny uzáver U.)

Nech $t \in \overline{U} \setminus \tilde{U}$ je ľubovoľný prvok tejto množiny. Označme $A := \{\eta \in \gamma : t(\eta) = 0\}$ a $\varkappa = \operatorname{card} A$. $A \neq \emptyset$, lebo k funkcii $t(\eta) \equiv 1$ konverguje ľubovoľná konštantná postupnosť. Uvažujme podpriestor $K = \{s \in S^\gamma; (\forall \eta \in \gamma \setminus A) s(\eta) = 1\}$. Tento priestor je homeomorfný s priestorom $S^\varkappa$, pričom homeomorfizmus medzi $S^\varkappa$ a K možno zvoliť tak, že zobrazí nulovú funkciu 0 na t.

Zrejme $\varkappa \leq \gamma$. Ak platí $\varkappa < \gamma$, tak K je β-pseudoradiálny. Pre $V = U \cap K$ máme $t \in \overline{V} = \tilde{V}$. (Pod $\tilde{V}$ rozumieme β-pseudoradiálny uzáver V v K.) Keďže všetky prvky z K sa na $\gamma \setminus A$ rovnajú konštantne 1, platí potom aj $t \in \tilde{U}$ pre β-pseudoradiálny uzáver U v S^γ.

Zostáva možnosť $\varkappa = \gamma$. Nech $\varphi \colon S^\gamma \to K$ je homeomorfizmus, ktorý zobrazí 0 na t. Označme

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ 1, & x \geq \xi \end{cases}$$

pre $\xi < \gamma$. $(f_\xi)_{\xi<\gamma}$ je γ-postupnosť prvkov z S^γ, ktorá konverguje k 0. (Otvorené okolia bodu $0 \in S^\gamma$ majú tvar $U_I = \prod_{i \in I} \{0\} \times \prod_{i \notin I} S$ pre nejakú konečnú podmnožinu $I \subset \gamma$. Pre $\xi > \xi_0 = \sup I$ platí $f_\xi \in U_I$ a $\xi_0 = \sup I < \gamma$, lebo I je konečná.) Preto $\varphi(f_\xi) \to t$ v K. Stačí teda ukázať, že $\varphi(f_\xi) \in \tilde{U}$ pre všetky $\xi < \gamma$. Lenže $\operatorname{card}\{\eta \in \gamma : \varphi(f_\xi)(\gamma) = 0\} = \operatorname{card} \xi < \gamma$, čiže sme opäť dostali predchádzajúci prípad.

Dostali sme v oboch prípadoch, že $t \in \tilde{U}$ a súčasne $t \in \overline{U} \setminus \tilde{U}$, čo je spor. □

Tvrdenie 4.5.4. $\mathbf{Gen}(\omega_\alpha) \subseteq \mathbf{SPsRad}(2^{\omega_\alpha})$ *pre každé kardinálne číslo* ω_α.

Dôkaz. Podľa dôsledku 4.2.5 sa $\mathbf{Gen}(\omega_\alpha)$ dá vygenerovať pomocou hausdorffovských prvotných priestorov s kardinalitou najviac ω_α. Nech teda X je prvotný priestor a $\operatorname{card} X \leq \omega_\alpha$. Potrebujeme zistiť, či X patrí do kategórie na pravej strane inklúzie. Podľa tvrdenia 4.5.3 je X podpriestorom priestoru $S^{w(X)}$. Kardinalita bázy topológie priestoru X je zhora odhadnutá maximálnou možnou mohutnosťou topológie na množine X, teda $w(X) \leq 2^{\operatorname{card} X} \leq 2^{\omega_\alpha}$. Položme $\beta = 2^{\omega_\alpha}$. $S^{w(X)}$ je podpriestorom priestoru S^β. Stačí nám preto ukázať, že priestor S^β patrí do kategórie $\mathbf{PsRad}(2^{\omega_\alpha})$. To sme však dokázali v predchádzajúcej leme. □

Dôsledok 4.5.2. *Každý priestor je podpriestorom nejakého pseudoradiálneho priestoru.*

Dôkaz. Každý topologický priestor X patrí do $\mathbf{Gen}(\operatorname{card} X)$. Potom platí $X \in \mathbf{SPsRad}(2^{\operatorname{card} X})$ a podľa dôsledku 4.5.1 je podpriestorom pseudoradiálneho priestoru. □

Literatúra

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker: *Abstract and Concrete Categories*, Willey-Interscience, New York, 1989.

[2] A. V. Archangeľskij, S. P. Franklin: *Ordinal invariants for topological spaces*, Michigan Math. J. **15** (1968), 313–320.

[3] B. Balcar, P. Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, Praha, 1986.

[4] J. Činčura: *Heredity and Coreflective Subcategories of the Category of Topological Spaces*, Applied Categorical Structures **9** (2001), 131–138.

[5] R. Engelking: *General Topology*, PWN, Warsaw, 1977.

[6] S. P. Franklin, M. Rajagopalan: *On subsequential spaces*, Topology and its Applications **35** (1990), 1–19.

[7] H. Herrlich: *Topologische Reflexionen und Coreflexionen*, Springer Verlag, Berlin, 1968.

[8] H. Herrlich, G. Strecker: *Category Theory*, Heldermann, Berlin, 1979.

[9] V. Kannan: *Ordinal invariants in topology*, Memoirs of AMS **245** (1981).

[10] M. Kolibiar a kol.: *Algebra a príbuzné disciplíny*, Alfa, Bratislava, 1992.

[11] J. Nagata: *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[12] P.J. Nyikos: *Convergence in topology* v M. Hušek, J. van Mill (editors): *Recent Progress in General Topology*, Elsevier, Amsterdam, 1992, 538–570.

[13] G. Preuss: *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Pubslishing Company, Dordrecht, 1988.

[14] T. Šalát, J. Smítal: *Teória množín*, UK, Bratislava,1995.

[15] J. Zhou: *On subspaces of pseudo-radial spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **34(3)** (1994), 583–586.

Register

Zoznam použitých symbolov