Obsah

Úvod **1**

1 Základné pojmy a označenia **2**
1.1 Teória množín 2
1.2 Topológia 2
1.3 Koreflektívne podkategórie **Top** 3
1.4 Prvotné priestory 4
1.5 Dedičné koreflektívne podkategórie **Top** 5

2 Dedičný koreflektívny obal prvotného priestoru **7**
2.1 Charakterizácia CH(A) pomocou operátora uzáveru 7
2.2 A-súčet 9
2.3 TS_γ 12
2.4 Priestory S_ω a $(S_\omega)_a$ 14
2.5 Príklady 15

3 Koreflektívne podkategórie s vlastnosťou S**A** = **Top** **17**
3.1 $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$ 17
3.2 $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(M(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn})$ 18
3.3 Súvis vlastnosti S**A** = **Top** s tesnosťou v bode 20

Literatúra **22**

Register **23**

Zoznam použitých symbolov **23**

Úvod

Budeme skúmať dedičný koreflektívny obal niektorých podkategórií **Top**.

V prvej kapitole stručne pripomenieme niektoré poznatky o koreflektívnych a dedičných koreflektívnych podkategóriach **Top**, ktoré budeme neskôr používať. V časti o koreflektívnych podkategóriach **Top** sme čerpali hlavne z knihy [7] a v časti o dedičných koreflektívnych podkategóriach **Top** z článku [4]. O niečo podrobnejší prehľad než v tejto práci možno nájsť napríklad aj v [14].

V druhej kapitole sa zaoberáme dedičným koreflektívnym obalom SCH(A) prvotného priestoru A. Najprv charakterizujeme priestory patriace do CH(A) pomocou istého uzáverového operátora, čo nám umožní využívať pre podkategóriu SCH(A) podobné metódy, ako sú použité v článku [6] pre podkategóriu subsekvenciálnych priestorov. Zostrojíme generátor $(S_\omega)_a$ koreflektívnej podkategórie SCH(A), ktorý bude mať rovnakú kardinalitu, ako priestor A. Pri dôkaze, že $(S_\omega)_a$ je generátorom SCH(A), nájdeme niektoré množiny priestorov, ktoré tiež generujú SCH(A), ale tieto priestory sú o niečo jednoduchšie než priestor $(S_\omega)_a$.

V tretej kapitole budú objektom nášho záujmu také koreflektívne podkategórie, ktorých dedičným koreflektívnym obalom je celá kategória **Top**. Nájdeme niekoľko charakterizácií takýchto podkategórií a takisto popíšeme najmenšiu koreflektívnu podkategóriu **Top** s touto vlastnosťou. Táto podkategória je súčasne najmenšia koreflektívna podkategória **Top**, pre ktorú je dedičné koreflektívne jadro podkategória **FG** a S**A** = **Top**. Nájdenie tejto kategórie možno teda chápať aj ako príspevok k riešeniu problému [8, Problem 7].

Kapitola 1

Základné pojmy a označenia

1.1 Teória množín

Tu uvedieme niektoré označenia a základné poznatky z teórie množín, ktoré budeme neskôr využívať.

Ordinálne číslo α budeme chápať ako množinu všetkých ordinálov od neho menších usporiadanú inklúziou. Triedu všetkých ordinálnych čísel budeme označovať On, triedu nelimitných ordinálov označíme NOn a triedu všetkých limitných ordinálov LOn.

Pod kardinálnym číslom budeme rozumieť najmenší ordinál danej kardinality. Ako α^+ označujeme kardinálny nasledovník, t.j. najmenšie kardinálne číslo, ktoré je väčšie ako α. Z axiómy výberu vyplýva, že pre každé α je α^+ regulárne kardinálne číslo.

Triedu všetkých kardinálnych čísel značíme Cn, RCn predstavuje regulárne kardinálne čísla.

Pod *kofinalitou* ordinálu α rozumieme minimálnu možnú kardinalitu podmnožiny α, ktorá je v α neohraničená. Kofinalitu α označujeme $\operatorname{cf}\alpha$. Ak $\beta = \operatorname{cf}\alpha$, tak existuje transfinitná postupnosť typu β (kratšie β-postupnosť) $(\alpha_\xi)_{\xi<\beta}$ ordinálov menších než α, ktorá konverguje k α v topológii určenej usporiadaním na α. Pre každé α je $\operatorname{cf}\alpha$ regulárne kardinálne číslo.

1.2 Topológia

Nech X_i, Y_i sú topologické priestory a $f_i\colon X_i \to Y_i$ je spojité zobrazenie pre každé $i \in I$. Označme $\prod X_i$ a $\prod Y_i$ ich topologický súčin a $p_i\colon \prod X_i \to X_i$, $p'_i\colon \prod Y_i \to Y_i$ sú projekcie. Potom definujeme spojité zobrazenie $\prod f_i := f\colon \prod X_i \to \prod Y_i$ ako jediné spojité zobrazenie, ktoré spĺňa $p'_i \circ f = f_i \circ p_i$. Ak máme daný topologický priestor X a pre každé $i \in I$ máme spojité zobrazenie $g_i\colon X \to Y_i$, tak $\langle g_i \rangle := g\colon X \to \prod Y_i$ je jediné spojité zobrazenie také, že $p_i \circ g = g_i$ pre všetky $i \in I$.

Duálnym spôsobom sa definuje $\coprod f_i\colon \coprod X_i \to \coprod Y_i$ a pre systém zobrazení $h\colon X_i \to Y$, $i \in I$, $[h_i]\colon \coprod X_i \to Y$.

Ak X je topologický priestor a $x \in X$, tak *tesnosť* $t(X, x)$ priestoru X v bode x je najmenšie kardinálne číslo α také, že ak $x \in \overline{C}$ v X, tak existuje podmnožina $C_0 \subseteq C$ taká, že $x \in \overline{C_0}$ a $\operatorname{card} C_0 \leq \alpha$. Tesnosť $t(X)$ priestoru X definujeme ako $\inf_{x \in X} t(X, x)$.

1.3 Koreflektívne podkategórie Top

V práci sa budeme zaoberať niektorými podkategóriami **Top**. O každej podkategórii **C**, s ktorou budeme pracovať, budeme predpokladať, že je plná a uzavretá na izomorfizmy. Predpoklad, že podkategória je plná, znamená, že táto podkategória je jednoznačne určená svojimi objektami. V kategórii **Top** sú izomorfizmami homeomorfizmy topologických priestorov, uzavretosť na izomorfizmy teda znamená, že **C** s ľubovoľným topologickým priestorom obsahuje aj všetky topologické priestory, ktoré sú s ním homeomorfné. Preto podkategóriu **Top** môžeme chápať jednoducho ako triedu topologických priestorov, ktorá je určená nejakou topologickou vlastnosťou.

Ak **A** je podkategória kategórie **B**, tak hovoríme, že **A** je *koreflektívna* podkategória kategórie **B**, ak funktor vloženia $E\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ má sprava adjungovaný funktor. Koreflektívne podkategórie **Top** sa dajú charakterizovať takto:

Veta 1.3.1 ([7, Veta 21.1.1]). *Nech* **A** *je podkategória* **Top**. *Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:*

(i) **A** *je koreflektívna v* **Top**.

(ii) **A** *je uzavretá vzhľadom na tvorenie topologických súčtov a faktorových priestorov.*

Aby sme sa vyhli triviálnemu prípadu $\mathbf{A} = \{\emptyset\}$, budeme vždy predpokladať, že kategória **A** obsahuje aspoň jeden neprázdny priestor.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že prienik neprázdneho systému koreflektívnych podkategórií **Top** je zase koreflektívna podkategória **Top**. Potom pre ľubovoľnú podkategóriu $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ musí existovať najmenšia koreflektívna podkategória **Top** obsahujúca **A**. Túto podkategóriu označujeme $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$, nazýva sa *koreflektívny obal* podkategórie **A**. $\mathrm{CH}(\mathbf{A})$ pozostáva zo všetkých faktorových priestorov topologických súčtov priestorov z **A**.

V prípade, že **A** obsahuje jediný priestor A, namiesto $\mathrm{CH}(\{A\})$ používame jednoduchšie označenie $\mathrm{CH}(A)$. Ak $\mathbf{B} = \mathrm{CH}(A)$, hovoríme že kategória **B** je *jednoducho generovaná* a A je *generátor* podkategórie **B**.

Teraz uvedieme niektoré známe koreflektívne podkategórie **Top**, ktoré budeme neskôr potrebovať. Takisto spomenieme niektoré ich užitočné vlastnosti.

Najmenšia koreflektívna podkategória **Top**, ktorá obsahuje aspoň jeden neprázdny priestor, je kategória **Disc** diskrétnych priestorov. **Disc** je koreflektívny obal jednobodového priestoru.

Najmenšia koreflektívna podkategória **Top**, ktorá obsahuje **Disc** ako vlastnú podkategóriu je kategória $\mathbf{Ind}_{sum}$ všetkých topologických súčtov indiskrétnych priestorov. $\mathbf{Ind}_{sum}$ je koreflektívny obal dvojprvkového indiskrétneho priestoru.

Najmenšia koreflektívna podkategória **Top**, ktorá obsahuje podkategóriu $\mathbf{Ind}_{sum}$ ako vlastnú podkategóriu je kategória **FG** *konečne generovaných* topologických priestorov. Sem patria priestory, v ktorých je ľubovoľný prienik otvorených množín otvorená množina. **FG** je koreflektívny obal Sierpińského priestoru S. (Sierpińského priestor S je priestor na množine $\{0,1\}$, v ktorom sú otvorené len množiny $\emptyset$, $\{1\}$ a S.) Pre každý priestor, ktorý nepatrí do $\mathbf{Ind}_{sum}$, platí $S \in \mathrm{CH}(X)$, t.j. koreflektívny obal priestoru X obsahuje S, v dôsledku čoho obsahuje aj celé **FG**.

Koreflektívnu podkategóriu **A** kategórie **Top** voláme *netriviálnou,* ak $\mathbf{FG} \subseteq \mathbf{A}$. (Teda vylúčime prípad, že **A** je niektorá z podkategórií $\{\emptyset\}$, **Disc**, $\mathbf{Ind}_{sum}$.)

Od kategórie **FG** už štruktúra „zväzu" všetkých koreflektívnych podkategórií **Top** nie je lineárna. Neexistuje totiž najmenšia koreflektívna podkategória **A** kategórie **Top** s vlastnosťou $\mathbf{FG} \subsetneq \mathbf{A}$. Existujú však minimálne koreflektívne podkategórie s touto vlastnosťou.

Pre každý regulárny kardinál α definujeme na množine $\alpha\cup\{\alpha\}$ priestor $B(\alpha)$ tak, že v tomto priestore budú otvorené práve množiny tvaru $B_\beta = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}; \gamma \geq \beta\}$ pre každé $\beta < \alpha$. Označme $\mathbf{B}_\alpha = \mathrm{CH}(B(\alpha))$. Pre tieto podkategórie platí, že ak $\alpha \neq \beta$ sú regulárne kardinály, tak $\mathbf{B}_\alpha \cap \mathbf{B}_\beta = \mathbf{FG}$ a ak **C** je ľubovoľná podkategória **Top** taká, že $\mathbf{FG} \subsetneq \mathbf{C}$, tak existuje také $\alpha \in \mathrm{RCn}$, že $\mathbf{B}_\alpha \subseteq \mathbf{C}$.

Na množine $\alpha \cup \{\alpha\}$ pre $\alpha \in \mathrm{RCn}$ definujeme aj priestor $C(\alpha)$ tak, že v $C(\alpha)$ je otvorená každá množina neobsahujúca α a z množín obsahujúcich α sú otvorené práve nadmnožiny množín B_β, $\beta < \alpha$.

Koreflektívny obal priestoru $C(\alpha)$ je kategória $\mathbf{Seq}(\alpha)$ všetkých *α-sekvenciálnych* priestorov. Topologický priestor X je α-sekvenciálny, ak $V \subseteq X$ je uzavretá v X práve vtedy, keď pre každú konvergentnú α-postupnosť prvkov z V aj každá jej limita patrí do V. ω-sekvenciálne priestory nazývame *sekvenciálne*, túto podkategóriu označujeme **Seq**.

Podobná je definícia pseudoradiálnych priestorov, rozdiel je v tom, že pri pseudoradiálnych priestoroch sa neobmedzíme na jediný regulárny kardinál α. Topologický priestor X je *pseudoradiálny,* ak každá podmnožina X, ktorá je uzavretá vzhľadom na tvorbu limít ľubovoľných transfinitných postupností, je uzavretá v X. Podkategóriu všetkých pseudoradiálnych priestorov označujeme **PsRad**. Táto kategória je koreflektívnym obalom všetkých priestorov $C(\alpha)$, kde α je regulárny kardinál, t.j. $\mathbf{PsRad} = \mathrm{CH}(\{C(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn}\})$.

Nech $\alpha \in \mathrm{Cn}$. $\mathbf{Gen}(\alpha)$ označujeme podkategóriu **Top**, ktorá je koreflektívnym obalom všetkých priestorov kardinality najviac α. Kategória $\mathbf{Gen}(\alpha)$ obsahuje také priestory X, ktoré majú tesnosť $t(X) \leq \alpha$. Nazývame ich tiež *α-generované priestory.*

1.4 Prvotné priestory

V tejto časti sa budeme zaoberať prvotnými priestormi, pretože pomocou nich sa dajú charakterizovať dedičné koreflektívne podkategórie **Top**.

Prvotný priestor je taký topologický priestor, že práve jeden jeho bod je neizolovaný.

Napríklad priestor $C(\alpha)$, ktorý sme definovali v predchádzajúcej časti, je prvotný priestor.

Lema 1.4.1. *Ak X je prvotný priestor s neizolovaným bodom a a Y je jeho podpriestor obsahujúci bod a, tak zobrazenie $f\colon X \to Y$ definované tak, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in Y$ a $f(x) = a$ pre $x \in X \setminus Y$, je faktorové.*

Dôkaz. Najprv overme, že f je spojité zobrazenie. Ak U je otvorená množina v Y a $a \notin U$, tak $a \notin f^{-1}(U)$ a $f^{-1}(U)$ je otvorená. Ak $a \in U$, tak $f^{-1}(U) = U \cup (X \setminus Y)$. Množina $X \setminus Y$ obsahuje len izolované body, preto je otvorená. Súčasne existuje otvorená množina V v X taká, že $V \cap Y = U$. Zrejme $V \subseteq U \cup (X \setminus Y)$, z čoho máme, že $f^{-1}(U) = V \cup (X \setminus Y)$ je otvorená.

f je zrejme surjektívne. Nech teraz $U \subseteq Y$ a $f^{-1}(U)$ je otvorená v X. Z definície zobrazenia f vyplýva, že $U = f^{-1}(U) \cap Y$ a U je otvorená v Y. □

Ak X je ľubovoľný topologický priestor a $a \in X$, tak *prvotný faktor* priestoru X v bode a je priestor X_a na množine X s najmenšou možnou topológiou, v ktorej sú otvorené všetky množiny neobsahujúce a aj všetky množiny otvorené v priestore X. Napríklad $C(\alpha) = (B(\alpha))_\alpha$. Zrejme každý prvotný faktor je buď prvotný priestor alebo diskrétny priestor.

Lema 1.4.2. *Ak X je topologický priestor, Y je podpriestor priestoru X a Y je prvotný priestor s neizolovaným bodom a, tak Y je podpriestor prvotného faktoru X_a.*

Dôkaz. Nech $U \subseteq Y$ je otvorená v Y. Ak $a \notin Y$, tak U je otvorená aj v X_a. Ak $a \in U$, tak existuje množina $V \subseteq X$ tak, že $V \cap Y = U$ a V je otvorená v X. Potom V je otvorená aj v X_a. Ukázali sme, že každú otvorenú podmnožinu Y možno získať ako prienik otvorenej množiny V v X_a s množinou Y.

Obrátene, nech V je otvorená množina v X_a. Ak $a \notin V$, tak aj $V \cap Y$ je otvorená. Ak $a \in V$, existuje množina U otvorená v X taká, že $a \in U \subseteq V$. Potom $U \cap Y$ je otvorená v Y. Keďže Y je prvotný priestor, a každá nadmnožina otvorenej množiny v prvotnom priestore je otvorená, aj $V \cap Y$ je otvorená. □

1.5 Dedičné koreflektívne podkategórie Top

Podkategóriu $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ nazveme *dedičnou,* ak je uzavretá vzhľadom na vytváranie podpriestorov. V tejto práci sa budeme venovať hlavne podkategóriam, ktoré sú súčasne dedičné aj koreflektívne. Ide vlastne o triedy topologických priestorov, ktoré sú uzavreté vzhľadom na topologické súčty, faktorové priestory aj podpriestory.

Z koreflektívnych podkategórií, ktoré sme doteraz uviedli, sú dedičné napríklad podkategórie $\mathbf{Gen}(\alpha)$, $\mathbf{FG}$, $\mathbf{Disc}$, $\mathbf{Ind}_{sum}$.

Pre podkategóriu $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ označíme S$\mathbf{A}$ kategóriu všetkých podpriestorov priestorov z $\mathbf{A}$. V prípade, že $\mathbf{A}$ je koreflektívna podkategória $\mathbf{Top}$, je aj S$\mathbf{A}$ koreflektívna podkategória $\mathbf{Top}$. Samozrejme, S$\mathbf{A}$ je súčasne dedičná.

Týmto spôsobom môžeme dostať niektoré zaujímavé dedičné koreflektívne podkategórie z koreflektívnych podkategórií $\mathbf{Top}$, ktoré sme už spomínali. Kategóriu všetkých podpriestorov sekvenciálnych priestorov označujeme $\mathbf{SSeq}$ a tieto priestory nazývame *subsekvenciálne.* Podobne *α-subsekvenciálne* priestory sú podpriestory α-sekvenciálnych priestorov a označujeme ich $\mathbf{SSeq}(\alpha)$. Podobne pre podpriestory pseudoradiálnych priestorov zavádzame označenie **SPsRad**, neskôr však ukážeme, že $\mathbf{SPsRad} = \mathbf{Top}$, čiže každý topologický priestor je podpriestor nejakého pseudoradiálneho priestoru.

V článku [4] je dokázaná nasledujúca charakterizácia netriviálnych dedičných koreflektívnych podkategórií pomocou prvotných faktorov, ktorú budeme veľmi často používať:

Veta 1.5.1. *Netriviálna koreflektívna podkategória* **A** *kategórie* **Top** *je dedičná práve vtedy, keď* **A** *je uzavretá vzhľadom na vytváranie prvotných faktorov. (T.j. pre každé* $a \in X \in \mathbf{A}$ *platí* $X_a \in \mathbf{A}$*.)*

Dedičný koreflektívny obal podkategórie **A** je najmenšia dedičná koreflektívna podkategória **Top** obsahujúca **A**. Z toho, že dedičné koreflektívne podkategórie **Top** sú práve triedy priestorov uzavreté vzhľadom na topologické súčty, faktorové priestory a podpriestory vidíme, že ľubovoľný prienik neprázdneho systému dedičných koreflektívnych podkategórií **Top** je opäť takáto podkategória, čo znamená, že pre každú podkategóriu **A** existuje jej dedičný koreflektívny obal. Dedičný koreflektívny obal koreflektívnej podkategórie **A** je podkategória $S\mathbf{A}$.

Dedičné koreflektívne jadro podkategórie $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Top}$ je najväčšia dedičná koreflektívna podkategória kategórie **Top**, ktorá je obsiahnutá v podkategórii **A**. V článku [4] je dokázané, že dedičné koreflektívne jadro nemusí existovať pre každú koreflektívnu podkategóriu **Top**. Dedičné koreflektívne jadro podkategórie **A** je kategória **FG** práve vtedy, keď pre žiadne regulárne kardinálne číslo α neplatí $\mathbf{SSeq}(\alpha) \subseteq \mathbf{A}$.

Kapitola 2

Dedičný koreflektívny obal prvotného priestoru

V celej kapitole budeme predpokladať, že máme daný nejaký prvotný priestor A, ktorého neizolovaným bodom je bod a. α budeme označovať tesnosť $t(A)$ priestoru A.

V tejto časti sa budeme zaoberať podkategóriou SCH(A) kategórie **Top**, ktorá je dedičným koreflektívnym obalom prvotného priestoru A. Typickým príkladom sú subsekvenciálne priestory, ktoré získame, ak položíme $A = C(\omega_0)$. Koreflektívnym obalom tohto priestoru sú sekvenciálne priestory a dedičným koreflektívnym obalom sú subsekvenciálne priestory. Štúdiu subsekvenciálnych priestorov sa venuje článok [6], v ktorom je pomocou priestoru $C(\omega_0)$ a operácie sekvenciálneho súčtu zostrojený spočítateľný generátor koreflektívnej podkategórie **SSeq** subsekvenciálnych priestorov.

My použijeme do istej miery podobný postup na to, aby sme z daného prvotného priestoru A zostrojili generátor kategórie SCH(A), ktorá je jeho dedičným koreflektívnym obalom. Najprv zavedieme operátor $\widetilde{M}$, pomocou ktorého sa dajú charakterizovať priestory z CH(A). Potom zavedieme A-súčet, ktorý potrebujeme na vytvorenie množín TSS_γ a TSS'_γ pre ordinály $\gamma < \alpha^+$. O týchto množinách ukážeme, že ich zjednotenie vygeneruje celú podkategóriu SCH(A). Pomocou vlastností A-súčtu sa nám potom podarí dokázať, že priestor $(S_\omega)_a$ je generátor koreflektívnej podkategórie SCH(A), navyše tento generátor má kardinalitu α, t.j. rovnakú kardinalitu ako priestor A.

2.1 Charakterizácia CH(A) pomocou operátora uzáveru

Pri štúdiu sekvenciálnych priestorov je užitočný pojem sekvenciálneho uzáveru. Teraz budeme definovať analogický pojem pre náš prípad.

Nech X je ľubovoľný priestor a $M \subseteq X$. Označíme $M_0 = M$, $M_1 = \{x \in X :$ existuje podpriestor $B \subseteq A$ taký, že $a \in B$, $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ a spojité zobrazenie

$f\colon B \to X$ také, že $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M$ a $f(a) = x\}$. Transfinitnou rekurziou definujeme $M_{\beta+1} = (M_\beta)_1$ a $M_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma$ pre limitné ordinály. Položme $\widetilde{M} = \bigcup_{\beta\in\mathrm{On}} M_\beta$.

Pre $\widetilde{M}$ zrejme platí $(\widetilde{M})_1 = \widetilde{M}$, $\widetilde{M} \subseteq \overline{M}$. Takisto je zrejmé, že pre $\beta < \gamma$ platí $M_\beta \subseteq M_\gamma$ a ak $A \subseteq B$, tak $A_\beta \subseteq B_\beta$, $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$. Ďalšou užitočnou vlastnosťou je, že ak pre nejaké β platí $M_\beta = M_{\beta+1}$, tak $\widetilde{M} = M_\beta$.

Ukážeme, že tento operátor uzáveru možno použiť na charakterizovanie priestorov z CH(A). (Nasledujúca propozícia je vlastne špeciálnym prípadom vety [10, Theorem 3.1.7].)

Propozícia 2.1.1. *Topologický priestor X patrí do* CH(A) *práve vtedy, keď pre každú podmnožinu $M \subseteq X$ platí $\overline{M} = \widetilde{M}$.*

Dôkaz. Nech $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{Top}$ je trieda všetkých topologických priestorov spĺňajúcich uvedenú podmienku. Najprv ukážeme, že $\mathbf{B}$ je koreflektívna podkategória $\mathbf{Top}$. Je zrejmé, že $\mathbf{B}$ je uzavretá vzhľadom na tvorbu topologických súčtov. Nech teraz $X \in \mathbf{B}$ a $q\colon X \to Y$ je faktorové zobrazenie. Predpokladajme, že $Y \notin \mathbf{B}$. To znamená, že existuje podmnožina $M \subseteq Y$ taká, že $\widetilde{M} \subsetneqq \overline{M}$. $\widetilde{M}$ nie je uzavretá, a preto $q^{-1}(\widetilde{M})$ nie je uzavretá v X. $X \in \mathbf{B}$, preto existuje $x \in (q^{-1}(\widetilde{M}))_1 \setminus q^{-1}(\widetilde{M})$. Z definície M_1 máme spojité zobrazenie $f\colon B \to X$ také, že $a \in B$, $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$, $f(a) = x$ a $f[B \setminus \{a\}] \subseteq q^{-1}(\widetilde{M})$. Potom $q \circ f\colon B \to Y$ je spojité zobrazenie také, že $q \circ f[B \setminus \{a\}] \subseteq \widetilde{M}$ a $q \circ f(a) = f(x) \in (\widetilde{M})_1 \setminus \widetilde{M}$. To je spor s definíciou $\widetilde{M}$.

Ukázali sme, že $\mathbf{B}$ je koreflektívna. Pretože očividne $A \in \mathbf{B}$, máme CH(A) $\subseteq \mathbf{B}$. Na dôkaz opačnej inklúzie skonštruujeme faktorové zobrazenie z topologického súčtu podpriestorov priestoru A a diskrétneho priestoru do ľubovoľného priestoru $X \in \mathbf{B}$. (Každý podpriestor A patrí do CH(A) - lema 1.4.1.)

Nech $X \in \mathbf{B}$. Nech $f_i\colon B_i \to X$ sú všetky spojité zobrazenia, ktoré vystupujú v definícii M_1 pre niektoré $M \subseteq X$. Nech D je podpriestor X pozostávajúci zo všetkých izolovaných bodov priestoru X. (D je diskrétny, teda $D \in$ CH(A).) Nech $i_D\colon D \hookrightarrow X$ je vloženie D do X. Môžeme definovať zobrazenie $f\colon (\coprod_{i\in I} B_i) \sqcup D \to X$ také, že $f|_{B_i} = f_i$ pre každé $i \in I$ a $f|_D = i_D$. Tvrdíme, že f je faktorové. Ľahko vidno, že f je surjektívne. Nech $M \subseteq X$ nie je uzavretá. Potom $M_1 \setminus M \neq \emptyset$ a existuje $f_i\colon B_i \to X$ také, že $f_i[B_i \setminus \{a\}] \subseteq M$ a $f_i(a) \notin M$, pričom $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$. Tým sme ukázali, že $f_i^{-1}(M)$ nie je uzavretá, a preto $f^{-1}(M)$ nie je uzavretá. □

Predchádzajúcu propozíciu môžeme ekvivalentne preformulovať takto:

Propozícia 2.1.2. *Topologický priestor X patrí do* CH(A) *práve vtedy, keď pre každú neuzavretú podmnožinu $M \subseteq X$ existuje spojité zobrazenie $f\colon B \to X$, kde B je podpriestor priestoru A obsahujúci bod a s vlastnosťou $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$, také, že $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M$ a $f(a) \notin M$.*

Dôkaz. Nech $X \in$ CH(A) a M je neuzavretá podmnožina priestoru X. Potom platí $\widetilde{M} \setminus M \neq \emptyset$, z čoho dostaneme $M_1 \setminus M \neq \emptyset$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou uvedenou v propozícii.

Obrátene, nech pre každú neuzavretú podmnožinu X existuje spojité zobrazenie spĺňajúce uvedené podmienky. Potrebujeme dokázať, že $\overline{M} = \widetilde{M}$. Skutočne, ak by platilo $\widetilde{M} \subsetneq \overline{M}$, tak existuje spojité zobrazenie $f\colon B \to X$ také, že $f[B \setminus \{a\}] \subseteq \widetilde{M}$ a $f(a) \notin \widetilde{M}$, pričom a je hromadný bod podpriestoru B. Z toho vyplýva, že $f(a) \in (\widetilde{M})_1 \setminus \widetilde{M}$, čo je spor. □

Na tomto mieste si tiež môžeme uvedomiť, že analogicky možno charakterizovať aj koreflektívny obal nejakej množiny prvotných priestorov. Ak totiž $\{A_i; i \in I\}$ je množina prvotných priestorov a a_i je neizolovaný bod priestoru A_i, tak zlúčením ich neizolovaných bodov do jediného bodu dostaneme priestor A taký, že $\mathrm{CH}(\{A_i; i \in I\}) = \mathrm{CH}(A)$ a každý z priestorov A_i je podpriestorom A, ktorý obsahuje neizolovaný bod a priestoru A ako svoj hromadný bod. Čiže X patrí do $\mathrm{CH}(\{A_i; i \in I\})$ práve vtedy, keď pre každú neuzavretú podmnožinu $M \subseteq X$ existuje $i \in I$ a spojité zobrazenie $f\colon B \to X$, pričom B je podpriestor A_i s vlastnosťou $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ v A_i, $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M$, $f(a) \notin M$. Takisto by sme mohli zaviesť operátor $\widetilde{M}$ aj pre množinu prvotných priestorov tak, že $M_1 = \{x \in X$: existuje $i \in I$, podpriestor $B \subseteq A_i$ taký, že $a_i \in \overline{A}_i$ a spojité zobrazenie $f\colon B \to X$ také, že $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M$ a $f(a) = x\}$. Opäť, podobne ako v prípade jediného prvotného priestoru, sa dá dokázať, že $X \in \mathrm{CH}(\{A_i; i \in I\})$ práve vtedy, keď $\overline{M} = \widetilde{M}$ pre všetky podmnožiny $M \subseteq X$. Dokonca rovnako možno charakterizovať aj koreflektívny obal triedy prvotných priestorov.

Propozícia 2.1.3. *Nech $X \in \mathrm{CH}(A)$ a $\alpha = t(A)$. Potom pre ľubovoľnú podmnožinu $M \subset X$ platí $M_{\alpha^+} = \overline{M}$.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že množina M_{α^+} by nebola uzavretá. Potom by existovalo spojité zobrazenie $f\colon B_1 \to X$, kde $B_1 \subseteq A$, $a \in \overline{B_1 \setminus \{a\}}$, také, že $f[B_1 \setminus \{a\}] \subseteq M_{\alpha^+}$ a $f(a) \notin M_{\alpha^+}$. Ďalej, vďaka tomu, že $t(A) = \alpha$, existuje podmnožina $B \subseteq B_1$ s kardinalitou $\operatorname{card} B \leq \alpha$ tak, že $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ a $a \in B$. Aj zúženie zobrazenia f na B je spojité a spĺňa podmienku $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M_{\alpha^+}$.

Pre každé $x \in B \setminus \{a\}$ označme $\beta_x := \min\{\beta : f(x) \in M_\beta\}$. Keďže α^+ je limitný ordinál, $\beta_x < \alpha^+$ (z definície M_α pre limitné ordinály). Ak by platilo $\gamma = \sup\{\beta_x; x \in B \setminus \{\alpha\}\} < \alpha^+$, tak by $f(a) \in M_{\gamma+1} \subseteq M_{\alpha^+}$. Musí teda byť $\sup\{\beta_x; x \in B \setminus \{\alpha\}\} = \alpha^+$, čo je v spore s tým, že α^+ je regulárny kardinál. □

2.2 A-súčet

Teraz definujeme A-súčet. Táto konštrukcia je špeciálnym prípadom kefky definovanej v [10]. Špeciálnym prípadom A-súčtu (keď $A = C(\omega_0)$) je sekvenciálny súčet, ktorý je definovaný v [2]. Sekvenciálny súčet bol použitý v [6] na získanie generátora kategórie subsekvenciálnych priestorov. Použijeme podobné metódy ako v tomto článku, aby sme získali generátor $\mathrm{SCH}(A)$. Špeciálnym prípadom A-súčtu je aj súčin $*$ z [4].

Definícia 2.2.1. Nech A je prvotný priestor s neizolovaným bodom $a \in A$. Označme $B := A \setminus \{a\}$. Nech pre každé $b \in B$ je X_b topologický priestor a $x_b \in X_b$. Potom *A-súčet* $\sum\limits_A \langle X_b, x_b\rangle$ je topologický priestor na množine $F =$

$A \cup (\bigcup_{b\in B} \{b\} \times (X_b \setminus \{x_b\}))$, ktorý je faktorový vzhľadom na zobrazenie $\varphi\colon A \sqcup (\coprod_{b\in B} X_b) \to F$, $\varphi(x) = x$ pre $x \in A$, $\varphi(x) = (b, x)$ pre $x \in X_b \setminus \{x_b\}$ a $\varphi(x_b) = b$ pre každé $b \in B$. (Predpokladáme, že A a $\{b\} \times X_b$ sú disjunktné pre každé $b \in B$.) φ budeme volať *definujúce zobrazenie* A-súčtu.

Väčšinou bude zrejmé z kontextu, čo rozumieme pod A a budeme skracovať označenie na $\sum\langle X_b, x_b\rangle$ alebo $\sum X_b$. A-súčet je definovaný jednoducho stotožnením každého $x_b \in X_b$ s bodom $b \in A$. Ľahko vidíme, že podpriestor $\varphi[X_b]$ je homeomorfný s priestorom X_b a aj A je podpriestorom A-súčtu. Ak A a všetky X_b sú T_1-priestory, tak A a $\varphi[X_b]$ sú uzavreté podpriestory A-súčtu.

A-súčet je definovaný pomocou topologického súčtu a faktorového priestoru, preto ak **C** je koreflektívna podkategória **Top** a **C** obsahuje A aj všetky X_b, tak aj A-súčet $\sum X_b$ patrí do **C**.

Nasledujúca lema je zrejmá z definície A-súčtu.

Lema 2.2.2. *Podmnožina $U \subseteq \sum_A\langle X_b, x_b\rangle$ je otvorená (uzavretá) práve vtedy, keď $U \cap A$ je otvorená (uzavretá) v A a $U \cap \varphi[X_b]$ je otvorená (uzavretá) v $\varphi[X_b]$ pre každé $b \in B$.*

Nech pre každé $b \in B$ sú X_b a Y_b topologické priestory a nech $f_b\colon X_b \to Y_b$ je zobrazenie. Potom môžeme definovať zobrazenie $f =: \sum f_b\colon \sum_A\langle X_b, x_b\rangle \to \sum_A\langle Y_b, y_b\rangle$, kde $y_b = f(x_b)$, ako $f(b, x) = (b, f_b(x))$ pre $x \in X_b \setminus \{x_b\}$ a $f(x) = x$ pre $x \in A$. Všimnime si, že $\varphi_1|_{X_b} \circ f_b = f \circ \varphi_2|_{Y_b}$, kde φ_1 a φ_2 sú definujúce zobrazenia A-súm $\sum X_b$ a $\sum Y_b$. To znamená, že zobrazenie $\sum f_b$ sa na $\varphi_1[X_b]$ líši od f_b na X_b len o homeomorfizmus $\varphi_1|_{X_b}$. Navyše $(\sum f_b)|_A = id_A$.

Teraz opíšeme správanie sa $\sum f_b$ vzhľadom na spojité zobrazenia, vloženia a faktorové priestory. Použijeme pritom nasledujúcu jednoduchú lemu:

Lema 2.2.3. *Nech $f\colon X \to Y$ je faktorové zobrazenie, $A \subseteq Y$ a f je bijektívne mimo A. Potom $f|_{f^{-1}(A)}\colon f^{-1}(A) \to A$ je tiež faktorové.*

Lema 2.2.4. *Nech A je prvotný priestor s neizolovaným bodom a a $B = A\setminus\{a\}$. Nech pre každé $b \in B$ $f_b\colon X_b \to Y_b$ je zobrazenie. Ak všetky f_b sú spojité, tak $\sum f_b$ je spojité. Ak všetky f_b sú faktorové, tak $\sum f_b$ je faktorové zobrazenie. Ak všetky f_b sú vloženia, tak $\sum f_b$ je vloženie.*

Dôkaz. Označme $f = \sum f_b$, $f_b(x_b) = y_b$, $X = \sum\langle X_b, x_b\rangle$, $Y = \sum\langle Y_b, y_b\rangle$ a φ_1, φ_2 definujúce zobrazenia A-súčtov $\sum X_b$, $\sum Y_b$. V takejto situácii nasledujúci diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup (\coprod X_b) \arrow[r, "id_A \sqcup (\coprod f_b)"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A \sqcup (\coprod Y_b) \arrow[d, "\varphi_2"'] \\
\sum\langle X_b, x_b\rangle \arrow[r, "f"'] & \sum\langle Y_b, y_b\rangle
\end{tikzcd}$$

Zobrazenie $id_A \sqcup (\coprod f_b)$ označme ako h. Ak všetky f_b sú spojité, tak aj h je spojité. Potom aj $f \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h$ je spojité. φ_1 je faktorové, čiže predošlá podmienka nám hovorí, že f je spojité.

Podobne, ak všetky f_b sú faktorové, aj h je faktorové a $\varphi_2 \circ h$ je faktorové, lebo je zložením dvoch faktorových zobrazení. Keďže $f \circ \varphi_1$ je faktorové, aj f je faktorové zobrazenie.

Teraz nech všetky f_b sú vloženia. Môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $X_b \subseteq Y_b$ a f_b je inklúzia X_b do Y_b. Nech X' je podpriestor priestoru $\sum Y_b$ na množine $\sum X_b$. Máme nasledovnú situáciu

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup (\coprod X_b) \arrow[r, hook, "id_A \sqcup (\coprod f_b)"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A \sqcup (\coprod Y_b) \arrow[d, "\varphi_2"'] \\
X' \arrow[r, hook, "f"'] & \sum Y_b
\end{tikzcd}$$

Potrebujeme len dokázať, že X' má faktorovú topológiu vzhľadom na φ_1, lebo z toho už vyplýva, že $X' = \sum X_b$ a f je vloženie $X' = \sum X_b$ do $\sum Y_b$. Ale φ_2 je bijektívne mimo množiny $A \sqcup (\coprod X_b)$ a z lemy 2.2.3 vyplýva, že φ_1 je faktorové zobrazenie. □

Všimnime si, že ak pre každé $b \in B$ je f_b vloženie, ktoré zobrazuje izolované body priestoru X_b na izolované body priestoru Y_b, aj vloženie $\sum f_b$ bude mať túto vlastnosť.

Lema 2.2.5. *Nech A je prvotný priestor s neizolovaným bodom a, $a \in B \subseteq A$ a $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$. Nech pre každé $b \in A \setminus \{a\}$ je X_b topologický priestor a $x_b \in X_b$. Potom $\sum\limits_B \langle X_b, x_b \rangle$ je uzavretý podpriestor priestoru $\sum\limits_A \langle X_b, x_b \rangle$.*

Dôkaz. Podmienka $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ je potrebná na to, aby bod a bol neizolovaný v podpriestore B, čiže aby malo vôbec zmysel hovoriť o B-súčte (t.j. aby B bol prvotný priestor).

Najprv ukážeme, že množina $C := \sum\limits_B \langle X_b, x_b \rangle$ je uzavretá v topologickom priestore $\sum\limits_A \langle X_b, x_b \rangle$. $C \cap A = B$ je uzavretá, pretože $a \in B$. $C \cap X_b = \emptyset$ pre $b \notin B$ a $C \cap X_b = X_b$ pre $b \in B \setminus \{a\}$. V oboch prípadoch $C \cap X_b$ je uzavretá. Podľa lemy 2.2.2 je C uzavretá v $\sum\limits_A \langle X_b, x_b \rangle$.

Pretože faktorové zobrazenie zúžené na vzor uzavretej podmnožiny je opäť faktorové a zúženie definujúceho zobrazenia A-súčtu $\sum\limits_A \langle X_b, x_b \rangle$ je definujúce zobrazenie B-súčtu $\sum\limits_B \langle X_b, x_b \rangle$, dostávame dokazované tvrdenie. □

Dôsledok 2.2.6. *Nech A je prvotný priestor s neizolovaným bodom a, $a \in B \subseteq A$ a $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$. Nech pre každé $a \in A \setminus \{a\}$ je X_b topologický priestor a $x_b \in X_b$. Nech pre každé $b \in B$ je Y_b podpriestor priestoru X_b, pričom $x_b \in Y_b$. Potom $\sum\limits_B \langle Y_b, x_b \rangle$ je podpriestor priestoru $\sum\limits_A \langle X_b, x_b \rangle$.*

Dôkaz. Vyplýva z lemy 2.2.5 a z poslednej časti lemy 2.2.4. □

2.3 TS_γ

Transfinitnou indukciou definujeme pre každý ordinál $\gamma \leq \alpha^+$ množinu topologických priestorov TS_γ. Položíme $TS_0 = \emptyset$, TS_1 bude množina všetkých podpriestorov B priestoru A takých, že $a \in B$ a $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$.

Ak γ je limitný ordinál, tak položíme $TS_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} TS_\beta$.

Ak γ je nelimitný ordinál a $\gamma - 1$ je limitný ordinál, do TS_γ dáme všetky B-súčty tvaru $\sum\limits_B \langle X_b, x_b \rangle$, kde každé $X_b \in TS_{\beta_b}$ pre nejaké $\beta_b < \gamma - 1$, $\sup\{\beta_b; b \in B \setminus \{a\}\} = \gamma - 1$ a $B \ni a$ je podpriestor priestoru A taký, že $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$. Ak γ aj $\gamma - 1$ sú nelimitné ordinály, tak budeme uvažovať len také súčty, kde každé X_b patrí do $TS_{\gamma-1}$.

V prípade, že budeme chcieť zdôrazniť, z akého priestoru A sa vychádzalo pri konštrukcii tejto množiny, budeme používať označenie $TS_\gamma(A)$.

Každý priestor z TS_γ, kde γ je nelimitný, obsahuje všetky body patriace do B, čiže aj bod a. Všetky triedy TS_γ sme získali z A pomocou B-súčtov, kde $B \in \mathrm{CH}(A)$, teda $TS_\gamma \subseteq \mathrm{CH}(A)$ pre každé γ.

Nasledujúca lema ukazuje súvislosť medzi iteráciami operátora uzáveru M_γ definovaného pre prvotný priestor A a systémom $TS_\gamma(A)$.

Lema 2.3.1. *Nech X je topologický priestor a $M \subseteq X$. Ak $p \in M_\beta \setminus M_\gamma$ pre všetky $\gamma < \beta$, tak existuje priestor $S_\beta \in TS_\beta$ a spojité zobrazenie $f\colon S_\beta \to X$, ktoré zobrazuje všetky izolované body S_β do M a bod $a \in S_\beta$ na p.*

Dôkaz. Budeme postupovať transfinitnou indukciou. Pre $\beta = 1$ to vyplýva priamo z definície M_1.

Z definície M_β pre limitné ordinály vyplýva, že β nie je limitný ordinál. Z propozície 2.1.3 máme, že $\beta \leq \alpha^+$. Pre nelimitné $\beta > 1$ existuje podpriestor $B \subseteq A$ taký, že $a \in B$, $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ a spojité zobrazenie $f\colon B \to X$ také, že $f(a) = p$ a $f(B \setminus \{a\}) \subseteq M_{\beta-1}$.

Ak $\beta - 1$ je nelimitný ordinál, môžeme dokonca predpokladať, že $f(B \setminus \{a\}) \subseteq M_{\beta-1} \setminus M_{\beta-2}$. (Ak položíme $B' = \{b \in B \setminus \{a\}; f(b) \notin M_{\beta-2}\}$, tak $a \in \overline{B'}$, v opačnom prípade by sa totiž bod p dostal už do iterácie $M_{\beta-1}$.) Podľa indukčného predpokladu existuje potom pre každý bod $x \in f(B \setminus \{a\})$ spojité zobrazenie $f_x\colon S_x \to M$ z priestoru $S_x \in TS_{\beta-1}$, ktoré zobrazuje izolované body do M a a na x.

Potom $\sum\limits_B \langle S_{f(b)}, a \rangle \in TS_\beta$ a môžeme definovať zobrazenie $g\colon \sum\limits_B \langle S_{f(b)}, a \rangle \to M$ tak, že $g|_B = f$ a $g(x,y) = f_x(y)$ pre $x \in B \setminus \{a\}$, $y \in S_x \setminus \{a\}$.

V prípade, že $\beta - 1$ je limitný ordinál, označme pre každé $x \in f(B \setminus \{a\})$ ako γ_x najmenší index taký, že $x \in M_{\gamma_x}$. Potom máme zabezpečenú existenciu $f_x\colon S_x \to M$ s podobnými vlastnosťami, pričom $S_x \in TS_{\gamma_x}$ a $\sup\{\gamma_x; x \in B \setminus \{a\}\} = \beta - 1$. (Opäť platí, že ak by $\sup \gamma_x$ bolo menšie, patrilo by p už do iterácie $M_{\sup \gamma_x + 1}$, čiže do nižšej než M_β.) Zobrazenie $g\colon \sum\limits_B \langle S_{f(b)}, a \rangle \to M$ definujeme podobne ako v predošlom prípade, $g|_B = f$ a $g(x,y) = f_x(y)$.

V obidvoch prípadoch z indukčného predpokladu vyplýva, že izolované body sa zobrazia do M. Zostáva len dokázať, že zobrazenie g je spojité.

Definujúce zobrazenie $\varphi\colon B \sqcup (\coprod_{b\in B\setminus\{a\}} S_{f(b)}) \to \sum\langle S_{f(b)}, a\rangle$ je faktorové. Preto $g\colon \sum\langle S_{f(b)}, a\rangle \to X$ je spojité práve vtedy, keď $g \circ \varphi$ je spojité. Ale $g \circ \varphi|_B = f$ a $g \circ \varphi|_{S_x} = f_x$ sú spojité, teda g je spojité. □

Pre ľubovoľné $S_\gamma \in TS_\gamma$ označíme T_γ podpriestor priestoru S_γ, ktorý pozostáva zo všetkých izolovaných bodov S_γ a bodu $a \in S_\gamma$. Zrejme T_γ je prvotný priestor. Označíme TSS_γ triedu všetkých priestorov T_γ takých, že $S_\gamma \in TS_\gamma$. Z predchádzajúcej lemy vyplýva:

Lema 2.3.2. *Ak $p \in M_\beta$ a $p \notin M_\gamma$ pre každé $\gamma < \beta$, tak existuje priestor $T_\beta \in TSS_\beta$ a spojité zobrazenie $f\colon T_\beta \to X$, ktoré zobrazuje všetky izolované body priestoru T_β do M a $f(a) = p$.*

Propozícia 2.3.3. SCH(A) *je generované množinou* $\bigcup\limits_{\gamma<\alpha^+} TSS_\gamma$.

Dôkaz. Nech $X \in \mathrm{SCH}(A)$. Podľa poznámky za propozíciou 2.1.2 stačí ukázať, že pre každú neuzavretú podmnožinu $M \subseteq X$ existuje bod $x \notin M$ a spojité zobrazenie $f\colon B \to X$ také, že $f[B \setminus \{a\}] \subseteq M$, $f(a) = x$, kde B je podpriestor niektorého priestoru $S \in TSS_\gamma$ spĺňajúci podmienky $a \in B$, $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$. Ak položíme $B = S$, podmienky $a \in B$, $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$ sú splnené, stačí nám teda nájsť zobrazenie $f\colon S \to X$, ktoré zobrazuje všetky neizolované body priestoru S (čiže množinu $S \setminus \{a\}$, keďže S je prvotný priestor) do M a bod a na x.

Priestor $X \in \mathrm{SCH}(A)$ je podpriestor nejakého priestoru $Y \in \mathrm{CH}(A)$. Pre neuzavretú podmnožinu M v priestore X platí $(\overline{M} \cap X) \setminus M \neq \emptyset$. (Uzáver $\overline{M}$ berieme v priestore Y.) Nech x je ľubovoľný bod z $(\overline{M} \cap X) \setminus M$. Potom tento bod leží v $\widetilde{M}$, a teda patrí do niektorej iterácie M_γ. Nech γ je najmenší taký ordinál, že $x \in M_\gamma$. Zrejme γ je nelimitný (na základe definície M_γ pre limitné ordinály) a $\gamma < \alpha^+$ (podľa propozície 2.1.3). Potom podľa lemy 2.3.2 existuje spojité zobrazenie f z priestoru $S \in TSS_\gamma$ také, že $f[S \setminus \{a\}] \subseteq M$ a $f(a) = x$. □

Poznamenajme, že na vygenerovanie SCH(A) stačí menšia množina priestorov. Vlastne ukážeme, že vďaka dôsledku 2.2.6 nemusíme používať B-súčty pre všetky podpriestory $B \subseteq A$ a vlastnosťami $a \in B$ a $a \in \overline{B \setminus \{a\}}$, stačí sa obmedziť na A-súčty.

Definujeme $TS'_0 = \emptyset$, $TS'_1 = \{A\}$, TS'_γ pre limitný ordinál je zjednotenie množín TS'_β definovaných predchádzajúcich krokoch.

Pre nelimitné ordinály budeme TS'_γ podobne ako sme definovali TS_γ. Rozdiel bude spočívať v tom, že budeme robiť súčet vždy cez A a nie cez podpriestory $B \subseteq A$. Teda ak $\gamma - 1$ je limitný ordinál, do TS'_γ budú patriť priestory tvaru $\sum\limits_A \langle S_b, a\rangle$, pričom $S_b \in TS'_{\beta_b}$, $\beta_b < \gamma - 1$ a $\sup\{\beta_b; b \in A \setminus \{a\}\} = \gamma - 1$. V prípade, že γ aj $\gamma - 1$ sú nelimitné, tak tam dáme priestory $\sum\limits_A \langle S_b, a\rangle$, kde každý priestor S_b patrí do $TS'_{\gamma-1}$.

TSS'_γ definujeme opäť tak, že bude obsahovať podpriestory pozostávajúce z izolovaných bodov a bodu a. Transfinitnou indukciou sa ľahko overí, že každý priestor $X \in TS_\gamma$ je podpriestorom nejakého priestoru z $Y \in TS'_\gamma$ a navyše existuje také vloženie, ktoré zobrazí ľubovoľný izolovaný bod x priestoru X na izolovaný bod $y \in Y$. (Pre $\gamma = 1$ je to zrejmé. Nech $\gamma > 1$ je nelimitný. Ak $X = \sum\limits_B \langle S_b, a\rangle \in TS_\gamma$, tak z indukčného predpokladu každý priestor $S_b \in TS_{\beta_b}$ je podpriestorom nejakého priestoru $S'_b \in TS'_{\beta_b}$, v prípade, že $\gamma - 1$ je nelimitný berieme všetky β_b ako $\gamma - 1$. Z dôsledku 2.2.6 vyplýva, že X je podpriestorom ľubovoľného A-súčtu, ktorý na b-tom mieste obsahuje S'_b, teda je aj podpriestorom niektorého priestoru Y z TS'_γ. Navyše z poznámky z lemou 2.2.4 vyplýva, že existuje vloženie, ktoré každý izolovaný bod priestoru X zobrazí na izolovaný bod priestoru Y.) Z toho vyplýva, že každý priestor $X' \in TSS_\gamma$ je podpriestorom nejakého priestoru $Y' \in TSS'_\gamma$. Keďže sú to prvotné priestory, X' je faktorovým priestorom Y' (lema 1.4.1). Dostávame teda, že aj $\bigcup_{\gamma<\alpha^+} TSS_\gamma$ generuje SCH(A).

Vlastne sme tiež v predošlom odseku ukázali, že pre každé $\gamma < \alpha^+$ platí CH$(TSS_\gamma) =$ CH(TSS'_γ).

2.4 Priestory S_ω a $(S_\omega)_a$

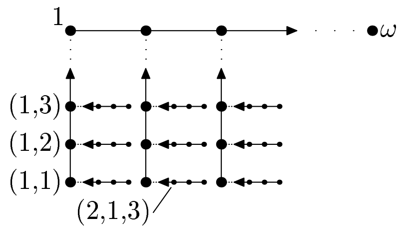
Teraz definujeme priestor S_ω podobným spôsobom ako v [2], ale použijeme A-súčet namiesto sekvenciálneho súčtu.

Najprv definujeme priestory S_n pre každé $n \in \mathbb{N}$. Položíme $S_1 = A$ a $S_{n+1} = \sum\limits_A \langle S_n, a\rangle$.

Zrejme platí $S_n \in$ CH(A) pre všetky $n \in N$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_n \subseteq S_{n+1}$. Body $S_2 \setminus S_1$ sú tvaru (b, c), kde $b, c \in A \setminus \{a\}$. Podobne $S_{n+1} \setminus S_n \subseteq (A \setminus \{a\})^n$.

Priestor S_3 pre $A = C(\omega_0)$ znázorňuje nasledujúci obrázok:



S_n nie je len podmnožina, ale aj topologický podpriestor S_{n+1}. Možno to ukázať indukciou použitím lemy 2.2.4. Máme teda postupnosť $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \ldots$ topologických priestorov, pričom každý z nich je topologický podpriestor nasledujúceho.

S_ω je priestor na množine $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, v ktorom $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ je otvorená práve vtedy, keď $U \cap S_n$ je otvorená pre každé $n \in N$. Vidíme, že S_ω je faktorový priestor priestoru $\coprod_{n\in N} S_n$, preto $S_\omega \in$ CH(A). (S_ω je induktívna limita (usmernená kolimita) priestorov S_n.)

Všimnime si, že $S_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = A \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \setminus \{a\})^n\right)$.

Ukážeme, že S_ω možno interpretovať ako A-súčet ak vezmeme priestor S_ω a bod $a \in S_\omega$ pre každé $b \in A \setminus \{a\}$.

Propozícia 2.4.1. $S_\omega = \sum\limits_A \langle S_\omega, a\rangle$

Dôkaz. Označme $X := \sum\langle S_\omega, a\rangle$. Oba priestory, S_ω aj X, sú definované na tej istej množine, potrebujeme len porovnať topológie. Aby sme odlíšili jednotlivé kópie priestoru S_ω, budeme označovať S^b_ω jeho b-tu kópiu (inak povedané S^b_ω označíme podpriestor A-súčtu $\sum\langle S_\omega, a\rangle$ na podmnožine $b \cup (\{b\} \times (S_\omega \setminus \{a\}))$.) Podľa lemy 2.2.2 U je otvorená v X práve vtedy, keď $U \cap A$ a $U \cap S^b_\omega$ sú otvorené v A resp. v S^b_ω. Priestor S_ω obsahuje podmnožinu S_n, pre podpriestor S^b_ω označíme podpriestor zodpovedajúci podmnožine S^n ako S^n_b. (T.j. S^n_b podpriestor na podmnožine $b \cup (\{b\} \times (S_n \setminus \{a\}))$.)

$U \cap S^b_\omega$ je otvorená v S^b_ω práve vtedy, keď $U \cap S^b_n$ je otvorená v $U \cap S^b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Teraz opäť môžeme použiť lemu 2.2.2 pre $S_{n+1} = \sum S^b_n$ a vidíme, že $U \cap A$ a všetky $U \cap S^b_n$ sú otvorené $\Leftrightarrow$ U je otvorená v S_{n+1}. Nakoniec dostávame, že U je otvorená v X práve vtedy, keď $U \cap S_n$ je otvorená v S_n pre každé $n \in \mathbb{N}$, čo je definícia topológie priestoru S_ω.

Ešte raz zrekapitulujeme kostru dôkazu. U je otvorená v $X \Leftrightarrow U \cap A$ a $U \cap S^b_\omega$ sú otvorené (v A a v S^b_ω) $\Leftrightarrow U \cap A$ aj všetky $U \cap S^b_n$ sú otvorené $\Leftrightarrow U \cap A$ a $U \cap S_{n+1}$ sú otvorené $\Leftrightarrow U$ je otvorená v S_ω. □

Lema 2.4.2. $\operatorname{card} S_\omega = \operatorname{card} A$

Proof. $\operatorname{card} S_\omega = \operatorname{card} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n = \aleph_0 . \operatorname{card} A = \operatorname{card} A$ □

Lema 2.4.3. *Každý priestor X z TS_γ, kde $\gamma < \alpha^+$ je nelimitný ordinál, je podpriestor S_ω. Vloženie $i\colon S_\gamma \hookrightarrow S_\omega$ možno zvoliť tak, že $i(a) = a$.*

Dôkaz. Použijeme transfinitnú indukciu. Pre $\gamma = 1$ máme $id_B\colon B \to S_\omega$, čo je evidentne vloženie.

Nech $\gamma > 1$ je nelimitný ordinál a uvedená vlastnosť platí pre všetky nelimitné ordinály $\beta < \gamma$. Nech $X = \sum\limits_B X_b \in TS_\gamma$. Každý priestor X_b patrí do niektorej z množín TS_β pre $\beta < \gamma$. Podľa indukčného predpokladu je X_b podpriestor S_ω. Z dôsledku 2.2.6 dostaneme, že X je podpriestor $\sum S_\omega = S_\omega$. Z dôkazu lemy 2.2.4 a 2.2.5 vidno, že vloženie sa dá zostrojiť tak, že $i(a) = a$. □

Veta 2.4.4. *Prvotný faktor $(S_\omega)_a$ priestoru S_ω v bode a je generátor koreflektívnej kategórie* $\mathrm{SCH}(A)$*. Jeho kardinalita je* $\operatorname{card} A$*.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že všetky priestory z TSS_γ, kde γ je nelimitný ordinál, sú v koreflektívnom obale $(S_\omega)_a$. Z predchádzajúcej lemy vieme, že každý priestor $T_\gamma \in TSS_\gamma$ je podpriestorom S_ω a existuje vloženie $i\colon T_\gamma \hookrightarrow S_\omega$ také, že neizolovaný bod priestoru T_γ sa zobrazí na $a \in S_\omega$. Navyše T_γ je prvotný priestor a preto je to podpriestor prvotného faktoru $(S_\omega)_a$ (lema 1.4.2). $a \in T_\gamma$, teda T_γ je faktorový priestor priestoru $(S_\omega)_a$ (lema 1.4.1). □

2.5 Príklady

Uvedieme niektoré príklady kategórií generovaných jedným prvotným priestorom. Na tieto kategórie možno použiť konštrukciu generátora $(S_\omega)_a$, ktorú sme práve uviedli.

Príklad 2.5.1. *Sekvenciálne priestory.* Pripomeňme, že topologický priestor X je sekvenciálny práve vtedy, keď $V \subseteq X$ je uzavretá, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v X platí $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq V \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \subseteq V$. Podpriestory sekvenciálnych priestorov sa nazývajú subsekvenciálne. Kategória **Seq** sekvenciálnych priestorov je koreflektívny obal priestoru $C(\omega_0)$. Pre $A = C(\omega_0)$ je naša definícia S_ω totožná s S_ω definovaným v [2]. Dokázali sme, že prvotný faktor priestoru S_ω v jeho bode rádu 0 je generátor kategórie **SSeq** subsekvenciálnych priestorov. (Bod a v našej konštrukcii priestoru S_ω sa v [6] nazýva bodom rádu 0.) Spočítateľný generátor kategórie **SSeq** bol predtým zostrojený v [6]. Podobne z priestoru $C(\beta)$ dostaneme generátor podkategórie $\mathbf{SSeq}(\beta)$ všetkých podpriestorov β-sekvenciálnych priestorov. Kardinalita tohto generátora je β. Je to minimálna možná kardinalita, lebo priestor $C(\beta)$ má tesnosť β.

Príklad 2.5.2. *β-pseudoradiálne priestory.* Nech β je nejaký regulárny kardinál. Topologický priestor X nazveme *β-pseudoradiálny,* ak podmnožina $V \subseteq X$ je uzavretá práve vtedy, keď obsahuje všetky limity transfinitných postupností $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ takých, že $\alpha \leq \beta$ a $x_\xi \in V$ pre každé $\xi < \alpha$. Kategória $\mathbf{Psrad}(\beta)$ všetkých β-pseudoradiálnych priestorov je generovaná množinou prvotných faktorov $\{C(\alpha); \alpha \leq \beta\}$. Ak spojíme neizolované body všetkých týchto priestorov do jedného bodu, dostaneme generátor kategórie $\mathbf{Psrad}(\beta)$, ktorý je opäť prvotný priestor. Našou konštrukciou dostaneme generátor kategórie $\mathbf{SPsrad}(\beta)$ všetkých podpriestorov β-pseudoradiálnych priestorov. Kardinalita tohto generátora je β. Podobne ako v príklade 2.5.1 ide o minimálnu možnú kardinalitu generátora tejto podkategórie.

Celkom podobným spôsobom možno vytvoriť generátor pre kategóriu podpriestorov $\mathbb{P}$-priestorov z [12], v prípade, že $\mathbb{P}$ je množina.

Príklad 2.5.3. *Jednoducho generovaná koreflektívna podkategória* **Top**. Nech **A** je jednoducho generovaná koreflektívna podkategória **Top** a $\mathbf{FG} \subseteq \mathbf{A}$. Nech B je generátor **A**. Z vety 1.5.1 vyplýva, že všetky prvotné faktory priestoru B patria do S**A**. Znovu spojením ich neizolovaných bodov dostaneme priestor A, ktorý je navyše prvotný priestor, má rovnakú kardinalitu ako B a platí $\mathbf{A} = \mathrm{CH}(B) \subseteq \mathrm{CH}(A) \subseteq \mathrm{S}\mathbf{A}$ (pretože B je faktorový priestor topologického súčtu svojich prvotných faktorov.) Z toho dostaneme, že $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathrm{SCH}(A)$. Z našej konštrukcie potom vyplýva, že existuje generátor kategórie S**A**, ktorý má rovnakú kardinalitu ako B.

Kapitola 3

Koreflektívne podkategórie s vlastnosťou $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$

V tejto časti sa budeme zaoberať koreflektívnymi podkategóriami **Top**, ktorých dedičný koreflektívny obal je celá kategória **Top** topologických priestorov. Koreflektívna podkategória **A** kategórie **Top** má túto vlastnosť, ak každý topologický priestor je podpriestorom niektorého priestoru z **A**. Ukážeme, že najmenšia koreflektívna podkategória **Top** s touto vlastnosťou je $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$.

V [8, Problem 7] H. Herrlich a M. Hušek navrhujú skúmať koreflektívne podkategórie **Top**, ktoré majú vlastnosť, že ich dedičný koreflektívny obal je celá kategória **Top** a dedičné koreflektívne jadro je podkategória **FG**. Kategória $\mathbf{A}_{min}$ je najmenšia podkategória **Top**, ktorá spĺňa tieto podmienky. (Pretože $\mathbf{FG} \subseteq \mathbf{A}_{min} \subseteq \mathbf{PsRad}$ a dedičné koreflektívne jadro podkategórie **PsRad** je **FG** - pozri napríklad [4] - aj dedičné koreflektívne jadro podkategórie $\mathbf{A}_{min}$ je **FG**.)

3.1 $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$

Nech S je Sierpińského priestor na množine $\{0,1\}$, v ktorom je 0 otvorená množina. Najprv ukážeme, že kategória $\mathbf{A} = \mathrm{CH}(\{S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn}\})$ má vlastnosť $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$. Vyplýva to z nasledujúcej propozície:

Propozícia 3.1.1 ([5, Theorem 2.3.26]). *Nech X je T_0-priestor s váhou $w(X) = \alpha$. Potom X možno vložiť do priestoru S^α.*

Dôsledok 3.1.2. *Pre kategóriu* $\mathbf{A} = \mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$ *platí* $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$.

Dôkaz. Keďže každý prvotný priestor je T_0-priestor, tak podľa predchádzajúcej propozície obsahuje $\mathrm{S}\mathbf{A}$ všetky prvotné priestory. Každý priestor je faktorový priestor svojich prvotných faktorov, čiže potom platí $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$. $\square$

Našou najbližšou úlohou bude dokázať, že $\mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$ je najmenšia koreflektívna podkategória **Top** s touto vlastnosťou.

Veta 3.1.3. *Nech* $\mathbf{A}$ *je koreflektívna podkategória* **Top**. *Potom* $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$, *práve vtedy, keď* $S^\alpha \in \mathbf{A}$ *pre každé* $\alpha \in \mathrm{Cn}$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{A}$ je koreflektívna podkategória **Top** s vlastnosťou $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$ a α je ľubovoľný nekonečný kardinál. Potom existuje priestor $X \in \mathbf{A}$ taký, že S^α je podpriestor X. Pre každé $a \in \alpha$ nech $p_a \colon S^\alpha \to S$ je a-ta projekcia S^α na S. Množina $(p_a)^{-1}(0)$ je otvorená v S^α, preto musí existovať otvorená podmnožina U_a v X taká, že $U_a \cap S^\alpha = (p_a)^{-1}(0)$. Zobrazenie $f_a \colon X \to S$ dané predpisom $f_a(x) = 0$ pre $x \in U_a$ a $f_a(x) = 1$ pre $x \notin U_a$ je spojité a $p_a = f|_{S^\alpha}$. Zobrazenie $f \colon X \to S^\alpha$ také, že $f_a = p_a \circ f$ pre každé $a \in \alpha$ (t.j. $f = \langle f_a \rangle$) je potom tiež spojité a jeho zúženie $f|_{S^\alpha}$ je identita na S^α. Teda f je retrakcia, čiže f je faktorové zobrazenie. Našli sme faktorové zobrazenie $f \colon X \to S^\alpha$, čo znamená, že $S^\alpha \in \mathbf{A}$.

Obrátenú implikáciu predstavuje dôsledok 3.1.2. □

Označme ako $\mathbf{A}_{min}$ najmenšiu koreflektívnu podkategóriu **Top**, ktorej dedičný koreflektívny obal je celá kategória **Top**. Dokázali sme vlastne, že takáto podkategória existuje a platí:

Dôsledok 3.1.4. $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(S^\alpha; \alpha \in \mathrm{Cn})$

3.2 $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(M(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn})$

V predchádzajúcej časti bol jeden z kľúčových krokov v dôkaze vety 3.1.3 ukázať, že ak S^α je podpriestor priestoru X, tak existuje retrakcia $f \colon X \to S^\alpha$. V tejto časti zostrojíme iné pomerne jednoduché priestory $M(\alpha)$ s rovnakou vlastnosťou: ak $M(\alpha)$ je podpriestor X, tak existuje retrakcia $f \colon X \to M(\alpha)$. Ďalej ukážeme, že trieda $\{M(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn}\}$ generuje podkategóriu $\mathbf{A}_{min}$.

Pre ľubovoľný limitný ordinál α definujeme na množine $\alpha \cup \{\alpha\}$ priestor $M(\alpha)$, v ktorom budú otvorené množiny práve množiny tvaru $B_\beta = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}; \gamma \geq \beta\}$ pre nelimitné ordinály $\beta < \alpha$.

Všimnime si, že prvotný faktor priestoru $M(\alpha)$ v bode α je priestor $C(\alpha)$.

Lema 3.2.1. *Nech* α *je limitný ordinál a* $M(\alpha)$ *je podpriestor priestoru* X. *Potom existuje retrakcia* $f \colon X \to M(\alpha)$.

Dôkaz. Ak $M(\alpha)$ je podpriestor priestoru X, tak pre každý nelimitný ordinál $\beta < \alpha$ existuje otvorená podmnožina U_β priestoru X taká, že $U_\beta \cap M(\alpha) = B_\beta$. Pre limitné ordinály $\beta \leq \alpha$ dodefinujme $U_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} U_\gamma$. Potom aj pre limitné ordinály β platí $U_\beta \cap M(\alpha) = B_\beta$. Ďalej položme pre $0 < \beta \leq \alpha$ $V_\beta = \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha} U_\gamma$ a $V_0 = X$. Dostaneme tak systém množín s týmito vlastnosťami: $V_\beta \cap M(\alpha) = B_\beta$ pre každé $\beta < \alpha$ a pre $\beta < \gamma \leq \alpha$ platí $V_\beta \supsetneqq V_\gamma$. (Ide o vlastnú nadmnožinu vďaka tomu, že β je prvkom $B_\beta \setminus B_\gamma$, teda patrí aj do $V_\beta \setminus V_\gamma$.) Pritom pre nelimitný ordinál je V_β otvorená (lebo je zjednotenie otvorených množín) a pre limitný ordinál nie je V_β otvorená (lebo $V_\beta \cap M(\alpha)$ nie je otvorená).

Zobrazenie $f \colon X \to M(\alpha)$ definujeme tak, že

$$f(x) := \sup\{\beta < \alpha : x \in V_\beta\}.$$

Pre nelimitný ordinál β platí zrejme $f^{-1}(B_\beta) = V_\beta$, čiže vzor každej otvorenej množiny v $M(\alpha)$ je otvorená množina v X. To znamená, že f je spojité zobrazenie. Navyše pre $\beta \in M(\alpha)$ platí $f(\beta) = \beta$, čo znamená, že f je retrakcia. □

Z lemy 3.2.1 vyplýva, že $\mathbf{A}_{min}$ musí obsahovať priestor $M(\alpha)$ pre každé $\alpha \in \mathrm{RCn}$, čiže $\mathrm{CH}(M(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn}) \subseteq \mathbf{A}_{min}$. Pri dôkaze opačnej inklúzie nám pomôže propozícia 3.2.3, ktorá hovorí, že aj kategória pseudoradiálnych priestorov má vlastnosť S**A** = **Top**. Aby sme to dokázali, ukážeme najprv, že každý z priestorov S^α je pseudoradiálny.

Lema 3.2.2. *Pre každé $\alpha \in \mathrm{Cn}$ je priestor S^α pseudoradiálny.*

Dôkaz. Topologický priestor je pseudoradiálny práve vtedy, keď pre každú jeho podmnožinu platí $\widetilde{U} = \overline{U}$, ak $\widetilde{U}$ označíme pseudoradiálny uzáver množiny U, čiže najmenšiu množinu, ktorá obsahuje U a s každou konvergentnou transfinitnou postupnosťou obsahuje aj jej limitu. (Vyplýva to napríklad z poznámky za propozíciou 2.1.2 a z toho, že **PsRad** = $\mathrm{CH}(C(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn})$).

Postupujme sporom. Predpokladajme, že lema neplatí a γ je najmenší kardinál, pre ktorý S^γ nie je pseudoradiálny. Pretože pre každý kardinál $\alpha \leq \omega$ je S^α sekvenciálny priestor (spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti), $\gamma > \omega$. Ak S^γ nie je pseudoradiálny, existuje podmnožina U priestoru S^γ s vlastnosťou $\overline{U} \setminus \widetilde{U} \neq \emptyset$.

Nech $t \in \overline{U} \setminus \widetilde{U}$, $A = \{\eta \in \gamma; t(\eta) = 0\}$ a $\varkappa = \operatorname{card} A$. Zrejme $A \neq \emptyset$ a $\varkappa \leq \gamma$. Uvažujme podpriestor $K = \{s \in S^\gamma;$ pre každé $\eta \in \gamma \setminus A$ $s(\eta) = 1\}$. Priestor K je uzavretý podpriestor S^γ, $t \in K$ a K je homeomorfný s priestorom $S^\varkappa$.

Ak $\varkappa < \gamma$, tak K je pseudoradiálny. Pre $V = U \cap K$ máme $\overline{V} = \widetilde{V}$ v K. Teda $t \in \widetilde{V}$ a zrejme platí $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{U}$. Z toho dostávame, že $\varkappa = \gamma$.

V tomto prípade existuje homeomorfizmus $f\colon K \to S^\gamma$ taký, že $f(t) = t_0$, kde $t_0(\eta) = 0$ pre všetky $\eta \in \gamma$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $K = S^\gamma$ a $t = t_0$. Pre každé $\xi \in \gamma$ označme f_ξ prvok S^γ daný predpisom

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < \xi, \\ 1, & \text{pre } x \geq \xi. \end{cases}$$

Ľahko sa dá nahliadnuť, že transfinitná postupnosť $(f_\xi)_{\xi<\gamma}$ konverguje k t_0 v S^γ. Pretože $t_0 \in \overline{U}$ a $\overline{\{t_0\}} = S^\gamma$, dostaneme, že $\overline{U} = S^\gamma$, a teda $f_\xi \in \overline{U}$ pre každé $\xi \in \gamma$. Položme $A_\xi = \{\eta \in \gamma; f_\xi(\eta) = 0\} = \{\eta \in \gamma; \eta < \xi\}$. Potom pre každé $\xi \in \gamma$ je $\operatorname{card} A_\xi < \gamma$ a podľa predchádzajúcej časti dôkazu (prípad $\varkappa < \gamma$) $f_\xi \in \widetilde{U}$. Čiže $t_0 \in \widetilde{U}$, čo je spor s predpokladom. □

Z predchádzajúcej lemy vyplýva, že platí:

Propozícia 3.2.3. SPsRad = Top

Propozícia 3.2.4. *Ak* **A** *je koreflektívna podkategória* **Top** *a* $M(\alpha) \in \mathbf{A}$ *pre všetky* $\alpha \in \mathrm{RCn}$*, tak* S**A** = **Top**.

Dôkaz. S**A** je dedičná koreflektívna podkategória **Top**. Keďže obsahuje $M(\alpha)$, musí obsahovať aj jeho prvotný faktor v bode α, čiže priestor $C(\alpha)$. To znamená, že S**A** obsahuje priestory $C(\alpha)$ pre všetky $\alpha \in \mathrm{RCn}$. Potom S**A** musí obsahovať aj koreflektívny obal $\{C(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn}\}$, čo je kategória **PsRad** všetkých pseudoradiálnych priestorov. Dedičný koreflektívny obal kategórie **PsRad** je **Top**, preto S**A** = **Top**. ☐

Veta 3.2.5. *Nech* **A** *je koreflektívna podkategória* **Top**. *Potom* S**A** = **Top** *práve vtedy, keď* $M(\alpha) \in \mathbf{A}$ *pre každé* $\alpha \in \mathrm{RCn}$.

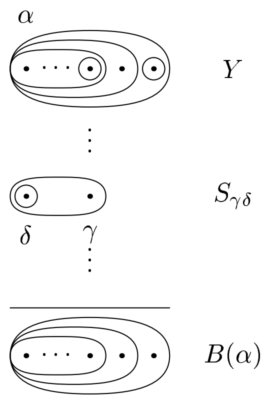
Dôkaz. Jedna z implikácií je propozícia 3.2.4. Opačný smer vyplýva z toho, že pre každé $\alpha \in \mathrm{RCn}$ obsahuje S**A** priestor $M(\alpha)$. Potom existuje $X \in \mathbf{A}$ taký, že $M(\alpha)$ je podpriestor X. Podľa lemy 3.2.1 existuje retrakcia $f\colon X \to M(\alpha)$. Pretože f je retrakcia, f je súčasne aj faktorové zobrazenie a $M(\alpha) \in \mathbf{A}$. ☐

Dôsledok 3.2.6. $\mathbf{A}_{min} = \mathrm{CH}(M(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn})$

3.3 Súvis vlastnosti S**A** = **Top** s tesnosťou v bode

v tejto časti nájdeme charakterizáciu koreflektívnych podkategórií **Top** s vlastnosťou S**A** = **Top** pomocou tesnosti priestoru v bode.

Pripomeňme, ako sme definovali priestor $B(\alpha)$, kde α bol ľubovoľný ordinál. V priestore $B(\alpha)$ boli otvorené práve množiny tvaru $B_\beta = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}; \gamma \geq \beta\}$ pre každé $\beta < \alpha$.



Lema 3.3.1. *Nech Y je topologický priestor na množine $\alpha \cup \{\alpha\}$, ktorý je zjemnením priestoru $B(\alpha)$ a v ktorom bod α nie je izolovaný. Potom $B(\alpha) \in \mathrm{CH}(\{Y\})$.*

Dôkaz. Priestor Y vlastne potrebujeme „vyčistiť“ od „prebytočných“ otvorených množín. Potrebujeme zabezpečiť to, aby každá otvorená množina obsahovala s ľubovoľným ordinálom aj všetky od neho väčšie.

Vezmime pre každé $\gamma < \delta \leq \alpha$ Sierpińského priestor $S_{\gamma\delta}$ na množine $\{\gamma, \delta\}$ s otvorenou množinou $\{\delta\}$. Definujme topologický priestor X na množine $\alpha \cup \{\alpha\}$ tak, že množina U je otvorená v X práve vtedy, keď U je otvorená v Y a súčasne pre všetky $\gamma < \delta \leq \alpha$ je $U \cap S_{\gamma\delta}$ otvorená v $S_{\gamma\delta}$. Je zrejmé, že X je faktorový priestor topologického súčtu Y a všetkých priestorov $S_{\gamma\delta}$. Tvrdíme, že $X = B(\alpha)$.

Y je zjemnenie $B(\alpha)$ a každé $S_{\gamma\delta}$ je podpriestor $B(\alpha)$, čiže otvorené množiny v X sú otvorené aj v $B(\alpha)$. Ideme teda už len ukázať, že sme odstránili „nežiadúce“ otvorené množiny, t.j. že každá otvorená množina musí s ľubovoľným prvkom obsahovať aj všetky od neho väčšie. Ak platí $\gamma \in U$, $\gamma < \delta$ a $\delta \notin U$, tak $U \cap S_{\gamma\delta} = \{\gamma\}$ nie je otvorená v $S_{\gamma\delta}$, čiže U nie je otvorená v X.

Ďalej platí, že $\{\alpha\}$ nie je otvorená v X, lebo $\{\alpha\}$ nie je otvorená v Y. □

Lema 3.3.2. *Nech X je topologický priestor, $x \in X$ a $\mathrm{CH}(X) = \mathbf{A}$. Ak $t(X, x) = \alpha$, tak $B(\alpha) \in \mathrm{S}\mathbf{A}$.*

Dôkaz. Nech $V \subseteq X$ je podmnožina priestoru s vlastnosťami $\operatorname{card} V = \alpha$, $x \in \overline{V}$ a x nepatrí do uzáveru žiadnej podmnožiny V, ktorá má kardinalitu menšiu ako α. Označme $\mathbf{A} = \mathrm{CH}(X)$ a Y podpriestor priestoru X na množine $V \cup \{x\}$. Keďže $Y \in \mathrm{S}\mathbf{A}$, aj prvotný faktor $Y_x \in \mathrm{S}\mathbf{A}$.

Tvrdíme, že priestor Y_x je zjemnením priestoru $B(\alpha)$. Stačí keď ukážeme, že doplnky podmnožín V majúcich kardinalitu menšiu ako α sú otvorené v priestore Y_x. Ak $\operatorname{card}(V \setminus U) < \alpha$, tak podľa predpokladu $x \notin \overline{(V \setminus U)}$ v X, a teda U je okolím bodu x v priestore Y_x.

Ďalej bod x je v priestore Y_x neizolovaný, pretože $x \in \overline{V}$.

Podľa lemy 3.3.1 potom $\mathrm{S}\mathbf{A}$ obsahuje aj $B(\alpha)$. □

Propozícia 3.3.3. *Ak $\mathbf{A}$ je koreflektívna podkategória $\mathbf{Top}$ a $B(\alpha) \in \mathrm{S}\mathbf{A}$ pre každé $\alpha \in \mathrm{RCn}$, tak $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$.*

Dôkaz. Ak $B(\alpha) \in \mathrm{S}\mathbf{A}$, tak $\mathrm{S}\mathbf{A}$ obsahuje aj $C(\alpha)$, lebo $C(\alpha)$ je prvotný faktor priestoru $B(\alpha)$ v bode α. Potom $\mathrm{S}\mathbf{A}$ musí obsahovať aj $\mathrm{SCH}(\{C(\alpha); \alpha \in \mathrm{RCn}\}) = \mathbf{SPsRad} = \mathbf{Top}$. □

Veta 3.3.4. *Nech $\mathbf{A}$ je koreflektívna podkategória $\mathbf{Top}$. $\mathrm{S}\mathbf{A} = \mathbf{Top}$ práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ pre každé $\alpha \in \mathrm{RCn}$ obsahuje priestor X taký, že $t(X, x) = \alpha$ pre nejaké $x \in X$.*

Dôkaz. Jeden smer vyplýva z lemy 3.3.2 a z propozície 3.3.3. Opačný smer vyplýva z toho, že $\mathbf{A}$ obsahuje priestory $M(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{RCn}$ a $t(M(\alpha), \alpha) = \alpha$. □

Literatúra

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker: *Abstract and Concrete Categories*, Willey-Interscience, New York, 1989.

[2] A. V. Archangeľskij, S. P. Franklin: *Ordinal invariants for topological spaces*, Michigan Math. J. **15** (1968), 313–320.

[3] B. Balcar, P. Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, Praha, 1986.

[4] J. Činčura: *Heredity and Coreflective Subcategories of the Category of Topological Spaces*, Applied Categorical Structures **9** (2001), 131–138.

[5] R. Engelking: *General Topology*, PWN, Warsaw, 1977.

[6] S. P. Franklin, M. Rajagopalan: *On subsequential spaces*, Topology and its Applications **35** (1990), 1–19.

[7] H. Herrlich: *Topologische Reflexionen und Coreflexionen*, Springer Verlag, Berlin, 1968.

[8] H. Herrlich, M. Hušek: *Some open categorical problems in Top*, Applied Categorical Structures **1** (1993), 1–19.

[9] H. Herrlich, G. Strecker: *Category Theory*, Heldermann, Berlin, 1979.

[10] V. Kannan: *Ordinal invariants in topology*, Memoirs of AMS **245** (1981).

[11] J. Nagata: *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[12] P.J. Nyikos: *Convergence in topology* v M. Hušek, J. van Mill (editors): *Recent Progress in General Topology*, Elsevier, Amsterdam, 1992, 538–570.

[13] G. Preuss: *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Pubslishing Company, Dordrecht, 1988.

[14] M. Sleziak: *Dedičné koreflektívne podkategórie Top*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2002.

Zoznam použitých symbolov

On	ordinálne čísla	2
NOn	nelimitné ordinálne čísla	2
LOn	limitné ordinálne čísla	2
α^+	kardinálny nasledovník	2
Cn	kardinálne čísla	2
RCn	regulárne kardinálne čísla	2
$\mathrm{cf}\,\alpha$	kofinalita	2
$\prod f_i$	súčin zobrazení f_i	2
$\langle g_i \rangle$	zobrazenie indukované súčinom	2
$\coprod f_i$	topologický súčet zobrazení f_i	2
$[h_i]$	zobrazenie indukované kosúčinom	2
t(X)	tesnosť priestoru X	3
CH(**A**)	koreflektívny obal podkategórie **A**	3
CH(A)	koreflektívny obal priestoru A	3
Disc	diskrétne priestory	3
$\mathbf{Ind}_{sum}$	topologické súčty indiskrétnych priestorov	3
FG	konečne generované priestory	4
$B(\alpha)$	topologický priestor $B(\alpha)$	4
$\mathbf{B}_\alpha$	koreflektívny obal priestoru $B(\alpha)$	4
$C(\alpha)$	topologický priestor $C(\alpha)$	4
$\mathbf{Seq}(\alpha)$	α-sekvenciálne priestory	4
Seq	sekvenciálne priestory	4
PsRad	pseudoradiálne priestory	4
$\mathbf{Gen}(\alpha)$	α-generované priestory	4
X_a	prvotný faktor priestoru X v bode a	5
S**A**	podpriestory priestorov z **A**	5
SSeq	subsekvenciálne priestory	5
$\mathbf{SSeq}(\alpha)$	α-subsekvenciálne priestory	6
SPsRad	podpriestory pseudoradiálnych priestorov	6
M_1	prvá iterácia operátora uzáveru pre CH(A)	7
M_β	iterácia operátora uzáveru pre CH(A)	8
$\widetilde{M}$	operátor uzáveru pre CH(A)	8

$\sum\limits_{A}\langle X_b, x_b\rangle$	A-súčet priestorov X_b ($x_b \in X_b$ sú ich význačné body)	9
$\sum f_b$	A-súčet zobrazení f_b	10
TS_γ	množina priestorov definovaná pomocou A-súčtu	12
TSS_γ	množina priestorov definovaná pomocou A-súčtu	13
TS'_γ	množina priestorov definovaná pomocou A-súčtu	13
TSS'_γ	množina priestorov definovaná pomocou A-súčtu	13
S_n	topologický priestor S_n	14
S_ω	topologický priestor S_ω	14
$\mathbf{Psrad}(\beta)$	β-pseudoradiálne priestory	16
$\mathbf{A}_{min}$	najmenšia koreflektívna podkategória **Top** taká, že S$\mathbf{A} = \mathbf{Top}$	18