Dedičnosť, dedičné koreflektívne obaly a ďalšie vlastnosti koreflektívnych podkategórií kategórií topologických priestorov

Martin Sleziak

15. januára 2007

Definícia

Definícia

Podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva *koreflektívna* v **B**, ak pre každý **B**-objekt B existuje **A**-objekt A_B a **B**-morfizmus $c_B\colon A_B \to B$ taký, že pre každý **A**-objekt A a pre každý **B**-morfizmus $f\colon A \to B$ existuje jediný **A**-morfizmus $\overline{f}\colon A \to A_B$ taký, že $c_B \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
B & A_B \arrow[l, "c_B"'] \\
 & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "!\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

Dvojica (c_B, A_B) sa nazýva *koreflexia* objektu B.

Koreflektívne podkategórie = špeciálny prípad adjungovanej situácie.

Topologická charakterizácia

V kategórii **Top** topologických priestorov:
podkategória = trieda topologických priestorov

Trieda **A** topologických priestorov je koreflektívna v **Top** $\Leftrightarrow$ **A** je uzavretá na topologické súčty a faktorové priestory.

Príklady:
Seq = *Sekvenciálne* priestory (uzavreté množiny = uzavreté vzhľadom na limity postupností)
PsRad = *Pseudoradiálne* priestory (transfinitné postupnosti)
CGen = *Kompaktne generované* priestory

Definícia

Reflektívna podkategória = duálny pojem ku koreflektívnej podkategórii

Definícia

Podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva *reflektívna* v **B**, ak pre každý **B**-objekt B existuje **A**-objekt $A_B \in \mathbf{A}$ a **B**-morfizmus $r_B \colon B \to A_B$ taký, že pre každý **A**-objekt A a pre každý **B**-morfizmus $f \colon B \to A$ existuje jediný **A**-morfizmus $\overline{f} \colon A_B \to A$ taký, že $\overline{f} \circ r_B = f$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "f"'] & A_B \arrow[d, dashed, "!\overline{f}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Tichonovova veta

epireflektívna v	uzavretosť na
Top	súčiny a podpriestory
Haus	súčiny a uzavreté podpriestory

Tichonovova veta: Každý kompaktný T_2-priestor je je uzavretým podpriestorom mocniny jednotkového intervalu I.

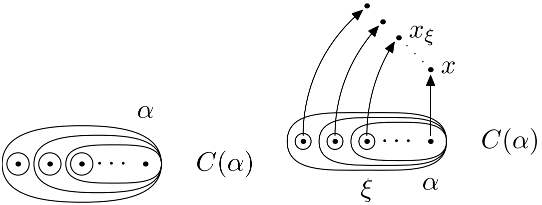
Podkategória $\mathbf{Comp}\,T_2$ je epireflektívna v **Haus**.

Koreflektívny a epireflektívny obal

$\mathrm{CH}(\mathbf{B})$ = koreflektívny obal **B** = najmenšia koreflektívna podkategória obsahujúca **B**
$\mathrm{EH}(\mathbf{B})$ = epireflektívny obal **B** = najmenšia epireflektívna podkategória obsahujúca **B**
Ak **C** je obalom jediného priestoru, tak tento priestor nazývame *generátorom* **C**.
Comp T_2 je epireflektívny obal I v **Haus**.
Seq je koreflektívny obal $C(\omega)$ v **Top**.

Generátor pre sekvenciálne priestory

$C(\omega)$ je priestor na množine $\omega \cup \{\omega\}$, v ktorom jediný neizolovaný bod je ω a bázu okolí tohoto bodu tvoria horné úseky pri obvyklom usporiadaní.

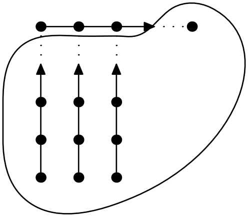


Dedičné koreflektívne podkategórie

Podkategóriu **Top** nazveme *dedičnou*, ak je s každým priestorom obsahuje aj všetky jeho podpriestory.
Dedičná koreflektívna podkategória **Top** = trieda priestorov uzavretá na topologické súčty, faktorové priestory a podpriestory.
A je koreflektívna $\Rightarrow$ S**A** je koreflektívna
(S**A** = všetky podpriestory priestorov z **A**)
Napríklad z podkategórie **Seq** takto dostaneme podkategóriu **SSeq** subsekvenciálnych priestorov.
Subsekvenciálne priestory boli študované v článku [FR].

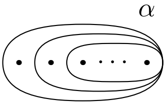
Subsekvenciálne priestory

Nasledujúci príklad ukazuje, že sekvenciálne priestory nie sú dedičné (teda **SSeq** $\neq$ **Seq**).

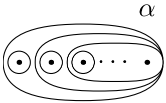


Prvotné priestory

Prvotný priestor = priestor s jediným neizolovaným bodom.
Prvotný faktor priestoru X v bode a = topologický priestor na množine X v ktorom všetky body okrem a sú izolované a a má rovnaké okolia ako v pôvodnej topológii.



$B(\alpha)$

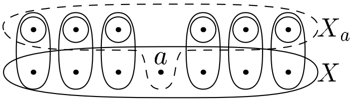


$C(\alpha)$

Charakterizácia pomocou prvotných faktorov

Veta ([Č1, Theorem 3.7])

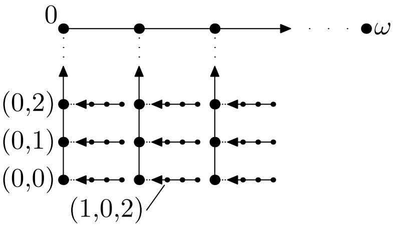
Nech **C** *je koreflektívna podkategória* **Top** *taká, že* **FG** $\subseteq$ **C**. *Podkategória* **C** *je dedičná práve vtedy, keď pre každý priestor* $X \in$ **C** *aj všetky prvotné faktory priestoru* X *patria do* **C** *(***C** *je uzavretá na tvorenie prvotných faktorov).*



Generátor koreflektívnej podkategórie $\mathrm{SCH}(A)$

Využitím výsledkov z [Č1] a zovšeobecnením postupov z [FR] sa nám podarilo skonštruovať priestor, ktorý generuje koreflektívnu podkategóriu $\mathrm{SCH}(A)$.

V špeciálnom prípade $A = C(\omega)$ je to prvotný faktor nasledujúceho priestoru:



Podpriestory pseudoradiálnych priestorov

Veta

Každý topologický priestor je možné vložiť do pseudoradiálneho priestoru.
Každý T_1-priestor sa dá vložiť do pseudoradiálneho T_1-priestoru.

Dôkaz je založený na nasledujúcich 2 výsledkoch:

- Každý topologický priestor sa dá vložiť do S^α.
- Priestor S^α je absolútny retrakt.

Definícia

Priestor C je absolútny retrakt v **Top** ak pre každé vloženie $e\colon C \hookrightarrow X$ existuje retrakcia $r\colon X \to C$, t.j. spojité zobrazenie také, že $r \circ e = id_X$.

Kategória $\mathbf{A} = \mathbf{PsRad}$ má vlastnosť $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$.
Najmenšia koreflektívna podkategória **Top** s touto vlastnosťou je $\mathbf{A}_0 = \mathrm{CH}(\{S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn}\})$

Možné zovšeobecnenia

Ako možné zovšeobecnenia, v prípade, že ako základnú kategóriu vezmeme niektorú epireflektívnu podkategóriu **A** kategórie **Top**, môžeme uvažovať

- dedičné koreflektívne podkategórie **A**
- dedičné, aditívne a divizibilné triedy v **A** (t.j. triedy priestorov uzavreté na súčty, podpriestory a faktorové priestory; stručne ich nazývame HAD-triedy).

HAD-triedy a prvotné faktory

Prípad koreflektívnych podkategórií **A** bol podrobne študovaný v [Č2].

Veta

Ak HAD-trieda **B** *v* **A** *obsahuje prvotný priestor, tak je uzavretá na prvotné faktory.*

Platí to napríklad, ak ak $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Haus}$ alebo ak HAD-trieda **B** obsahuje nediskrétny nularozmerný priestor.

Aplikácie

Lema

Nech **A** *je epireflektívna podkategória kategórie* **Top** *taká, že* $I_2 \notin \mathbf{A}$*. Ak* A *je prvotný priestor a* $A \in \mathbf{A}$*, tak* $\mathrm{HAD}_{\mathbf{A}}(A) = \mathrm{AD}_{\mathbf{A}}((A_\omega)_a) = \mathrm{SCH}(A) \cap \mathbf{A}$*. Navyše* $\operatorname{card}(A_\omega)_a = \operatorname{card} A$*.*

$(A_\omega)_a$ označuje generátor $\mathrm{SCH}(A)$, ktorý sme skonštruovali v predchádzajúcom (v prípade $A = C(\omega)$ je to $(S_\omega)_\omega$)

Aplikácie

Veta

Nech **A** *je epireflektívna podkategória kategórie* **Top** *taká, že* $I_2 \notin$ **A**. *Ak* **B** *je HAD-trieda v* **A** *a* **B** *obsahuje prvotný priestor, tak koreflektívny obal* $\mathrm{CH}(\mathbf{B})$ *podkategórie* **B** *v* **Top** *je dedičný.*

Dôsledok

Pre ľubovoľnú epireflektívnu podkategóriu **A** *kategórie* **Top** *takú, že* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Haus}$ *priradenie určené predpisom* $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C} \cap \mathbf{A}$ *je jednojednoznačná korešpondencia medzi všetkými dedičnými koreflektívnymi podkategóriami kategórie* **Top** *s vlastnosťou* $\mathbf{C} \supseteq \mathbf{FG}$ *a HAD-triedami v* **A**.

Ďakujem za pozornosť!

Moju dizertačnú prácu, takisto ako text tejto prezentácie a použité slidy, môžete nájsť na adrese:
`http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/papers/`

Email: `sleziak@fmph.uniba.sk`

Literatúra

J. Činčura.
Heredity and coreflective subcategories of the category of topological spaces.
Appl. Categ. Structures, 9:131–138, 2001.

J. Činčura.
Hereditary coreflective subcategories of categories of topological spaces.
Appl. Categ. Structures, 13:329–342, 2005.

S. P. Franklin and M. Rajagopalan.
On subsequential spaces.
Topology and its Applications, 35:1–19, 1990.