

OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE

2.ROČNÍK

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského

CONTENTS

I. Obyčajné diferenciálne rovnice a systémy obyčajných diferenciálnych rovníc	2
II. Vety o existencii, jednoznačnosti a globálnej existencii riešení	2
III. Technika riešení niektorých typov diferenciálnych rovníc	4
IV. Lineárna homogénna diferenciálna rovnica v $\mathbb{R}$	4
V. Lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica v $\mathbb{R}$	5
VI. Lineárna homogénna diferenciálna rovnica v $\mathbb{R}^n$	11
VII. Lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica v $\mathbb{R}^n$	12
VIII. Lineárna diferenciálna rovnica n -teho rádu	13
IX. Systém lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi	18

REFERENCES

1. M.Medved', *Dynamické systémy*.
2. Greguš,Švec,Šeda, *Obyčajné diferenciálne rovnice*.
3. Nagy J., *Diferenciálne rovnice*.
4. Bock,Marko, *Diferenciálne rovnice*.
5. Kurzweil, *Obyčajné diferenciálne rovnice*.
6. A.F.Filippov, *Sbornik zadač po teorii obyknnavennykh dif. urovnenij*.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$

I. OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE A
SYSTÉMY OBYČAJNÝCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍČ

Definícia 1.1. Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť, tj. otvorená súvislá množina a $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(t, x) \mapsto f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Obyčajná diferenciálna rovnica 1. rádu v D je rovnica tvaru:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (t, x) \in D$$

Niekedy píšeme $\dot{x}$ miesto $\frac{dx}{dt}$, tj. $\dot{x} = f(t, x)$, pričom $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$. Nech $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, tj. $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$, kde $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(t, x) \mapsto f_i(t, x)$. Rovnica (1) platí $\Leftrightarrow$ ak $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$, $\dots$, $\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$ systém obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu.

Príklad 1.1. $D = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1(t, x) = x_1$, $f_2(t, x) = -x_2$ potom $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = -x_2$.

$$\begin{aligned} x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} &\Leftrightarrow \dot{x}_1 = c_1 \lambda e^{\lambda t} = c_1 e^{\lambda t} &\Leftrightarrow \lambda = 1 & x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_2 e^{\mu t} &\Leftrightarrow \dot{x}_2 = c_2 \mu e^{\mu t} = c_2 e^{\mu t} &\Leftrightarrow \mu = -1 & x_2(t) = c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Definícia 1.2. Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ je spojité zobrazenie. Riešenie diferenciálnej rovnice (1) na intervale $I \subset \mathbb{R}$ je také spojité diferencovateľné zobrazenie $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, pre ktoré platí:

1. $(t, \varphi(t)) \in D$, pre $\forall t \in I$.
2. $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$ pre $\forall t \in I$, kde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \left(\frac{d\varphi_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_n(t)}{dt} \right)$, $\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ pre $\forall t \in I$, $i = 1, \dots, n$.

Príklad 1.2. $\frac{dx}{dt} = 1$, $x \in \mathbb{R}$ má nekonečne veľa riešení $x(t) = t + c$. Ale $\frac{dx}{dt} = 1$, $x(0) = 0$ má jediné riešenie $x(t) = t$.

Cauchyho začiatočná úloha:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Pre dané $(t_0, x_0) \in D$ treba nájsť interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0 tj. $t_0 \in I$ a riešenie $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ ktoré splňuje tzv. začiatočnú podmienku $\dot{x}(t_0) = x_0$. Hovoríme tiež, že riešenie x prechádza bodom (t_0, x_0) .

II. VETY O EXISTENCII A JEDNOZNAČNOSTI A GLOBÁLNEJ EXISTENCII RIEŠENÍ

Veta 2.1. *Peanova o existencii*

Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ je spojité zobrazenie. Potom pre každý bod $(t_0, x_0) \in D$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0 na ktorom je definované riešenie $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (2), tj. $\dot{x} = f(t, x)$ $x(t_0) = x_0$.

Definícia 2.1. Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, D je oblasť v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Hovoríme, že zobrazenie f spĺňa v D Lipschitzovu podmienku vzhľadom na premennú x (hovoríme tiež, že f je lipschitzovské v D vzhľadom na x), ak existuje taká konštanta $L > 0$, že platí $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ pre $\forall (t, x), (t, y) \in D$, kde $\|\cdot\|$ je norma v $\mathbb{R}^n$ (napr. euklidovská norma).

Definícia 2.2. Hovoríme, že zobrazenie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, je lokálne lipschitzovské na D vzhľadom na x , ak je splnená podmienka: $\forall (t_0, x_0) \in D$ existujú čísla $a > 0$, $b > 0$ také, že $G = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - t_0| < a, \|x - x_0\| < b\} \subset D$ a $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$, pre $\forall (t, x), (t, y) \in G$, kde $L > 0$ je konštanta.

Veta 2.2. o lokálnej existencii a jednoznačnosti

Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ je spojité zobrazenie a lokálne lipschitzovské na D vzhľadom na x . Potom pre každý bod $(t_0, x_0) \in D$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že na intervale $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je definované práve jedno riešenie začiatočnej úlohy: $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

Otázka: Ako sa nájde lipschitzova konštanta?

Tvrdenie 2.1. Nech $f = (f_1, \dots, f_n) : D = (a, b) \times H \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie, kde $-\infty < a < b < \infty$ a $H \subset \mathbb{R}^n$ je konvexná oblasť pričom funkcia f_i ($i = 1, \dots, n$) má spojité parciálne derivácie $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, ($j = 1, \dots, n$), $(t, x) \in (a, b) \times H$.

$$K = \sup_{\substack{(t, u) \in (a, b) \times H \\ i, j = 1, \dots, n}} \left| \frac{\partial f_i(t, u)}{\partial x_j} \right| < \infty$$

Potom $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$, pre $\forall (t, x), (t, y) \in (a, b) \times H$, kde $L = K \cdot n$ a $\|\cdot\|$ je euklidovská norma.

Dôkaz.

Nech $(t, x), (t, y) \in (a, b) \times H$. Potom $\|f(t, x) - f(t, y)\| = \left[\sum_{i=1}^n (f_i(t, x) - f_i(t, y))^2 \right]^{1/2}$.

$$f_i(t, x) - f_i(t, y) \stackrel{\text{MVT}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(t, c_j)}{\partial x_j} (x_j - y_j) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

kde $\vec{u} = \left(\frac{\partial f_i(t, c_1)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(t, c_n)}{\partial x_n} \right)$; $\vec{v} = x - y$.

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \stackrel{\text{CSB}}{\leq} \left[\sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial f_i(t, c_j)}{\partial x_j} \right)}_{\leq K} \right]^2 \cdot \|x - y\| \leq \sqrt{n} K \|x - y\|$$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \left[\sum_{i=1}^n \underbrace{(f_i(t, x) - f_i(t, y))^2}_{\leq n K^2} \right]^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \leq (n^2 K^2)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| = \underbrace{n K}_{=L} \|x - y\|$$

MVT = Mean value theorem = Veta o strednej hodnote

CSB = nerovnosť Cauchyho-Schwarzova-Bunjakovského

Definícia 2.3. Nech $I \subset \mathbb{R}$ je interval (otvorený) a $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$. Riešenie $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval sa nazýva *predĺžením* riešenia x , ak $I \subset J$ a $x(t) = y(t)$ pre $\forall t \in I$. Ak $I \neq J$, $I \subset J$ potom sa $y(t)$ nazýva *vlastným predĺžením* riešenia $x(t)$. Riešenie $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa nazýva *úplné*, ak neexistuje žiadne jeho vlastné predĺženie. Vtedy I sa nazýva maximálny interval existencie. Riešenie x diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ sa nazýva globálne, ak $I = (-\infty, \infty)$ – maximálny interval existencie.

Veta 2.3. o globálnej existencii

Nech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie splňujúce podmienku, že $\|f(t, x)\| \leq \Phi(t)\omega(\|x\|)$ pre $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, kde $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\int_{v_0}^{\infty} [\omega(\sigma)]^{-1} d\sigma = \infty$, $v_0 > 0$.

III. TECHNIKA RIEŠENÍ NIEKTORÝCH TYPOV DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍČ

1. Triviálne diferenciálne rovnice:

$\dot{x} = f(t)$, $x(t_0) = x_0$, kde $f(t)$ nezávisí od x . Potom $x(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds + x_0$, kde $f = (f_1, \dots, f_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $x(t) = (\int_{t_0}^t f_1(s) ds + \dots + \int_{t_0}^t f_n(s) ds) + x_0$.

2. Separované a separovateľné diferenciálne rovnice:

Separovaná: $\dot{x} = f_1(t)f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Separovateľné: ktoré sa dajú transformovať do separovaných.

Formálny výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = f_1(t)f_2(x) &\Leftrightarrow \frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t)dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{f_2(x)} = \int_{t_0}^t f_1(s)ds + k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_k = F^{-1}\left(\int_{t_0}^t f_1(s)ds + k\right) \end{aligned}$$

Veta 3.1. Nech $f_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie, $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (c, d)$.

Potom platí:

1. Ak $f_2(x_0) = 0$ potom je $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t_0) \equiv x_0$ je riešením začiatkovej úlohy $\dot{x} = f_1(t)f_2(x)$, $x(t_0) = \dot{x}_0$. (pozn. $x(t) \equiv x_0$ je singulárne riešenie.)

2. Ak $f_2(x_0) \neq 0$ pre všetky $x \in (c, d)$ potom pre každé $x_0 \in (c, d)$ existuje riešenie $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ začiatkovej úlohy: $x = f_1(t)f_2(x)$, $x(t_0) = x_0$, kde $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in (c, d)$, $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ a toto má tvar:

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + k), \text{ kde } G(t) = \int_{t_0}^t f_1(s)ds, F(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f_2(s)}, F(x_0) = k$$

IV. LINEÁRNA HOMOGÉNNA DIFERENCIÁLNA ROVNICA (v $\mathbb{R}$)

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = p(t)x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ spojité funkcia.

Veta 4.1. ★

Nech $p(t)$ je spojitá na intervale $I=(a, b)$. Potom platí:

1. Každé riešenie $x(t)$ diferenciálnej rovnice (1) má tvar $x(t)=e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}c$, $t \in I$, $t_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$. (Toto riešenie sa nazýva všeobecné)

2. Pre každé $t_0 \in I$ a každé $x_0 \in \mathbb{R}$ má začiatočná úloha: $\frac{dx}{dt}=p(t)x$, $x(t_0)=x_0$ práve jedno riešenie a toto riešenie $x(t)$ má tvar $x(t)=e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}x_0$.

Dôkaz. Separácia premenných $\frac{dx}{x}=p(t)dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int p(t)dt \Leftrightarrow \ln|x| = \int p(t)dt = \int_{t_0}^t p(s)ds + \ln|c| \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x}{c}\right| = \int_{t_0}^t p(s)ds \Leftrightarrow |x(t)| = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}|c| \quad \textcircled{*}$

$x(t) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in I$. Ak by $\exists \tau \in \mathbb{R} : x(\tau)=0$, potom by $\frac{dx}{dt}=p(t)x$, $x(\tau)=0$ mala 2 rôzne riešenia, a to $x(t)$ a $x_0(t) \equiv 0$ spor s jednoznačnosťou.

$\textcircled{*}$ Ak $x(t) > 0$, tak $|x(t)| = x(t) \quad \forall t \Rightarrow x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}|c|$

Ak $x(t) < 0$, tak $|x(t)| = -x(t) \Rightarrow x(t) = -e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}(-|c|)$.

2. $x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}c$; $x(t_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = x(t_0) = c$.

V. LINEÁRNA NEHOMOGÉNNA DIFERENCIÁLNA ROVNICA (v $\mathbb{R}$)

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + f(t) \quad f(t), p(t) \text{ sú spojité na } I$$

Veta 5.1. Pre každé $t_0 \in I=(a, b)$ a každé $x_0 \in \mathbb{R}$ má začiatočná úloha

$\frac{dx}{dt} = p(t)x + f(t)$, $x(t_0) = x_0$ práve jedno riešenie $x(t)$ a toto riešenie má tvar:

$$x(t) = \underbrace{e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}x_0}_{x_h(t)} + \underbrace{e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau}_{x_p(t)}$$

$x_h(t)$ – riešenie homogénnej rovnice splňujúce $x(t_0) = x_0$.

$x_p(t)$ – partikulárne riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice.

$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \rightarrow$ princíp superpozície riešení.

Dôkaz. Metóda variácie konštanty:

Hľadáme riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice v tvare $x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}c(t)$, kde $c(t)$ je spojitá diferencovateľná na $I=(a, b)$. Dosaďme $x(t)$ do rovnice:

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(t) \underbrace{e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}c(t)}_{x(t)} + e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \frac{dc(t)}{dt} = p(t)x(t) + f(t) \Leftrightarrow$$

$$e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \frac{dc(t)}{dt} = f(t) \quad \frac{dc(t)}{dt} = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} f(t) \text{ triviálna diferenciálna rovnica pre } c$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau + K$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} c(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \cdot \left[\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau + K \right] \quad x_0 = x(t_0) = K$$

$$x(t) = \underbrace{e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} x_0}_{x_h(t)} + \underbrace{e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau}_{x_p(t)}$$

Dôkaz vety ★.

a) *Metódou postupných aproximácií:* $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Z predpokladu existuje $a, b > 0$ také, že f spĺňa lipschitzovskú podmienku v oblasti $G = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset D$. Nech $M = \max_{(t, x) \in G} \|f(t, x)\|$, nech $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Budeme konštruovať postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^\infty$, $x_k : \langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ takú, že $x_k(t) \Rightarrow x(t)$ na I_α , kde $x(t)$ je riešenie začiatočnej úlohy. (pokr.)

Tvrdenie 5.1. $x(t)$ je riešením začiatočnej úlohy $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ na intervale $I_\alpha \Leftrightarrow x(t)$ je spojitá na I_α a $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ pre $\forall t \in I_\alpha$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$:

$$\underbrace{\int_{t_0}^t \frac{dx(s)}{ds} ds}_{x(t) - x(t_0)} = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I_\alpha$$

$\Leftarrow$: Nech $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ a $x(t)$ je spojitá na I_α . Potom $t \mapsto f(t, x(t))$ je spojitá. $\Rightarrow t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ je spojitá diferencovateľná na $I_\alpha \Rightarrow x(t)$ je spojitá diferencovateľná na $I_\alpha \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I_\alpha$ a $x(t_0) = x_0$.

Okrajová úloha je ekvivalentná riešeniu tzv. integrálnej rovnice

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad t \in I_\alpha$$

Pokračujeme v dôkaze vety 4.1★:

Začiatočnú úlohu stačí riešiť pre $t_0 = 0$, lebo po transformácii $t = t_0 + \tau$:

$y(\tau) = x(t_0 + \tau)$

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(\tau + t_0)}{dt} = f(\tau + t_0, x(\tau + t_0)) =: F(\tau, y(\tau)) \quad \frac{dy}{d\tau} = F(\tau, y) \quad y(0) = x(t_0) = x_0$$

Túto začiatočnú úlohu stačí riešiť pre $\tau \geq 0$, lebo po transformácii $\tau = -s$ dostávame

$$\text{pre } z(s) = y(-s) \text{ rovnicu: } \frac{dz(s)}{ds} = \frac{dy(-s)}{d\tau} \cdot (-1) = -F(-s, \underbrace{y(-s)}_{z(s)}) \quad s \geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq 0.$$

Picardova metóda postupných aproximácií:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s) x(s) ds, \quad t \in I_k = \langle 0, b \rangle$$

0-tá aproximácia: $x_0(t) \equiv x_0$.

1. aproximácia: $x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(s)x(s)ds$.

k. aproximácia: $x_k(t) = x_{k-1}(t) + \int_0^t f(s)x(s)ds$.

Najskôr dokážeme, že $(t, x_k(t)) \in G$ pre $\forall t \in I_k, k=1, 2, \dots$.

$\|x_{k+1}(t) - x_0\| = \|\int_0^t f(s, x_k(s))ds\| \leq \int_0^t \|f(s, x_k(s))\|ds \leq$
 $\leq Mb < M\alpha \leq M \min\{a, \frac{b}{M}\} \leq M \frac{b}{M} = b$. Teda $(t, x_{k+1}(t)) \in G$ pre $\forall t \in I_k$,
 $k=0, 1, \dots$. Teraz dokážeme, že $x_k \Rightarrow x$ na I_k . (x_k, x sú spojité.)

$x_k(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + \dots + [x_k(t) - x_{k-1}(t)]$

$\|x_1(t) - x_0(t)\| = \|\int_0^t f(s, x_0(s))ds\| \leq M \cdot t \leq M \cdot h$

$\|x_2(t) - x_1(t)\| = \|\int_0^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))ds\| \leq \int_0^t \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))\|ds \leq$

$\leq \int_0^t L \cdot \|x_1(s) - x_0(s)\|ds = L \int_0^t M s ds = LM \frac{t^2}{2}, t \in I_k$.

$\|x_3(t) - x_2(t)\| \leq L \int_0^t \|x_2(s) - x_1(s)\|ds \leq L \int_0^t LM \frac{s^2}{2}ds = L^2 M \frac{t^3}{3!}$ atď.

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| = L^k \cdot M \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \leq L^k M \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\|x_0\| + \|x_1(t) - x_0(t)\| + \dots + \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \|x_0\| + Mh + LM \frac{h^2}{2!} + L^2 M \frac{h^3}{3!} + \dots +$$

$$+ L^{k-1} M \frac{h^k}{k!} = \|x_0\| + \frac{M}{L} \left[Lh + \frac{(Lh)^2}{2!} + \dots + \frac{(Lh)^k}{k!} \right] \leq \|x_0\| + \frac{M}{L} e^{Lh} \Rightarrow x_k(t) \Rightarrow x(t)$$

na intervale I_k .

$$\underbrace{x_{k+1}(t)}_{\Rightarrow x(t)} = x_0 + \int_0^t f(s, \underbrace{x_k(s)}_{\Rightarrow x(s)})ds \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds \quad \forall t \in I_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad \forall t \in I_k$$

Jednoznačnosť: Nech $u_1(t), u_2(t)$ sú riešenia na I_h , $u_1(t) \neq u_2(t) \Rightarrow$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \left\| \int_0^t [f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))]ds \right\| \leq \int_0^t \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\|ds \leq$$

$$\leq L \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds \leq Lh \underbrace{\max_{0 \leq \tau \leq h} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|}_{=\rho} \Rightarrow \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq Lh\rho \quad \forall t \in I_h$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq \tau \leq h} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| \leq Lh\rho \Leftrightarrow \rho \leq Lh\rho$$

Ak $h > 0$ je také, že $Lh < 1$, tj. $0 < h < \frac{1}{L}$, potom $0 < \rho \leq Lh < \rho$ – spor.

Odhad chyby: $n > m$, $\|x_n(t) - x_m(t)\| = \|[x_n(t) - x_{n-1}(t)] + \dots + [x_{m+1}(t) - x_m(t)]\| \leq$
 $\leq \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| + \dots + \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq L^{n-1} M \frac{h^n}{n!} + L^{n-2} M \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots +$

$$+L^m M \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{M}{L} (Lh)^{m+1} e^{Lh} \quad n \rightarrow \infty : \|x(t) - x_m(t)\| \leq \frac{M}{L} (Lh)^{n+1} e^{Lh}.$$

Nech $Lh < 1$ a $\varepsilon > 0$. Treba nájsť najmenšie m také, aby $\|x(t) - x_m(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in I_h$.

$$\text{Stačí aby } \frac{M}{L} (Lh)^{m+1} e^{Lh} < \varepsilon \Leftrightarrow \log_{Lh} \frac{M}{L} + m + 1 + Lh \log_{Lh} e > \log_{Lh} \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m + 1 > \log_{Lh} \frac{\varepsilon}{e^{Lh} \frac{M}{L}}$$

Tvrdenie 5.2. Nech $C_k = C(I_k, \mathbb{R}^n)$ je množina spojitých zobrazení z intervalu $I_k = \langle 0, k \rangle$ do $\mathbb{R}^n$. Potom platí:

1. Ak $L > 0$, $r > 0$ tak $d_r(f, g) = \max_{t \in I_k} \{e^{-rk} \|f(t) - g(t)\|\}$ je metrika na C_k .
2. (C_k, d_r) je úplný metrický priestor.

Banachova veta. Nech (X, d) je úplný metrický priestor a $F : X \rightarrow X$ je kontraktívne zobrazenie také, že $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$ pre $\forall x, y \in X$. Potom F má práve jeden pevný bod u taký, že $F(u) = u$.

Dôkaz. $u_0 \in X$, $u_{k+1} = F(u_k)$, $u_k \rightarrow u$ tj. $d(u_k, u) = 0$ pre $k \rightarrow \infty$.

$$d(u_n, u_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u) \quad \forall m \geq n \quad m \rightarrow \infty \quad d(u, u_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u)$$

2. dôkaz vety 4.1★ metódou pevného bodu

$x = C_k$; $d = d_L$; $r = L$; $F : C_k \rightarrow C_k$, $F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds$. Hľadáme $x \in C_k$: $F(x) = x$. $x, y \in C_k$:

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} \|F(x)(t) - F(y)(t)\|\} = \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} \underbrace{\|x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds - [x_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds]\|}_{F(x)(t)}\} = \\ &= \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} \underbrace{\|\int_0^t f(s, x(s)) ds - \int_0^t f(s, y(s)) ds\|}_{F(y)(t)}\} \leq \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds\} = \\ &= \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} L \int_0^t e^{Ls} e^{-Ls} \|x(s) - y(s)\| ds\} \leq \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} L d_L(x, y) \int_0^t e^{Ls} ds\} = \\ &= \max_{t \in I_k} \{e^{-Lt} L d_L(x, y) \frac{1}{L} (e^{Lt} - 1)\} = \max_{t \in I_k} \{1 - e^{-Lt}\} d_L(x, y) = (1 - e^{-Lh}) d_L(x, y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_L(F(x), F(y)) \leq (1 - e^{-Lh}) d_L(x, y) \Rightarrow F \text{ je kontraktívne zobrazenie} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F \text{ má jediný pevný bod } F(x) = x. \end{aligned}$$

$$\underbrace{F(x)(t)}_{x(t)} = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I_h; x \in C(\underbrace{\langle a, b \rangle}_{I_h}, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Odhad chyby: $x = x(t)$ - pevné riešenie. $x_m = x_m(t)$ - m -tá aproximácia. $m > n$,

$$\begin{aligned} d_L(x_m, x_n) &\leq \frac{(1 - e^{-Lh})^m}{e^{-Lh}} d_L(x_1, x_0) \Rightarrow d(x_m, x) \leq \frac{(1 - e^{-Lh})^m}{e^{-Lh}} d_L(x_1, x_0) = \\ &= \frac{k^m}{1-k} d_L(x_1, x_0), \text{ kde } k = 1 - e^{-Lh}. \end{aligned}$$

Prípravné úvahy ku dôkazu Peanovej vety.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I_h = \langle 0, h \rangle \quad G = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, f je spojitá, ale nemusí spĺňať lipschitzovskosť.

Kedy možno z postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $x_k \in A \subset C_b = C(I_h, \mathbb{R}^n)$; $I_h = \langle 0, h \rangle$ vybrať konvergentnú podpostupnosť vzhľadom na $d(f, g) = \max_{t \in I_h} \|f(t) - g(t)\|$.

Definícia 5.1. Nech (X, d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva relatívne kompaktná, ak $\bar{A} = A \cup A'$ je kompaktná.

Kritérium pre relatívnu kompaktnosť množiny $A \subset C_h = C(I_h, \mathbb{R}^n)$.

Definícia 5.2. Hovoríme, že množina zobrazení $A \subset C(I, \mathbb{R}^n)$, $(I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R})$ je rovnomerne ohraničená, ak existuje konštanta $k > 0$ taká, že $\|f(t)\| \leq k \quad \forall t \in I \quad \forall f \in A$.

Definícia 5.3. Hovoríme, že $A \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ je rovnomocne spojitá, ak $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taká, že platí: $|t_1 - t_2| < \delta, t_1, t_2 \in I \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon, \forall f \in A$.

Arzelova-Ascoliho Lema:. Nech $A \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ je nekonečná množina, ktorá je rovnomerne ohraničená a rovnomocne spojitá, potom je A relatívne kompaktná.

ε -približné riešenie:

Definícia 5.4. Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť), $\varepsilon > 0$, $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Spojité zobrazenie $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa nazýva ε -približné riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$, ak platí:

1. $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$.
2. $x = x(t)$ je spojitě diferencovateľné zobrazenie na $I \setminus S$, kde $S \subset I$ pozostáva z konečného počtu bodov v ktorých má deriváciu $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ body nespojitosti také,

že ak $t_0 \in S$, potom $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{dx(t)}{dt}$ a $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{dx(t)}{dt}$ existujú, ale sú rôzne.

3. $\|\frac{dx(t)}{dt} - f(t, x(t))\| < \varepsilon \quad \forall t \in I \setminus S$.

Eulerove polygóny: (na intervale $I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$, $\alpha > 0$ pre $\dot{x}(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.
0-tý Eulerov polygón: $x - x_0 = f(t_0, x_0) \cdot (x - x_0)$, $\dot{x}(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$,
 $x_0(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$.

Nech $\delta_m : t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_0 + \alpha$.

1. *Eulerov polygón:* $m=2$: $t_0 < t_1 < t_2 = t_0 + \alpha$.

$x_1(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ pre $t_0 \leq t \leq t_1$.

$x_2(t) = x_1 + f(t_0, x_0)(t_1 - t) + f(t_1, x_1)(t - t_1)$ pre $t_1 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

kde $X_1 = x_1(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - x_0)$.

m-tý Eulerov polygón: (pri delení δ_m)

$X_m(t) = x_m(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, x_m(t_{k-1}))(t - t_{k-1})$ pre $t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad k=1, \dots, n$.

Veta 5.2. Nech $G = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$, $a, b > 0$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazenie. Potom pre $\forall \varepsilon > 0$ existuje ε -približné riešenie začiatkovej úlohy $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ na intervale $I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$, kde $\alpha = \min \{a, \frac{b}{M}\}$,
 $M = \max_{(t, x) \in G} \|f(t, x)\|$.

Dôkaz. f spojité na kompakte G , potom f je rovnomerne spojité na G . Ak $\varepsilon > 0$ je dané, tak ku nemu existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ také, že $(t, u), (s, v) \in G$, $|t-s| < \delta(\varepsilon)$, $\|u-v\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(t, u) - f(s, v)\| < \varepsilon$. Zvoľme delenie $\delta_0 : t_0 < t_0 + \alpha$; $\delta_m : t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_0 + \alpha$, $m > 0$.

$\delta_0 \rightarrow X_0(t)$ 0-tý Eulerov polygón; $\delta_m \rightarrow X_m(t)$ m -tý Eulerov polygón.

Dokážeme, že $(t, x_m(t)) \in G \quad \forall t \in I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$. Nech $t_0 \leq t \leq t_1$. $\|x_m(t) - x_0\| = \|f(t_0, x_0)(t - t_0)\| = (t - t_0)\|f(t_0, x_0)\| \leq M(t - t_0) \leq M\alpha \leq M \frac{b}{M} = b$. Nech $t_1 \leq t \leq t_2 \Rightarrow X_m(t) = x_m(t) + f(t_1, x_m(t_1))(t - t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) + f(t_1, x_m(t_1))(t - t_1) \Rightarrow \|x_m(t) - x_0(t)\| = \|f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) + f(t_1, x_m(t_1))(t - t_1)\| \leq M(t_1 - t_0) + M(t - t_1) = M(t - t_0) \leq M\alpha \leq b$ atď. indukciou.

Platí:

1. $x_m(t)$ je spojité zobrazenie na I_α a derivácia existuje až na konečný počet bodov z I_α .

2. $\left\| \frac{dx_m(t)}{dt} - f(t, x_m(t)) \right\| < \varepsilon \quad \forall t \in I_\alpha$ až na konečný počet bodov z I_α .

Nech $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ a delenie také, že $\max_k \{t_k - t_{k-1}\} \leq \min\{\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\}$

Potom $\|x_m(t) - x_m(t_{k-1})\| = \|f(t_{k-1}, x_m(t_{k-1}))(t - t_{k-1})\| \leq M(t - t_{k-1}) \leq M \frac{\delta(\varepsilon)}{M} = \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left\| \frac{dx_m(t)}{dt} - f(t, x_m(t)) \right\| = \|f(t_{k-1}, x_m(t_{k-1})) - f(t, x_m(t))\| \leq \varepsilon$ ak existuje $\frac{dx_m(t)}{dt} \Rightarrow x_m(t)$ je ε -približné riešenie.

Dôkaz Peanovej vety. Nech $\{\varepsilon_m\}^\infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ (napr. $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$). $X_m(t)$ je

ε -približné riešenie na $I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$. Ukázali sme, že $\|x_m(t) - x_0\| \leq b \quad \forall m \Rightarrow \|x_m(t)\| \leq K = b + \|x_0\| \quad \forall m > 0$ (K nezávisí od m) $\Rightarrow$ množina $A = \{x_m \in C; m > 0; C(I_\alpha, \mathbb{R}^n)\}$ je rovnomerne ohraničená. Ukážeme, že A je rovnomocne spojitá. Nech $t, s \in I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$. $\delta_m : t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_0 + \alpha$. Nech $s < t$. Potom $s \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$, $t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle$, $i > j$.

$\|x_m(t) - x_m(s)\| = \| [x_m(t) - x_m(t_i)] + [x_m(t_i) - x_m(t_{i-1})] + \dots + [x_m(t_{j+1}) - x_m(s)] \| \leq \|x_m(t) - x_m(t_i)\| + \|x_m(t_i) - x_m(t_{i-1})\| + \dots + \|x_m(t_{j+1}) - x_m(s)\| \leq M(t - t_i) + M(t_i - t_{i-1}) + \dots + M(t_{j+1} - s) = M(t - s) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ také, že $|t-s| < \delta \Rightarrow \|x_m(t) - x_m(s)\| < \varepsilon \quad \forall x_m \in A \Rightarrow A$ je rovnomocne spojitá. Z *Ascoli-Arzelovej lemy* vyplýva, že existuje podpostupnosť $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ taká, že $x_{m_k} \rightrightarrows x \in C(I_\alpha, \mathbb{R}^n)$ na I_α . $g_k(t) = x_{m_k}(t)$, $\{g_k\}$, $g_k \rightrightarrows x$, $g_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_k(s)) + \Delta_k(s) ds$.

$\Delta_k(t) = \frac{dg_k(t)}{dt} - f(t, g_k(t))$ ak t je také, že existuje $\frac{dg_k(t)}{dt}$, inde 0. Vieme, že $\|\Delta_k(t)\| \leq \varepsilon_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \Delta_k \rightrightarrows 0 \Rightarrow g_k(t) \rightrightarrows x \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, t \in I_\alpha \Rightarrow$ je riešenie.

Veta o predĺžiteľnosti riešení. Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť) je spojité, ohraničené zobrazenie. Nech $x(t)$ je riešenie začiatočnej úlohy $\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$, kde $(t_0, x_0) \in D$ na intervale $I = \langle a, b \rangle$. Potom existuje $x(a+) = \lim_{t \rightarrow a+} x(t)$ a $\lim_{t \rightarrow b-} x(t) = x(b-)$. Naviac, ak $(b, x(b)) \in D$ (analogicky $(a, x(a)) \in D$.) potom existuje $\beta > 0$ a riešenie $y(t)$, $t \in (\alpha - \beta, b + \beta)$ také, že $y(t) = x(t)$ pre $t \in (a, b)$. ($y(t)$ -spojité predĺženie $x(t)$ na intervale $(a - \beta, b + \beta)$.)

Dôkaz. $x(t) = x_1 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$, $t \in (a, b)$. Nech $M = \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|$. Nech $a < u < v < b$. Potom $x(v) - x(u) = \int_u^v f(s, x(s)) ds \Rightarrow \|x(v) - x(u)\| \leq M(v - u) \Rightarrow \lim_{u,v \rightarrow b-} [x(v) - x(u)] = 0$. Z Cauchyho konvergenčného kritéria $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow b-} x(t)$ existuje. Označme ju $x(b-)$. Analogicky existuje $\lim_{t \rightarrow a+} x(t) = x(a+)$. Predpokladajme, že $(b, x(b-)) \in D$. Definujme $z(t) = \begin{cases} x(t); & t \in (a, b) \\ x(b-); & \text{ak } t = b \end{cases}$. Zrejme $z(t)$ je spojitá na (a, b) . A možno riešiť začiatočnú úlohu $\dot{x} = f(t, x)$; $x(b) = x(b-)$. $\lim_{t \rightarrow a+} x(t) = x(a+)$ existuje z Peanovej vety $\Rightarrow \exists \beta > 0$ také, že začiatočná úloha má riešenie $x(t)$, $t \in (a, b + \beta)$. Analogicky naľavo od a .

VI. LINEÁRNA HOMOGÉNNA DIFERENCIÁLNA ROVNICA V $\mathbb{R}^n$

(1) $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $a_{ij}(t)$ sú spojité na $I = \mathbb{R}$

Algebraická štruktúra riešení diferenciálnej rovnice (1):

Veta 6.1. Množina M riešení diferenciálnej rovnice (1) je n -rozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ sú riešenia, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. $\mathbf{x}(t) = k_1 \mathbf{x}_1(t) + k_2 \mathbf{x}_2(t)$. $\dot{\mathbf{x}}(t) = k_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) + k_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) = k_1 \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_1(t) + k_2 \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}(t) [k_1 \mathbf{x}_1(t) + k_2 \mathbf{x}_2(t)]$. Ukázali sme, že $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M \Rightarrow \mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 \in M \Rightarrow M$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}^n$. Dokážeme, že $\dim(M) = n$. Nech $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je báza jednotkových vektorov v $\mathbb{R}^n$. Nech $\mathbf{x}_i(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice (1) splňujúce začiatočnú podmienku $\mathbf{x}_i(0) = \vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sú lineárne nezávislé, tj. neexistujú $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ také, že $\sum c_i^2 \neq 0$ a $c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$. Nech také konštanty existujú. Potom pre $t = 0$ je $c_1 \mathbf{x}_1(0) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(0) = 0 \Rightarrow \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \forall c_i = 0 \Rightarrow \dim(M) \geq n$.

Nech $\mathbf{y}(t)$ je ľubovoľné riešenie tj. $\mathbf{y} \in M$. Nech $\mathbf{y}(0) = \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Nech $\mathbf{u}(t) = v_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + v_n \mathbf{x}_n(t)$. Zrejme $\mathbf{u} \in M$ a platí: $\mathbf{y}(0) = \mathbf{v} = \mathbf{u}(0)$, lebo $\mathbf{x}_i(0) = \vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Z vety o existencii a jednoznačnosti riešení $\Rightarrow \mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) \quad \forall t \in I$. $\mathbf{u}(t) = v_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + v_n \mathbf{x}_n(t) \Rightarrow \dim(M) \leq n$, ale vieme, že $\dim(M) \geq n \Rightarrow \dim(M) = n$ a $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ je báza v M .

Definícia 6.1. Každú množinu $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ lineárne nezávislých riešení diferenciálnej rovnice (1) nazývame *fundamentálnym systémom* riešení diferenciálnej rovnice (1).

Definícia 6.2. Nech $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ je fundamentálny systém riešení a $\varphi_1(t) = [\varphi_{11}(t), \dots, \varphi_{1n}(t)]^T, \dots, \varphi_n(t) = [\varphi_{n1}(t), \dots, \varphi_{nn}(t)]^T$. Potom sa matica $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = (\varphi_{ij}(t))$ nazýva *fundamentálnou maticou* diferenciálnej rovnice (1).

Tvrdenie 6.1. Fundamentálna matica $\Phi(t)$ je maticovým riešením diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}$, tj. $\dot{\Phi}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \Phi(t)$, kde $\dot{\Phi}(t) = (\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t))$.

Dôkaz. $\dot{\Phi}(t) = [\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t)] = [\mathbf{A}(t) \varphi_1(t), \dots, \mathbf{A}(t) \varphi_n(t)] = \mathbf{A}(t) \Phi(t)$.

Príklad 6.1. $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$. $e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{I}_n + \frac{1}{1!}\mathbf{B}t + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2t^2 + \dots$

$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \frac{1}{1!}\mathbf{A}^2t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2 + \dots = \mathbf{A}(1 + \frac{1}{1!}\mathbf{A} + \dots) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$. $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ tak je to maticové riešenie diferenciálnej rovnice (1). $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

Dokážte, že $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Tvrdenie 6.2. *Liouvilleova formula*

Nech $\Phi(t)$ je maticové riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$. Potom pre každé $t_0 \in \mathbb{R}$ je $\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr} \mathbf{A}(s) ds}$, kde $\text{Tr} \mathbf{A}(s) = a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)$, $\mathbf{A}(s) = (a_{ij}(s))$.

Dôkaz (náznak). $\frac{d}{dt} \det(\Phi(t)) = \det[\dot{\varphi}_1(t), \dots, \varphi_n(t)] + \dots + \det[\varphi_1(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t)] = \mathbf{A}(t)\varphi_1(t) + \dots + \mathbf{A}(t)\varphi_n(t) = \text{Tr} \mathbf{A}(t) \det \Phi(t)$, $\varphi_i(t)$ sú stĺpce matice $\Phi(t)$.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\det(\Phi(t))}_{\mathbf{x}(t)} = \underbrace{\text{Tr} \mathbf{A}(t)}_{p(t)} \underbrace{\det \Phi(t)}_{\mathbf{x}(t)} \quad \dot{\mathbf{x}} = p(t)\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} \mathbf{x}(t_0)$$

Dôsledok. $\det \Phi(t_0) \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ak $\det \Phi(t_0) = 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \equiv 0$.

Veta 6.2.

Začiatková úloha $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ má riešenie tvaru $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$, kde $\Phi(t)$ je fundamentálna matica diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$.

Dôkaz.

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

VII. LINEÁRNA NEHOMOGENNÁ DIFERENCIÁLNA ROVNICA V $\mathbb{R}^n$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad \mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ spojité na $\mathbb{R}$

Veta 7.1. Riešenie začiatkovej úlohy $\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ má tvar:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds$$

Dôkaz. Metóda variácie konštanty:

Hľadáme riešenie v tvare $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t)$, kde $\mathbf{c}(t)$ je spojité diferencovateľná.

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}(t) \underbrace{\Phi(t)\mathbf{c}(t)}_{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{f}(t)$. Dostávame rovnicu pre $\mathbf{c}(t)$:

$$\mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}(t) \underbrace{\Phi(t)\mathbf{c}(t)}_{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \Phi(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) \Rightarrow \mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds + \mathbf{K}, \text{ kde } \mathbf{K} \text{ je konštantný vektor.}$$

$$\text{Máme: } \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t) = \Phi(t)[\mathbf{K} + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds] = \Phi(t)\mathbf{K} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds.$$

$$\mathbf{x}_0 = \Phi(t_0)\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K} = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds.$$

Príklad 7.1 (skúškový!!!).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(t)} \quad \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0 = (2, 1)^T$$

Riešenie: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \gamma + \mathbf{y}(t)$. Hľadáme partikulárne riešenie v tvare:
 $\mathbf{y}(t) \equiv \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ – konštantný. Dosadíme: $\mathbf{0} = \mathbf{A}\alpha + \mathbf{f} \Rightarrow \alpha = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = (1, -4)^T$.
 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \gamma + \alpha = \gamma + (1, -4)^T \Rightarrow \gamma = \mathbf{x}_0 - (1, -4)^T = (2, 1)^T - (1, -4)^T = (1, 5)^T$,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

VIII. LINEÁRNA DIFERENCIÁLNA ROVNICA n -TEHO RÁDU

Homogénna: $L_n u = 0$, nehomogénna: $L_n u = f(t)$, kde

$$L_n u = a_0(t) \frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{du}{dt} + a_n(t) u$$

$a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t), f(t)$ sú spojité skalárne funkcie na $\mathbb{R}$. Ak $a_0(t_0) = 0$ pre nejaké $t_0 \in \mathbb{R}$ – singulárna diferenciálna rovnica; ak $a_0(t) \neq 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$ tak regulárna diferenciálna rovnica. Budeme predpokladať, že $a_0(t) \neq 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$. Potom bez ujmy na obecnosti predpokladajme, že $a_0(t) \equiv 1$. Využijeme teóriu lineárnych diferenciálnych rovníc v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme diferenciálnu rovnicu $L_n u = f(t)$. Napíšeme diferenciálnu rovnicu ako systém: Ozn. $x_1 = u, x_2 = \dot{u} = \frac{du}{dt}, \dots, x_n = \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{u} = x_2$,
 $\dot{x}_2 = \frac{d^2 u}{dt^2} = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} = x_n, \dot{x}_n = \frac{d^n u}{dt^n} = -a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} - \dots - a_n u + f =$
 $= -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 + f$.

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + f \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}(t)$$

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}(t)$$

$$(2) \quad L_n u = 0$$

Tvrdenie 8.1.

1. $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ je riešením diferenciálnej rovnice (1) $\Leftrightarrow x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}}$ a $x_1(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice (2).
2. Ak $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sú riešenia diferenciálnej rovnice (2) $\Rightarrow$ maticové riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ je

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_n(t)}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}x_n(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Definícia 8.1. $W(x_1, \dots, x_n) := \det \Phi(t)$ –Wronského determinant (wronskián).

Riešiť Cauchyho úlohu: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \hat{f}(t)$; $\mathbf{x}(t_0) = \xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}$ je to isté ako riešiť

začiatočnú úlohu $L_n \mathbf{u} = f(t)$; $\mathbf{u}(t_0) = \xi_0$, $\dot{\mathbf{u}}(t_0) = \xi_1$, $\ddot{\mathbf{u}}(t_0) = \xi_2, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}$,

lebo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ je riešením diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \hat{f}(t) \Leftrightarrow \mathbf{u}(t)$ je

riešením diferenciálnej rovnice $L_n \mathbf{u} = f$.

Definícia 8.2. Množina $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lineárne nezávislých riešení diferenciálnej rovnice $L_n \mathbf{u} = 0$ sa nazýva *fundamentálny systém*.

Veta 8.1. Riešenia $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ diferenciálnej rovnice $L_n \mathbf{u} = 0$ sú lineárne nezávislé $\Leftrightarrow$ ak $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sú lineárne nezávislé riešenia, ale $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = 0$ pre nejaké $t_0 \in \mathbb{R}$. Z Liouvilleovej formuly:

$W(x_1, \dots, x_n)(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \Rightarrow W(x_1, \dots, x_n)(t) \equiv 0 \Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \sum c_i^2 \neq 0$ také, že $c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$. Spor s lineárnou nezávislosťou.

$\Leftarrow$: Nech $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$, ale $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sú lineárne závislé. Potom $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \sum c_i^2 \neq 0$ také, že $c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 \dot{x}_1(t) + \dots + c_n \dot{x}_n(t) = 0, \dots, c_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n x_n^{(n-1)}(t) = 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$. Homogénny systém algebraických rovníc pre neznáme $c_1, \dots, c_n$. Ak jeho determinant (=Wronskián) je nenulový $\Rightarrow c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ –spor.

Veta 8.2. Nech $x_1(t), \dots, x_n(t)$ je fundamentálny systém riešení homogénnej diferenciálnej rovnice $L_n \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n)} + a_1(t)\mathbf{u}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{\mathbf{u}} + a_n(t)\mathbf{u} = 0$. Potom riešenie $\mathbf{x}(t)$ Cauchyho úlohy $L_n \mathbf{x} = f(t)$, $x(t_0) = \xi_0$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \xi_1, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}$ má tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k(t) \int_{t_0}^t \frac{W_k(x_1, \dots, x_n)(s)}{W(x_1, \dots, x_n)(s)} f(s) ds$$

kde $W(x_1, \dots, x_n)$ je wronskián riešení $x_1(t), \dots, x_n(t)$. $W_k(x_1, \dots, x_n)(t)$ je definované takto:

$$W_1(x_1, \dots, x_n)(t) = \det \begin{bmatrix} 0 & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ 0 & \dot{x}_2(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{(n-2)}(t) & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \\ 1 & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \dots,$$

$$W_n(x_1, \dots, x_n)(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & 0 \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \cdots & 0 \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}(t)$ je riešením Cauchyho začiatočnej úlohy $L_n \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u}(t_0) = \xi_0, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}$

Dôkaz. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \hat{f}(t)$, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ fundamentálny systém pre diferenciálnu rovnicu $L_n \mathbf{u} = 0$. Potom

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

fundamentálna matica pre $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \hat{f}(t)$. Nech $z(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice

$L_n \mathbf{u} = 0$. Potom $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$ riešenie začiatočnej úlohy pre systém

$\mathbf{v}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$. $\Phi(t) = (\varphi_{ij}) = (x_j^{(i-1)}(t))$. $\mathbf{X}_{ij}$ -algebraický doplnok.

$$\Phi^{-1}(t) = \text{diag}(\mathbf{X}_{11}(t), \dots, \mathbf{X}_{nn}(t)) \quad \mathbf{v}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi + \mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{w}(t) = [x_j^{(i-1)}(t)] \int_{t_0}^t \frac{1}{W(x_1, \dots, x_n)(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11}(s) & \cdots & \mathbf{X}_{n1}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{1n}(s) & \cdots & \mathbf{X}_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \int_{t_0}^t \frac{1}{W(x_1, \dots, x_n)(s)} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n1}(s)f(s) \\ \mathbf{X}_{n2}(s)f(s) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{nn}(s)f(s) \end{pmatrix} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \int_{t_0}^t \frac{W_k(x_1, \dots, x_n)(s)}{W(x_1, \dots, x_n)(s)} f(s) ds$$

Metóda variácie konštánt:

$$L_2 \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} + a_1(t)\dot{\mathbf{u}} + a_2(t)\mathbf{u} = f(t) \text{ homogénna: } \ddot{\mathbf{x}} + a_1(t)\dot{\mathbf{x}} + a_2(t)\mathbf{x} = 0$$

Nech $x_1(t), x_2(t)$ sú riešenia. Všeobecné riešenie homogénnej rovnice: $\mathbf{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Hľadáme riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice v tvare: $\mathbf{u}(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t)$, $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ sú spojité diferencovateľné, zatiaľ neznáme. $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\alpha}_1(t)x_1(t) + \alpha_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t)x_2(t) + \alpha_2(t)\dot{x}_2(t)$. Zvoľme $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ tak, že $\dot{\alpha}_1(t)x_1(t) + \dot{\alpha}_2(t)x_2(t) = 0$ pre $\forall t \in \mathbb{R}$. $\ddot{\mathbf{u}} = \dot{\alpha}_1\dot{x}_1 + \alpha_1\ddot{x}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{x}_2 + \alpha_2\ddot{x}_2$. Za $\ddot{x}_1$ a $\ddot{x}_2$ dosadíme z homogénnej diferenciálnej rovnice:

$$\begin{aligned} L_2 \mathbf{u} = f &\Rightarrow \dot{\alpha}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2 = 0 \\ \dot{\alpha}_1 \dot{x}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{x}_2 = f \end{cases} \\ \dot{\alpha}_1(t) &= \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)} \\ \dot{\alpha}_2(t) &= \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{vmatrix} = \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)} \\ \Rightarrow \alpha_1(t) &= c_1 - \int_{t_0}^t \frac{x_2(s)f(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds \quad \alpha_2(t) = c_2 + \int_{t_0}^t \frac{x_1(s)f(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds \\ \mathbf{u}(t) &= \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t) = \underbrace{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)}_{\text{vš. rieš. } L_2 \mathbf{u} = 0} + \\ &+ x_1(t) \int_{t_0}^t \frac{-x_2(s)f(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^t \frac{x_1(s)f(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds \end{aligned}$$

Ak by sme mali začiatočnú podmienku $\mathbf{u}(t_0) = \xi_0$, $\dot{\mathbf{u}}(t_0) = \xi_1$, tak $c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = \xi_0$. Zderivovaním $\dot{\mathbf{u}}(t)$ dostaneme: $c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = \xi_1$.

Lineárne diferenciálne rovnice n -teho rádu s konštantnými koeficientami.

$$(1) \quad L_n \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n)} + a_1 \mathbf{u}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{\mathbf{u}} + a_n \mathbf{u} = 0 \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ resp. } \mathbb{C}$$

Poznámka. Pod komplexným riešením diferenciálnej rovnice (1) rozumieme funkcie $\mathbf{u}(t) = u_1(t) + i u_2(t)$ (s hodnotami v $\mathbb{C}$). $u_1(t), u_2(t)$ sú reálne riešenia diferenciálnej rovnice (1).

Platí. Ak $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i \varphi_2(t)$ s hodnotami v $\mathbb{R}$, potom $L_n \varphi = L_n \varphi_1 + i L_n \varphi_2 \Rightarrow L_n \varphi = 0 \Leftrightarrow L_n \varphi_1 = 0 = L_n \varphi_2$ tj. φ je komplexným riešením diferenciálnej rovnice (1) $\Leftrightarrow$ ak φ_1, φ_2 sú reálne riešenia diferenciálnej rovnice (1).

Leibnizova formula. Ak $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ sú n -krát diferencovateľné, potom:

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})^{(n)} = \mathbf{u}^{(n)}\mathbf{v} + \binom{n}{1}\mathbf{u}^{(n-1)}\dot{\mathbf{v}} + \binom{n}{2}\mathbf{u}^{(n-2)}\ddot{\mathbf{v}} + \dots + \binom{n}{n-1}\dot{\mathbf{u}}\mathbf{v}^{(n-1)} + \mathbf{u}\mathbf{v}^{(n)}$$

Definícia 8.3. Polynóm $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ sa nazýva *charakteristický polynóm* diferenciálnej rovnice (1).

Z Leibnizovej formuly:

$$\begin{aligned} L_n(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t)) &= [e^{\lambda t}\mathbf{v}(t)]^{(n)} + a_1(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t))^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t))' + a_n e^{\lambda t}\mathbf{v}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \left[P(\lambda)\mathbf{v}(t) + \frac{P^{[1]}(\lambda)}{1!}\mathbf{v}'(t) + \dots + \frac{P^{[n-1]}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{v}^{(n-1)}(t) + \frac{P^{[n]}(\lambda)}{n!}\mathbf{v}^{(n)}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\text{kde } \frac{d^i \mathbf{v}(t)}{dt^i} = \mathbf{v}^{(i)}(t) \text{ a } p^{[i]}(\lambda) = \frac{d^i P(\lambda)}{d\lambda^i}.$$

$$\begin{aligned} L_2(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t)) &= (e^{\lambda t}\mathbf{v}(t))^{(2)} + a_1(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t))^{(1)} + a_2(e^{\lambda t}\mathbf{v}(t)) = \\ &= (e^{\lambda t})^{(2)}\mathbf{v}(t) + 2(e^{\lambda t})'\mathbf{v}'(t) + e^{\lambda t}\mathbf{v}''(t) + a_1(e^{\lambda t})'\mathbf{v}(t) + a_1 e^{\lambda t}\mathbf{v}'(t) + a_2 e^{\lambda t}\mathbf{v}(t) = \\ &= \lambda^2 e^{\lambda t}\mathbf{v}(t) + 2\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}'(t) + \mathbf{v}''(t)e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}(t) + a_1 e^{\lambda t}\mathbf{v}'(t) + a_2 e^{\lambda t}\mathbf{v}(t) = \\ &= e^{\lambda t}[(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mathbf{v}(t) + (2\lambda + a_1)\mathbf{v}'(t) + \mathbf{v}''(t)] \end{aligned}$$

Veta 8.3. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sú navzájom rôzne korene charakteristického polynómu $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Pričom násobnosť koreňa λ_i je m_i .

$\sum_{i=1}^s m_i = n$. Potom fundamentálny systém riešení (vo všeobecnosti komplexných) diferenciálnej rovnice (1) je:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{t\lambda_1}; \quad x_2(t) = t e^{t\lambda_1}, \dots, x_{m_1}(t) = t^{m_1-1} e^{t\lambda_1} \\ x_{m_1+1}(t) &= e^{t\lambda_2}; \dots; x_{m_1+m_2}(t) = t^{m_2-1} e^{t\lambda_2} \\ &\vdots \\ x_{m_1+\dots+m_{s-1}+1}(t) &= e^{t\lambda_s}; \dots; x_{m_1+\dots+m_s}(t) = t^{m_s-1} e^{t\lambda_s} \end{aligned}$$

Dôkaz. Najskôr ukážeme, že ak η je koreň $P(\lambda)$ násobnosti k , potom sú funkcie $e^{\eta t}$, $t e^{\eta t}$, $\dots$, $t^{k-1} e^{\eta t}$ riešeniami diferenciálnej rovnice (1). Nech $0 \leq i \leq k-1$, potom

$$\begin{aligned} L_n(t^i e^{\eta t}) &= e^{\eta t} \left[\underbrace{P(\eta)}_{=0} \cdot t^i + \frac{1}{1!} \underbrace{P^{[1]}(\eta)}_{=0} (t^i)' + \dots + \frac{1}{i!} \underbrace{P^{[i]}(\eta)}_{=0} (t^i)^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P^{[i+1]}(\eta)}{(i+1)!} \underbrace{(t^i)^{(i+1)}}_{=0} + \dots + \frac{P^{[n]}(\eta)}{n!} \underbrace{(t^i)^{(n)}}_{=0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Dokážeme, že $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sú lineárne nezávislé. Stačí dokázať, že ich wronskián $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ pre $t=0$. Nech:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(0) = \begin{vmatrix} x_1(0) & \dots & x_n(0) \\ x_1^{(1)}(0) & \dots & x_n^{(1)}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(0) & \dots & x_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Potom existujú konštanty $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ nie všetky nulové také, že $b_0 x_j(0) + b_1 x_j^{(1)}(0) + \dots + b_{n-1} x_j^{(n-1)}(0) = 0$ pre $j=1, 2, \dots, n$. Definujme $Q(\lambda) := b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_{n-1} \lambda^{n-1}$, $\deg Q = n-1$ a polynóm $Q(\lambda)$ má n koreňov (vrátane ich násobnosti) – spor.

Iný dôkaz: Nech sú $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sú lineárne závislé; potom existujú konštanty $c_{11}, \dots, c_{1m_1-1}, c_{21}, \dots, c_{2m_2-1}, \dots, c_{s1}, \dots, c_{sm_s-1}$ nie všetky nulové také, že

$$c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}te^{\lambda_1 t} + \dots + c_{1m_1-1}t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{sm_s-1}t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_s(t)e^{\lambda_s t} = 0 \quad \deg P_i(t) = m_i - 1$$

Nie všetky P_i sú $\equiv 0$. Bez ujmy na obecnosti predpokladajme, že $P_s(t) \neq 0$.

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + P_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} \equiv 0$$

Derivujme m_1 -krát:

$$P_{21}(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + P_{s1}(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} \equiv 0 \quad \deg P_{i1} = m_i - 1$$

Po s takýchto procedúrach dostávame, že $P_{ss}(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1 - \dots - \lambda_{s-1})t} \equiv 0$.

Spor, lebo $\deg P_{ss} = m_s - 1$.

Veta 8.4. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sú ($1 \leq s \leq n$) korene charakteristického polynómu $P(\lambda)$ diferenciálnej rovnice (1), λ_i má násobnosť m_i . $\sum m_i = n$. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sú reálne a $\lambda_{k+1} = \alpha_{k+1} + i\beta_{k+1}, \dots, \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ sú komplexné. Potom fundamentálny systém reálnych riešení je: $e^{t\lambda_i}, te^{t\lambda_i}, \dots, t^{m_i-1}e^{t\lambda_i}$, ($i=1, 2, \dots, k$), $e^{t\alpha_j} \cos(\beta_j t), \dots, t^{m_j-1}e^{t\alpha_j} \cos(\beta_j t), e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t), \dots, t^{m_j-1}e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t)$, $j=k+1, \dots, \frac{s+k}{2}$.

Príklad. $n=2$ $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

Komplexné riešenia: $u(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, $v(t) = e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$,

reálne riešenia: $u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$, $u_1(t) = \frac{u+v}{2}$, $u_2(t) = \frac{u-v}{2i}$.

$$0 \neq \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \frac{u+v}{2} & v \\ \frac{u'+v'}{2} & v' \end{vmatrix} = 4i \begin{vmatrix} \frac{u+v}{2} & \frac{u-v}{2i} \\ \frac{u'+v'}{2} & \frac{u'-v'}{2i} \end{vmatrix} = 4i \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}$$

IX. SYSTÉMY LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍČ S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= a_{11}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n &= a_{n1}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad \text{Označme } \mathbf{A} = [(a_{ij})] \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lineárna transformácia: $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{T} \in \mathfrak{M}_{nn}$ je regulárna matica. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ riešenie $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} : \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} \Rightarrow$

$$(3) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

Definícia 9.1. Hovoríme, že systémy (2), (3) sú *ekvivalentné*.

Veta 9.1. Systém $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ je ekvivalentný so systémom $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{B}\mathbf{y}$, kde $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ je Jordanova forma matice $\mathbf{A}$ tj.

$$\mathbf{B}=\mathbf{J}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{D}} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{S}_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{S}_k} \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{D}, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k)$$

$$\text{kde } \mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \lambda_{m_j} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{m_j} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m_j} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m_j} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{m_j m_j} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$j=1, 2, \dots, k$ a $m+m_1+\dots+m_k=n$. λ_i sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. Teda systém $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{B}\mathbf{y}$ má tvar $\dot{\mathbf{y}}_1=\lambda_1\mathbf{y}_1, \dots, \dot{\mathbf{y}}_m=\lambda_m\mathbf{y}_m$. Výpočet matice $\mathbf{T}$ ak $\mathbf{A}$ má všetky vlastné hodnoty navzájom rôzne. V tomto prípade

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$\mathbf{T}=[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n]=?$ ($\mathbf{T}_i$ sú stĺpce). $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{T}$.

$\mathbf{T}\mathbf{B}=[\lambda_1\mathbf{T}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{T}_n]$, $\mathbf{A}\mathbf{T}=[\mathbf{A}\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{T}_n]$. Rovnosť $\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}\mathbf{B}$ nastáva práve vtedy, keď $\mathbf{A}\mathbf{T}_i=\lambda_i\mathbf{T}_i$ pre $\forall i$. $\det \mathbf{T} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{T}_i \neq 0$ pre $\forall i=1, 2, \dots, n$.

Tvrdenie 9.1. Pre všetky $i=1, 2, \dots, n$ je $\mathbf{T}_i$ vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúci vlastnému číslu λ_i .

Riešme Cauchyho úlohu $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$.
 $\mathbf{y}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{J}(\mathbf{A})=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{B}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0=: \mathbf{y}_0$.

$$\mathbf{y}(t)=e^{\mathbf{B}t}\mathbf{y}_0=(\mathbf{I}+\mathbf{B}t+\frac{1}{2!}(\mathbf{B}t)^2+\dots)\mathbf{y}_0=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{B}t)^k\frac{1}{k!}\right)\mathbf{y}_0=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \mathbf{y}_0 = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \mathbf{y}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t)=\mathbf{T}\mathbf{y}(t)=\mathbf{T}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

Poznámka. $e^{\mathbf{B}t}=e^{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})t}=\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}$.

Príklad. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Vlastné hodnoty $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3 \Rightarrow$ vlastné vektory $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_1=(1, 1)^T$,

$\mathbf{T}_2 = (3, 4)^T \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \cdot \text{diag}(e^{-2t}, e^{-3t}) \mathbf{T}^{-1}$. Hľadáme riešenie v tvare $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \gamma$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ je parameter a γ je nenulový vektor.

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda e^{\lambda t} \gamma = \mathbf{A}(e^{\lambda t} \gamma) \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow e^{\lambda t} [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] \gamma = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \gamma = 0$$

tj. algebraická rovnica $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0$ má netriviálne riešenie γ . To platí práve vtedy, keď $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ – charakteristická rovnica pre diferenciálnu rovnicu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$. Teda $\mathbf{A} \gamma = \lambda \gamma$, tj. γ je vlastný vektor patriaci k λ .

Veta 9.2. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$, ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) a $\gamma_i \neq 0$ je vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ_i , pričom $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sú lineárne nezávislé. Potom fundamentálny systém riešení (vo všeobecnosti komplexných) diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ je: $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \gamma_1, \dots, \mathbf{x}_n(t) = e^{\lambda_n t} \gamma_n$.

Dôkaz. Ukázali sme, že $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sú riešenia. Lineárna nezávislosť je triviálna:

$$\det[\underbrace{e^{\lambda_1 t} \gamma_1, \dots, e^{\lambda_n t} \gamma_n}_{\text{stĺpce}}] = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \det[\gamma_1, \dots, \gamma_n] \neq 0 \quad \forall t \text{ lebo } \det[\gamma_1, \dots, \gamma_n] \neq 0$$

Výpočet reálnych riešení z komplexných

$e^{\lambda t} \gamma$ – komplexné riešenie. $\lambda = \sigma + i\omega$, $\omega \neq 0$, $\gamma = g + ih$, $h \neq 0$. $e^{\lambda t} \gamma = e^{(\sigma + i\omega)t} (g + ih) = e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) (g + ih) = e^{\sigma t} [(g \cos \omega t - h \sin \omega t) + i(h \cos \omega t + g \sin \omega t)]$. Reálne riešenia: $\mathbf{u}(t) = \Re(e^{\lambda t} \gamma) = e^{\sigma t} (g \cos \omega t - h \sin \omega t)$; $\mathbf{v}(t) = \Im(e^{\lambda t} \gamma) = e^{\sigma t} (h \cos \omega t + g \sin \omega t)$.

Veta 9.3. Nech $\lambda = \sigma + i\omega$, $\omega \neq 0$ je k -násobný koreň charakteristickej rovnice pre diferenciálnu rovnicu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, tj. polynóm $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, pričom k nemu existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov: $\xi_1 = g_1 + ih_1, \dots, \xi_k = g_k + ih_k$. Potom množina riešení tvaru $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t) e^{\sigma t}$, (kde $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú vektory) je vektorový podpriestor množiny všetkých riešení dimenzie $2k$, pričom jej báza je $\mathbf{u}_1(t) = (g_1 \cos \omega t - h_1 \sin \omega t) e^{\sigma t}; \dots; \mathbf{u}_k(t) = (g_k \cos \omega t - h_k \sin \omega t) e^{\sigma t}; \mathbf{v}_1(t) = (h_1 \cos \omega t + g_1 \sin \omega t) e^{\sigma t}; \dots; \mathbf{v}_k(t) = (h_k \cos \omega t + g_k \sin \omega t) e^{\sigma t}$.

Dôkaz. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sú riešenia to je jasné.

Lineárna nezávislosť: Nech existujú $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$; $\sum (c_i^2 + d_i^2) \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_k \mathbf{u}_k(t) + d_1 \mathbf{v}_1(t) + \dots + d_k \mathbf{v}_k(t) = 0 &\Leftrightarrow (c_1 g_1 + \dots + c_k g_k + d_1 h_1 + \dots + d_k h_k) e^{\sigma t} \cos \omega t - \mathbf{i} (c_1 h_1 + \dots + c_k h_k - d_1 g_1 - \dots - d_k g_k) e^{\sigma t} \sin \omega t = 0 \\ &\Leftrightarrow (c_1 g_1 + \dots + c_k g_k + d_1 h_1 + \dots + d_k h_k) e^{\sigma t} \cos \omega t = 0 \wedge (c_1 h_1 + \dots + c_k h_k - d_1 g_1 - \dots - d_k g_k) e^{\sigma t} \sin \omega t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2\omega} \wedge t = 0 \Rightarrow (c_1 - i d_1) \underbrace{(g_1 + i h_1)}_{\xi_1} + \dots + (c_k - i d_k) \underbrace{(g_k + i h_k)}_{\xi_k} = 0. \end{aligned}$$

Spor s lineárnou nezávislosťou $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Riešenie pomocou zovšeobecnených vlastných vektorov:

Definícia 9.2. Vektor $\mathbf{v}$ sa nazýva *zovšeobecnený vlastný vektor* rádu p matice $\mathbf{A}$ prislúchajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ ak platí: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{v} = 0$ a $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-1} \mathbf{v} \neq 0$.

Označme: $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-1} \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-2} \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}_{p-1} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}$. Platí: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = 0$, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_{p-1} = \mathbf{v}_{p-2}$, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p-1}$, kde $\mathbf{v}_1$ je vlastný vektor.

Definícia 9.3. Usporiadanú p -ticu $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ nazývame *reťazec* zovšeobecnených vlastných vektorov rádu (dĺžky) p matice $\mathbf{A}$ vytvorený vektorom $\mathbf{v}$; $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{v} = 0$; $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-1} \mathbf{v} \neq 0$.

Veta 9.4. Nech $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúce vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ vytvorený vlastným vektorom $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Potom vektorové funkcie (vo všeobecnosti komplexné) $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}$,

$$\mathbf{w}_2(t) = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t) e^{\lambda t}, \dots, \mathbf{w}_k(t) = \left(\mathbf{v}_k + \frac{1}{1!} \mathbf{v}_{k-1} t + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{v}_1 t^{k-1} \right) e^{\lambda t}, \dots,$$

$\mathbf{w}_m(t) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i!} \mathbf{v}_i t^{m-i} \right) e^{\lambda t}$ sú riešeniami diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ktoré sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Lineárna nezávislosť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$:

$m=2$: Nech $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sú lineárne závislé. Potom $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Potom $c_1 \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_1}_{=0} + c_2 \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_2}_{=\mathbf{v}_1} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ – spor.

$m=3$: $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = 0$, $\sum c_i^2 \neq 0$.

$$c_1 \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_1}_0 + c_2 \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1} + c_3 \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_3}_{\mathbf{v}_2} = 0 \Rightarrow c_2 \mathbf{v}_1 + c_3 \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_2 (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 + c_3 (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Lineárna nezávislosť funkcií $\mathbf{w}_1(t), \dots, \mathbf{w}_m(t)$ vyplýva z toho, že $\mathbf{w}_i(0) = \mathbf{v}_i$ pre $\forall i$.

Dokážeme, že $\mathbf{w}_1(t), \dots, \mathbf{w}_m(t)$ sú riešenia diferenciálnej rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Platí: $\dot{\mathbf{w}}_1(t) = \lambda \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} = \lambda \mathbf{w}_1(t) = \mathbf{A} \mathbf{w}_1(t)$, lebo $\mathbf{v}_1$ je vlastný vektor.

$$\dot{\mathbf{w}}_2(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t) \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\mathbf{w}}_2(t) = \lambda \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \text{ atď. } \dot{\mathbf{w}}_m = \lambda \mathbf{w}_m + \mathbf{w}_{m-1}.$$

$\mathbf{A} \mathbf{w}_2 = \mathbf{A}[(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t) e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v}_2 + e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v}_1 t = e^{\lambda t} (\lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) + e^{\lambda t} t \lambda \mathbf{v}_1 = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 + e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t} = \lambda (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t) e^{\lambda t} + \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}$, $\mathbf{A} \mathbf{w}_2 = \lambda \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \Rightarrow \dot{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{A} \mathbf{w}_2$. Ak $\mathbf{w}_k(t)$ je komplexné riešenie, tak reálne riešenia sú: $\mathbf{x}_k(t) = \Re(\mathbf{w}_k(t))$, $\mathbf{y}_k(t) = \Im(\mathbf{w}_k(t))$.

Poznámka. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_n + \frac{1}{1!}(\mathbf{A}t) + \dots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \dots$.

$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n) = 0$. Podľa *Cayley-Hamiltonovej vety* $\Rightarrow \mathbf{A}^n = -c_1 \mathbf{A}^{n-1} - \dots - c_{n-1} \mathbf{A} + c_n \mathbf{I}_n$. Potom $\mathbf{A}^k$ pre $k \geq n$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu matíc $\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$, teda existujú funkcie (s hodnotami v $\mathbb{R}$) $\mathbf{b}_0(t), \mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_{n-1}(t)$ také, že $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{b}_0(t) \mathbf{I}_n + \mathbf{b}_1(t) \mathbf{A} + \dots + \mathbf{b}_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

1. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne vlastné čísla matice $\mathbf{A}$. $\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Potom $e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{T} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} [\mathbf{b}_0(t) + \dots + \mathbf{b}_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}] \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{b}_0(t) \mathbf{I}_n + \dots + \mathbf{b}_{n-1}(t) \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{B}^{n-1}}$.

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0(t) \lambda_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{b}_n(t) \lambda_n^i \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda_i t} = \mathbf{b}_0(t) + \mathbf{b}_1(t) \lambda_i + \dots + \mathbf{b}_{n-1}(t) \lambda_i^{n-1} \quad i=1, 2, \dots, n$$

systém lineárnych algebraických rovníc o neznámich $\mathbf{b}_0(t), \dots, \mathbf{b}_{n-1}(t)$. Jeho determinant je *Vandermondov determinant* a ten je nenulový.

2. Ak λ je k -násobný koreň charakteristického polynómu. Máme jednu rovnicu:

$\mathbf{b}_0(t) + \mathbf{b}_1(t)\lambda + \dots + \mathbf{b}_{n-1}(t)\lambda^{n-1} = e^{\lambda t}$. Derivujme podľa λ :

$$\mathbf{b}_1(t) + 2\mathbf{b}_2(t)\lambda + \dots + (n-1)\mathbf{b}_{n-1}(t)\lambda^{n-2} = te^{\lambda t}, \dots,$$

$$(k-1)!\mathbf{b}_{k-1}(t) + \dots + (n-k) \dots (n-1)\mathbf{b}_{n-1}(t) \cdot \lambda^{n-k-1} = t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

Ak to urobíme pre každé vlastné číslo matice $\mathbf{A}$, tak dostaneme n rovníc o neznámich $\mathbf{b}_0(t), \dots, \mathbf{b}_{n-1}(t)$.