

Lévyho grupa a miery rozširujúce asymptotickú hustotu

Martin Sleziak a Miloš Ziman

26.–29. novembra 2009, Jasná

Obsah prednášky

Hlavné témy:

- ▶ miery rozširujúce asymptotickú hustotu
- ▶ Lévyho grupa

Aplikácie v teórii čísel a v poslednom čase aj v teórii sociálnej voľby.

Ukážeme, že normovaná konečne aditívna miera na $\mathbb{N}$ rozširuje hustotu práve vtedy, keď sa nemení permutáciami patriacimi do Lévyho grupy. Podáme tiež novú charakterizáciu Lévyho grupy pomocou štatistickej konverencie.

Z histórie

Miery rozširujúce hustotu skúmala ako prvá pravdepodobne Dorothy Maharam [M].

Boli študované aj mnohými ďalšími autormi, ako napríklad

- ▶ Blass, Frankiewicz, Plebanek and Ryll–Nardzewski [BFPRN]
- ▶ van Douwen [vD]
- ▶ Šalát and Tijdeman in [ŠT].

Asymptotická hustota

Asymptotická hustota množiny $A \subseteq \mathbb{N}$ je definovaná vzťahom

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

ak uvedená limita existuje, pričom

$$A(n) = |A \cap \{1, 2, \dots, n\}|.$$

$\mathcal{D}$ = systém všetkých podmnožín $\mathbb{N}$, ktoré majú asymptotickú hustotu

Nevýhoda: Niektoré podmnožiny $\mathbb{N}$ nemajú asymptotickú hustotu.
Je možné rozšíriť d na konečne aditívnu mieru na celom $\mathbb{N}$?

Miery rozširujúce hustotu

Konečne aditívnu mieru na $\mathbb{N}$ budeme stručne nazývať *mierou*.

Definícia

Miera rozširujúca hustotu je konečne aditívna miera na $\mathbb{N}$, ktorá rozširuje asymptotickú hustotu; t.j., je to funkcia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ vyhovujúca týmto podmienkam:

- (a) $\mu(\mathbb{N}) = 1$;
- (b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pre disjunktné $A, B \subseteq \mathbb{N}$;
- (c) $\mu|_{\mathcal{D}} = d$.

Limita podľa filtra

Systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je *filter* na množine $\mathbb{N}$, ak

- (a) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (b) $B \supseteq A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$;
- (c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Ultrafilter je filter, ktorý je maximálny vzhľadom na inklúziu.

Filter $\mathcal{F}$ je ultrafilter práve vtedy, keď pre každé $A \subseteq \mathbb{N}$ platí

$$A \in \mathcal{F} \vee \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$$

Ultrafilter nazývame *voľný*, ak $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$.

$\mathcal{F}$ -lim $a_n = L \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N}; |a_n - L| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$ pre každé $\varepsilon > 0$

Existencia rozšírení asymptotickej hustoty

Existencia mier rozširujúcich hustotu sa najčastejšie dokazuje pomocou Hahn-Banachovej vety alebo pomocou ultrafiltrov.

Ak $\mathcal{F}$ je voľný ultrafilter na množine $\mathbb{N}$, tak

$$\mu_{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{A(n)}{n}$$

je miera rozširujúca hustotu.

Lévyho grupa

Definícia

Lévyho grupa $\mathcal{G}$ je grupa všetkých permutácií π množiny $\mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k; k \leq n < \pi(k)\}|}{n} = 0. \quad (1.1)$$

$$\pi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n) - (\pi A)(n)}{n} = 0 \text{ pre každé } A \subseteq \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Ekvivalentná charakterizácia grupy $\mathcal{G}$

$$\pi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \limstat_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 1 \quad (1.3)$$

Pripomeňme, že $\limstat_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ má množina

$$A_\varepsilon = \{n; |x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

nulovú asymptotickú hustotu ($d(A_\varepsilon) = 0$).

$\mathcal{F}$ -lim pre $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N}; d(A) = 1\}$

$\mathcal{G}$ -invariantnosť

Veta

Miera μ na $\mathbb{N}$ rozširuje hustotu práve vtedy, keď je $\mathcal{G}$ -invariantná, t.j., $\mu(A) = \mu(\pi A)$ pre všetky $A \subseteq \mathbb{N}$ a všetky permutácie $\pi \in \mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$ -invariantnosť

Použijeme výsledok van Douwena [vD, Theorem 1.12]:

Veta

Miera μ na $\mathbb{N}$ rozširuje hustotu práve vtedy, keď $\mu(A) = \mu(\pi A)$ pre všetky $A \subseteq \mathbb{N}$ a všetky permutácie $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 1. \quad (2.1)$$

$$(2.1) \Rightarrow (1.3)$$

$\mathcal{G}$ -invariantná $\Rightarrow$ rozširuje hustotu

Túto implikáciu možno odvodiť aj z výsledkov Blümlingera a Obatu [BO, Theorem 2].

$\mathcal{G}$ -invariantnosť

Dôkaz opačnej implikácie využíva nasledujúci výsledok (Fridy [F, Theorem 1] alebo Šalát [Š, Lemma 1.1]):

Veta

Postupnosť reálnych čísel (x_n) štatisticky konverguje k $L \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď existuje množina A taká, že $d(A) = 1$ a postupnosť (x_n) konverguje k L pozdĺž množiny A , t.j., L je limitou podpostupnosti $(x_n)_{n \in A}$.

Základná idea dôkazu

Ak π spĺňa (1.3)

$$\pi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{stat} \frac{\pi(n)}{n} = 1$$

tak z nej možno dostať permutáciu ψ spĺňajúcu (2.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{n} = 1$$

pričom πA a ψA sa líšia len o množinu nulovej hustoty.

$$\mu(A) = \mu(\psi A) = \mu(\pi A)$$

Lévyho grupa a invariantnosť mier rozširujúcich hustotu

Tvrdenie

Ak π je permutácia taká, že všetky miery rozširujúce hustotu sú π -invariantné, t.j., $\mu(\pi A) = \mu(A)$ pre všetky $A \subseteq \mathbb{N}$ a všetky miery μ rozširujúce hustotu, tak $\pi \in \mathcal{G}$.

Príklad zaujímavej miery

Blümlinger [B]:

$2\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N}; B \supseteq 2A \text{ pre nejaké } A \in \mathcal{F}\}$
(ultrafilter určený bázou $\{2A; A \in \mathcal{F}\}$)

$$\mu(A) = 2 (2\mathcal{F})\text{-}\lim \frac{A(n)}{n} - \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{A(n)}{n}$$

je miera rozširujúca hustotu

Nech $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2^{2^i}, 2^{2^i} + 1, \dots, 2 \cdot 2^{2^i} - 1\}$ a $\{2^{2^i}; i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$.

Potom $\mu(A) = 1$ a $\overline{d}(A) = \frac{1}{2}$.

Príklad zaujímavej miery

Záporná odpoveď na otázku van Douwena [vD, Question 7A.1]:

Platí $\mu(A) \leq \overline{d}(A)$ pre všetky miery rozširujúce hustotu?

Kontrapríklad na tvrdenie Lauwersa [L, p.46]:

Každú mieru rozširujúcu hustotu možno vyjadriť v tvare

$$\mu_\varphi(A) = \int_{\beta\mathbb{N}^*} \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{A(n)}{n} d\varphi(\mathcal{F}), \quad A \subseteq \mathbb{N} \quad (3.1)$$

pre nejakú pravdepodobnostnú Borelovskú mieru φ na množine všetkých ultrafiltrov $\beta\mathbb{N}^$.*

Príklad zaujímavej miery

Šalát a Tijdeman [ŠT]: Má každá miera rozširujúca hustotu nasledujúce vlastnosti?

a) Ak $A(n) \leq B(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\mu(A) \leq \mu(B)$ (pre $A, B \subseteq \mathbb{N}$).

b) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1$, tak $\mu(A) = \mu(B)$ (pre $A, B \subseteq \mathbb{N}$ a $t \in \mathbb{R}$).

Odpoveď na obe tieto otázky je záporná.

a) Ak $\mu(A) > \bar{d}(A)$ a $d(B) \in (\bar{d}(A), \mu(A))$, tak $B(n) > A(n)$ pre $n > n_0$, ale $\mu(A) > d(B) = \mu(B)$.

b) V predchádzajúcom príklade sme mali $\mu(A) = 1$ a $\mu(2A) = 0$.

Ďakujem za pozornosť!

Článok [SZ], v ktorom sú dokázané prezentované výsledky, môžete nájsť na:

<http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/papers/>

Email: sleziak@fmph.uniba.sk



M. Blümlinger.

Lévy group action and invariant measures on $\beta\mathbb{N}$.
Trans. Amer. Math. Soc., 348(12):5087–5111, 1996.



A. Blass, R. Frankiewicz, G. Plebanek, and C. Ryll-Nardzewski.
A note on extensions of asymptotic density.
Proc. Amer. Math. Soc., 129(11):3313–3320, 2001.



M. Blümlinger and N. Obata.
Permutations preserving Cesáro mean, densities of natural numbers and uniform distribution of sequences.
Ann. Inst. Fourier, 41:665–678, 1991.



J. A. Fridy.
On statistical convergence.
Analysis, 5:301–313, 1985.



L. Lauwers.

Intertemporal objective functions: strong Pareto versus anonymity.

Mathematical Social Sciences, 35:37–55, 1998.



D. Maharam.

Finitely additive measures on the integers.

Sankhya, Ser. A, 38:44–59, 1976.



T. Šalát.

On statistically convergent sequences of real numbers.

Mathematica Slovaca, 30:139–150, 1980.



T. Šalát and R. Tijdeman.

Asymptotic densities of sets of positive integers.

Mathematica Slovaca, 33:199–207, 1983.



M. Sleziak and M. Ziman.

Lévy group and density measures.

J. Number Theory, 128(12):3005–3012, 2008.



E. K. van Douwen.

Finitely additive measures on $\mathbb{N}$.

Topology and its Applications, 47:223–268, 1992.