

LINEÁRNA ALGEBRA A GEOMETRIA

PRVÝ ROČNÍK, LETNÝ SEMESTER

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského

OBSAH

I. Afinný priestor (nad $\mathbb{R}$)	2
II. Lineárne transformácie vektorových priestorov	21
III. Kvadratické formy	33
IV. Homogénne bilinéarne formy	38
V. Krivky 2. rádu	41
VI. Duálny vektorový priestor a základy multilineárnej algebry	43

REFERENCIE

1. M.Hejný, V.Zaťko, P.Kršňák, *Geometria 1*, SPN, Bratislava, 1985.
2. T.Katriňák, M.Gavalec, E.Gedeonová, J.Smítal, *Algebra a teoretická aritmetika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 1999.
3. G.Birkhoff, S.MacLane, *Prehľad modernej algebry*, ALFA, Bratislava, 1979.
4. A.I.Kostrikin, Y.I.Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Gordon & Breach, New York, 1989.
5. A.K.Faddejev, J.S.Sominskij, *Zbierka úloh z vyššej algebry*, ALFA, Bratislava, 1968.
6. I.V.Proskurjakov, *Problems in Linear Algebra*, Mir, Moscow, 1978.
7. A.I.Kostrikin, *Exercises in Algebra; A Collection of Exercises in Algebra; Linear Algebra and Geometry*, Gordon & Breach, New York, 1996.

I. AFINNÝ PRIESTOR (NAD $\mathbb{R}$)

Poznámka. afinita = spriaznenosť

Definícia 11.1. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina, ktorej prvky budeme označovať $A, B, \dots, X$ a budeme ich nazývať *bodmi*, a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ sa nazýva *afinný priestor*, ak body z $\mathcal{B}$ a vektory z V sú "spriaznené" podľa nasledujúcich pravidiel:

1° Pre každú usporiadanú dvojicu $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor z V , ktorý potom označíme $\overrightarrow{XY}$ (nazýva sa vektor prislúchajúci k dvojici $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$).

2° Pre každý $X \in \mathcal{B}$ a každý $\vec{x} \in V$ existuje jediný bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$.

3° Pre každé $X, Y, Z \in \mathcal{B}$: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Ak $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor a $\dim(V)=n$, tak hovoríme, že $\dim(\mathcal{A})=n$. (Ináč: $\mathcal{A}$ je n -rozmerný afinný priestor.)

Príklady.

1. $\mathcal{B}=\{B\}$, $V=\{\vec{0}\}$. $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je nulározmerný afinný priestor.

2. $\mathcal{B}$ = množina bodov O_{xy} , V = vektorový priestor orientovaných úsečiek so začiatkom v O . $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ priradíme jediný vektor $\vec{x} \in V$, ktorý dostaneme tak, že orientovanú úsečku $\overrightarrow{XY}$ posunieme do bodu O . Axiómy afinného priestoru:

1° $\checkmark$ 2° $\checkmark$ 3° $\checkmark$.

$\mathcal{B}$ je bodová, V je vektorová zložka afinného priestoru.

3. Nech $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$, $V=\mathbb{R}^n$. 1°: Usporiadanej dvojici $(A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, kde $A=(a_1, \dots, a_n)$, $B=(b_1, \dots, b_n)$ priradíme vektor $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, \dots, b_n-a_n)$. 2°: Pre ľubovoľný bod $X=(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$ a ľubovoľný $\vec{a}=(a_1, \dots, a_n) \in V$ je $Y=(x_1+a_1, \dots, x_n+a_n) \in \mathcal{B}$ ten jediný bod, pre ktorý platí $\vec{a}=\overrightarrow{XY}$. 3°: $X=(x_1, \dots, x_n)$, $Y=(y_1, \dots, y_n)$, $Z=(z_1, \dots, z_n)$. $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y_1-x_1, \dots, y_n-x_n) + (z_1-y_1, \dots, z_n-y_n) = (z_1-x_1, \dots, z_n-x_n) = \overrightarrow{XZ}$ $\checkmark$. Teda $\mathcal{A}=(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je n -rozmerný afinný priestor.

4.

$$\text{Nech } (N) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \text{ je riešiteľný nehomogénny systém lineárnych}$$

rovníc nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ = množina všetkých riešení systému (N) . V = vektorový priestor všetkých riešení príslušného homogénneho systému. 1°: pre $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ definujeme $\overrightarrow{XY} = Y - X \in V$ je to riešenie príslušného homogénneho systému. 2°: pre ľubovoľný $A \in \mathcal{B}$ a ľubovoľný $\vec{a} \in V$ bude $A + \vec{a} = B \in \mathcal{B}$ jediný bod taký, že $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

3°: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = Y - X + Z - Y = Z - X = \overrightarrow{XZ}$.

Teda $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor dimenzie $n-h$ (matice systému).

Veta 11.1. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Potom:

1. $\overrightarrow{XX} = \vec{0} \in V$ pre $\forall X \in \mathcal{B}$.
2. Ak $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ST}$, tak $\overrightarrow{XS} = \overrightarrow{YT}$.
3. $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$ pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$.

Dôkaz.

1. $\overrightarrow{XX} + \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XX}$, preto $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$.
2. Predpokladajme, že $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ST}$. Potom $\overrightarrow{XS} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YS} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{YS} = \overrightarrow{YS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{YT}$.
3. $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$. Preto $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.

□

Iná definícia afinného priestoru:

Definícia 11.1*. Afinným priestorom rozumieme trojicu: $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V, +)$, kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina (jej prvky sú body) a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (jeho prvky sú vektory) a $+$ je zobrazenie z $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, ktoré každej usporiadanej dvojici $(X, \vec{a}) \in \mathcal{B} \times V$ priradí jediný prvok z $\mathcal{B}$, ktorý potom označíme $X + \vec{a}$, pričom musia byť splnené podmienky:

1*: $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$ pre každé $X \in \mathcal{B}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

2*: $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

3*: pre ľubovoľné $Y, X \in \mathcal{B}$ existuje jediný $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$.

Obidve definície afinného priestoru sú ekvivalentné, t.j. $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1 $\Leftrightarrow$ keď $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V, +)$ (s vhodne definovaným $+$) je afinný priestor podľa *def* 11.1*.

Dôkaz. Predpokladajme, že $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor podľa *def* 11.1. Potom pre $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{a} \in V$ podľa podmienky 2° z *def* 11.1(*) existuje jediný $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\overrightarrow{XY} = \vec{a}$. Položíme: $Y = X + \vec{a}$. Tým sme definovali $+: \mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$. Overíme 1* 2* 3*.

1*: $(X + \vec{a}) + \vec{b} = Y + \vec{b} = Z$ podľa def.: $\vec{a} = \overrightarrow{XY}$, $\vec{b} = \overrightarrow{YZ}$. Potom $X + (\vec{a} + \vec{b}) = X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = X + \overrightarrow{XZ} = Z$. Teda naozaj $X + (\vec{a} + \vec{b}) = X + (\vec{a} + \vec{b})$ 2*: $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$ (použili sme *vetu* 11.1). 3*: pre ľubovoľný $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{a} \in V$ je $Y = X + \vec{a}$ ten jediný bod. Teda $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1.

Predpokladajme, že $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1*. Chceme ukázať, že $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ spĺňa 1°, 2° a 3° z *def* 11.1.

1°: Pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$ definujeme $\overrightarrow{XY} \in V$ ako ten jediný vektor z V (podľa 3*), pre ktorý $X + \overrightarrow{XY} = Y$.

2°: Pre každý bod $X \in \mathcal{B}$ a každé $\vec{a} \in V$ existuje jediný vektor $Y = X + \vec{a}$ taký, že $\overrightarrow{XY} = \vec{a}$.

3°: $X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) \stackrel{1*}{=} (X + \overrightarrow{XY}) + \overrightarrow{YZ} = Y + \overrightarrow{YZ} = Z = X + \overrightarrow{XZ} \Rightarrow \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ pre ľubovoľné $X, Y, Z \in \mathcal{B}$.

□

Pevne zvolíme bod $O \in \mathcal{B}$ v afinnom priestore $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$. Potom môžeme definovať zobrazenie $h: \mathcal{B} \rightarrow V$, $h(x) = \overrightarrow{OX}$.

Tvrdenie 11.1. Zobrazenie h je bijekcia.

Dôkaz. Definujme $g: V \rightarrow \mathcal{B}$, $g(\vec{a}) =$ len jediný $A \in \mathcal{B}$, pre ktorý $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Potom $g \circ h = id_{\mathcal{B}}$, $h \circ g = id_V$, $g \circ h(X) = g(\overrightarrow{OX}) = X$ a $h \circ g(\vec{a}) = h(A) = \vec{a}$.

□

Definícia 11.2. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Afinný podpriestor priestoru $\mathcal{A}$ je afinný priestor $\mathcal{A}'=(\mathcal{B}', V')$, taký, že $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, V' je vektorový podpriestor priestoru V , a body z $\mathcal{B}'$ sú s vektormi z V' spriaznené podľa tých istých pravidiel, ako sú spriaznené body s vektormi v $\mathcal{A}$.

Príklad.

1. $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný podpriestor samého seba.

2. Ak $\mathcal{A}'=(\mathcal{B}', V')$, $\mathcal{A}''=(\mathcal{B}'', V'')$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$, tak $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = (\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'', V' \cap V'')$ je afinný podpriestor v $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ aj $\mathcal{A}$.

Definícia 11.3. Nech $\mathcal{A}_n=(\mathcal{B}_n, V_n)$, $n \in \mathbb{N}$ je n -rozmerný afinný priestor. Potom 1-rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa nazýva *priamka* v $\mathcal{A}_n$, 2-rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa nazýva *rovina* v $\mathcal{A}_n$ a $(n-1)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa volá *nadrovina* v $\mathcal{A}_n$.

Súradnice v afinnom priestore.

Definícia 11.4.

Nech $\mathcal{A}_n=(\mathcal{B}_n, V_n)$ je afinný priestor. Potom $(n+1)$ -tica $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}_n$

je pevne zvolený bod a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je pevne zvolená báza priestoru V_n ; sa nazýva *súradnicový systém* v $\mathcal{A}_n$.

Príklad.

V $\mathcal{A}_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(n+1)$ -tica $((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ je súradnicový systém.

Priradenie súradníc.

Nech $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je súradnicový systém v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Pre ľubovoľný bod $X \in \mathcal{B}_n$ existuje jediný vektor $\vec{OX} \in V_n$. Potom existuje jediná n -tica $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ taká, že $\vec{OX} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$. Potom usporiadaná n -tica $(x_1, \dots, x_n)$ je n -tica *súradníc* bodu X vzhľadom na súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. $\vec{OX}$ sa nazýva aj *polohový vektor* bodu X . Teda vlastne súradnice bodu sú súradnice jeho polohového vektora vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Stručne píšeme $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$. Pre vektor $\vec{b} \in V_n$ jeho súradnice vzhľadom na súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ sú jeho súradnice vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. $\vec{b} = b_1 \vec{a}_1 + \dots + b_n \vec{a}_n$, $\vec{b} \equiv (b_1, \dots, b_n)$.

Tvrdenie 11.2. Nech $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je súradnicový systém v afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Ak $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $Y \equiv (y_1, \dots, y_n)$ tak vektor $\vec{XY}$ má súradnice: $\vec{XY} \equiv (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Dôkaz. Máme $\vec{OX} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$, $\vec{OY} = y_1 \vec{a}_1 + \dots + y_n \vec{a}_n$. $\vec{XY} = \vec{XO} + \vec{OY} = -\vec{OX} + \vec{OY} = (y_1 - x_1) \vec{a}_1 + \dots + (y_n - x_n) \vec{a}_n$.

□

Príklad. Pre $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ súradnicový systém $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$. $X = (x_1, x_2)$. $\vec{OX} = (x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$. $X \equiv (x_1, x_2)$.

Afinné zobrazenie.

Definícia 11.5.

Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ a $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$ sú afinné priestory. Potom *afinné zobrazenie* z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$ je dvojica (f, φ) , kde $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ a $\varphi : V \rightarrow V'$ sú lineárne zobrazenia a okrem toho $\varphi(\vec{XY}) = \vec{f(X)f(Y)}$. f je tzv. bodová zložka, φ je tzv. lineárna zložka afinného zobrazenia $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Poznámka. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle def 11.1*. Potom vieme, že pre ľubovoľnú $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný $\vec{x} \in V$ taký, že $X + \vec{x} = Y$. Potom označme $\vec{x} = Y - X = \vec{XY}$. Potom podmienku $\varphi(\vec{XY}) = \vec{f(X)f(Y)}$ z def 11.5 môžeme napísať $\varphi(Y - X) = f(Y) - f(X)$.

Príklad. V afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ zvolíme pevne súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Definujeme $f : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(X) = (x_1, \dots, x_n)$, kde $(x_1, \dots, x_n)$ sú súradnice bodu X . Podobne definujeme $\varphi : V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\vec{b}) = (b_1, \dots, b_n)$, kde $(b_1, \dots, b_n)$ sú súradnice vektora $\vec{b}$. Potom $(f, \varphi) : (\mathcal{B}_n, V_n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je afinné zobrazenie.

Definícia 11.6. Afinné zobrazenie $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je *afinný izomorfizmus*, ak f je bijekcia.

Veta 11.2. Afinné zobrazenie $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je *afinný izomorfizmus* $\Leftrightarrow$ keď φ je lineárny izomorfizmus.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Pevne zvolíme bod $P \in \mathcal{B}$. Označme $P' = f(P)$. Predpokladajme, že (f, φ) je afinný izomorfizmus. Chceme ukázať, že $\varphi : V \rightarrow V'$ je lineárny izomorfizmus. Stačí ukázať, že φ je bijektívne. *Surjektívnosť:* Nech $\vec{b} \in V'$. Potom $\vec{b} = \vec{P'B}$ pre

jednoznačne určený bod B . Keďže f je bijekcia, existuje jediný bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $f(Y) = B$, teda $\vec{b} = \overrightarrow{f(P)f(Y)} = \varphi(\overrightarrow{PY})$. Teda $\vec{b}$ má vzor $\overrightarrow{PY} \in V$. *Injektívnosť:* Nech $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b})$. Chceme ukázať, že $\vec{a} = \vec{b}$. Máme $\vec{a} = \overrightarrow{P\vec{A}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{P\vec{B}}$ pre jednoznačne určené $P \in \mathcal{B}$. Teda $\varphi(\overrightarrow{P\vec{A}}) = \varphi(\overrightarrow{P\vec{B}}) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(P)f(\vec{A})} = \overrightarrow{f(P)f(\vec{B})}$. Z toho $f(\vec{A}) = f(\vec{B})$ je bijekcia, preto $\vec{A} = \vec{B}$. Vcelku: $\vec{a} = \vec{b}$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že $\varphi : V \rightarrow V'$ je lineárny izomorfizmus. Chceme ukázať, že f je bijekcia. *Surjektívnosť:* Nech $Y \in \mathcal{B}'$ je ľubovoľný. Potom $\overrightarrow{P'Y}$ má jediný vzor, povedzme $\varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{P'Y}$. Pritom: $\vec{a} = \overrightarrow{P\vec{A}}$ pre jediné $A \in \mathcal{B}$. $\overrightarrow{P'f(\vec{A})} = \overrightarrow{f(P)f(\vec{A})} = \varphi(\overrightarrow{P\vec{A}}) = \overrightarrow{P'Y}$ z toho: $Y = f(\vec{A})$. *Injektívnosť:* Predpokladajme, že $f(\vec{A}) = f(\vec{B})$. Chceme ukázať, že $\vec{A} = \vec{B}$. $\varphi(\overrightarrow{P\vec{A}}) = \overrightarrow{f(P)f(\vec{A})} = \overrightarrow{P'f(\vec{A})} = \overrightarrow{P'f(\vec{B})} = \overrightarrow{f(P)f(\vec{B})} = \varphi(\overrightarrow{P\vec{B}})$ a preto $\vec{A} = \vec{B}$. □

Poznámka. Afinné zobrazenie (f, φ) určené zavedením súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ má bijektívne f , a preto je to aj afinný izomorfizmus z $\mathcal{A}_n$ na $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Definícia 11.7. Ak existuje afinný izomorfizmus $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tak hovoríme, že afinný priestor $\mathcal{A}$ je afinne izomorfný s afinným priestorom $\mathcal{A}'$. Ak $\mathcal{A}$ je afinne izomorfný s $\mathcal{A}'$, tak tiež je $\mathcal{A}'$ afinne izomorfný s $\mathcal{A}$. V takom prípade môžeme povedať, že $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ sú navzájom izomorfné.

Príklad.

Zavedením súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ vlastne definujeme afinný izomorfizmus z $(\mathcal{B}_n, V_n)$ na $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Teda každý n -rozmerný afinný priestor je afinne izomorfný s afinným priestorom $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Veta 11.3. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je afinné zobrazenie. Potom pre $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ máme $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi + f(0, \dots, 0)$. Pritom v $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ máme súradnicový systém $((0, \dots, 0), \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ v $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ súradnicový systém: $((0, \dots, 0), \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Dôkaz. Vieme, že $\varphi(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi$ pre každé $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$:
 $(x_1, \dots, x_k) = \overrightarrow{(0, \dots, 0)(x_1, \dots, x_k)}$, $(x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi = \varphi(\overrightarrow{(0, \dots, 0)(x_1, \dots, x_k)}) = \overrightarrow{f(0, \dots, 0)f(x_1, \dots, x_k)}$.
 $f(x_1, \dots, x_k) - f(0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi$.
Teda $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi + f(0, \dots, 0)$. □

Barycentrický súradnicový systém.

Budeme používať *def* 11.1*.

Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Vieme, že pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$ existuje jediný vektor $\vec{x} \in V$ taký, že $X + \vec{x} = Y$. Označíme $\vec{x} = Y - X$. Platí:

1. $(A - B) + (B - C) = A - C \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} = A - C$.
2. $X - X = \vec{0} \quad \forall X \in \mathcal{B}$.
3. $(X + \vec{x}) - (A + \vec{y}) = (X - A) + \vec{x} - \vec{y}$.

Definícia 11.8. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor, nech $A_0, A_1, \dots, A_s \in \mathcal{B}$ sú ľubovoľné body a nech $x_0, x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{i=0}^s x_i = 1$. Potom definujeme bod

z $\mathcal{B}$: $\sum_{i=0}^s x_i A_i := A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A)$, kde $A \in \mathcal{B}$ je ľubovoľný bod. Bod $\sum_{i=0}^s x_i A_i$ sa nazýva *barycentrická kombinácia* bodov $A_0, \dots, A_s$ s koeficientmi $x_0, \dots, x_s$.

Ukážeme, že *def* 11.8 barycentrickej kombinácie bodov je dobrá, t.j. že nezávisí od voľby A . Takto: Nech $B \in \mathcal{B}$ je ľubovoľný bod. Potom vieme, že existuje jediný

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in V \text{ taký, že } B = A + \vec{x}. \text{ Potom } B + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - B) &= A + \vec{x} + \sum_{i=0}^s x_i ((A_i - A) - \vec{x}) = \\
&= A + \vec{x} + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A) - \sum_{i=0}^s x_i \vec{x} = A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A) + \vec{x} - \left(\sum_{i=0}^s x_i \right) \vec{x} = \\
&= A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A).
\end{aligned}$$

Veta 11.4 a Definícia 11.9. *Nech $A_0, A_1, \dots, A_n$ sú body n -rozmerného afinného priestoru $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Potom: $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém afinného priestoru $\mathcal{A}_n$ (v zmysle definície) práve vtedy, keď každý bod $X \in \mathcal{B}_n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako barycentrická kombinácia $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Ak je toto splnené, potom $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ sa volá barycentrický súradnicový systém priestoru $\mathcal{A}_n$; $(x_0, \dots, x_n)$ sú barycentrické súradnice bodu X .*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém. Nech $X \in \mathcal{B}_n$ je ľubovoľný bod. Potom existuje jediný vektor $\vec{x} \in V_n$ taký, že $X = A_0 + \vec{x}$. Keďže $(A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je báza vo V_n , preto existujú jednoznačne určené $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0)$. Z toho: $X = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0)$. Zoberme

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 - \sum_{i=1}^n x_i. \text{ Potom } X = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i A_i. \text{ Jednoznačnosť: Nech by} \\
X &= \sum_{i=0}^n x_i A_i = \sum_{i=0}^n x'_i A'_i. \text{ Máme vlastne: } A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0) = A_0 + \sum_{i=1}^n x'_i (A_i - A_0). \\
\text{Z toho: } \sum_{i=0,1}^n x_i (A_i - A_0) &= \sum_{i=0,1}^n x'_i (A_i - A_0). \text{ Pretože } (A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0) \text{ je báza,}
\end{aligned}$$

musí platiť $x_i = x'_i$ pre $i=1, \dots, n$. Potom tiež $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i = 1 - \sum_{i=1}^n x'_i = x'_0$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že každý bod z $\mathcal{B}_n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako barycentrická kombinácia bodov $A_0, \dots, A_n$. Chceme ukázať, že $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Stačí ukázať, že $(A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je báza vo V_n . Pretože vieme, že $\dim(V_n) = n$, stačí ukázať, že $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ generujú celé V_n . Nech $\vec{b} \in V_n$ je ľubovoľný vektor. Z axióm afinného priestoru vieme, že k bodu A_0 a vektoru $\vec{b}$ existuje jediný bod $B \in \mathcal{B}_n$ taký, že $\vec{b} = B - A_0$. Z nášho predpokladu vyplýva, že existuje jediné vyjadrenie B v tvare $B = \sum_{i=0}^n y_i A_i$ (kde $\sum_{i=0}^n y_i = 1$). Z toho: $\vec{b} = \left(\sum_{i=0}^n y_i A_i \right) - A_0 = A_0 + \sum_{i=1}^n y_i (A_i - A_0) - A_0 = \sum_{i=1}^n y_i (A_i - A_0)$. Teda naozaj $[A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0] = V_n$.

□

Veta 11.5. *Nech $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je afinné zobrazenie. Potom pre ľubovoľnú barycentrickú kombináciu $\sum_{i=0}^n x_i A_i$ ľubovoľných bodov $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ máme*

$$f \left(\sum_{i=0}^n x_i A_i \right) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i).$$

Dôkaz. Označme $B = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Body A_0, B určujú jediný vektor $\vec{x} \in V$ taký, že $B = A_0 + \vec{x}$, teda $\vec{x} = B - A_0$. Potom $\varphi(B - A_0) = f(B) - f(A_0)$. Pritom $B - A_0 = A_0 + \sum_{i=0}^n y_i (A_i - A_0) - A_0 = \sum_{i=0}^n x_i (A_i - A_0)$.

$$f(B) - f(A_0) = \varphi(B - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i \varphi(A_i - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i (f(A_i) - f(A_0)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = f(B) = f(A_0) + \sum_{i=0}^n x_i (f(A_i) - f(A_0)) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i).$$

□

Veta 11.6. (o afinných zobrazeniach):

Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ je n -rozmerný afinný priestor a nech $(A_0, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém v ňom. Nech $B_0, \dots, B_n$ sú ľubovoľné body afinného priestoru $\mathcal{A}'_n = (\mathcal{B}'_n, V'_n)$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'_n$ také, že $f(A_i) = B_i$ pre $i=0, \dots, n$.

Dôkaz. Vieme, že každý bod $X \in \mathcal{B}_n$ má jediné vyjadrenie v tvare $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Ak existuje afinné zobrazenie $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ také, že $f(A_i) = B_i$, $i=0, \dots, n$ tak musí byť $f(X) = f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i) = \sum_{i=0}^n x_i B_i$. Teraz definujeme zobrazenie

$(f, \varphi) : (\mathcal{B}_n, V_n) \rightarrow \mathcal{A}'$ práve takto: $f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^n x_i B_i$. Treba ešte ukázať, že f

(a ním určené $\varphi : V \rightarrow V'$) je afinné zobrazenie. Pre $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$, $Y = \sum_{i=0}^n b_i A_i$ je

$$\begin{aligned} \varphi(Y - X) &:= f(X) - f(Y) = \sum_{i=0}^n (x_i - b_i) B_i. \text{ Stačí ukázať, že } \varphi \text{ je lineárne. Ľubovoľné} \\ &\text{dva vektory } \vec{a}, \vec{c} \in V_n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{a} = A - A_0, \vec{c} = C - A_0. \text{ Potom } \varphi(\alpha A + \beta C) = \\ &= \varphi\left(\alpha(A - A_0) + \beta(C - A_0)\right) = \varphi\left(\alpha\left(\sum_{i=0}^n a_i A_i - A_0\right) + \beta\left(\sum_{i=0}^n c_i A_i - A_0\right)\right) = \\ &= \varphi\left(\alpha\left(\sum_{i=0}^n a_i (A_i - A_0)\right) + \beta\left(\sum_{i=0}^n c_i (A_i - A_0)\right)\right) = \alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{c}). \end{aligned}$$

□

Poznámka. barycenter = ťažisko.

V n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ body $A_0, \dots, A_n$; pričom každý z nich má jednotlivú hmotnosť, predpokladajme, že $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ nech sú lineárne nezávislé. Teda $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém. Bod, ktorého barycentrické súradnice sú $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ je ťažisko sústavy hmotných bodov $A_0, \dots, A_n$. Napríklad pre $n=2$: $\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1 = A_0 + \frac{1}{2}(A_1 - A_0)$.

Definícia 11.10. V afinnom priestore $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ majme body $A_0 = (1, 0, \dots, 0)$ až $A_{n-1} = (0, \dots, 0, 1)$. Potom množina $\triangle^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} x_i A_i; \sum x_i = 1; x_i \geq 0 \right\}$ sa nazýva n -rozmerný simplex. Simplexy sa používajú v topológii, geometrii, v optimalizačných metódach.

Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru.

Veta 11.7. V n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ majme pevne zvolený súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech $\tilde{\mathcal{A}}_k = (\tilde{\mathcal{B}}_k, \tilde{V}_k)$ je k -rozmerný afinný pod-

priestor v $\mathcal{A}_n$. Nech $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ je dajaký bod z $\tilde{\mathcal{A}}_k$, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báza vo $\tilde{V}_k$ pričom $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1)$, $\dots$, $\vec{b}_k \equiv (b_1^k, \dots, b_n^k)$. Potom pre ľubovoľný bod $X \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ platí $\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{b}_1 t_1 + \dots + \vec{b}_k t_k$ pre vhodné $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Obrátene, ak pre dajaký vektor $\vec{x} \in V_n$ platí $\vec{x} = \vec{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$ pre dajaké $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$, tak $\vec{x}$ je polohový vektor dajakého bodu z $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Z toho: bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ patrí do $\tilde{\mathcal{A}}_k$

práve vtedy, keď $(R) \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k \\ \dots \\ x_n = a_n + b_n^1 t_1 + \dots + b_n^k t_k \end{cases}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Čísla $t_1, \dots, t_k$

sa volajú parametre. Systém R je tzv. parametrické vyjadrenie $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Dôkaz. Nech $X \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Máme $A \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. K dvojici $(A, X) \in \tilde{\mathcal{B}}_k \times \tilde{\mathcal{B}}_k$ patrí jediný vektor $\vec{AX} \in \tilde{V}_k$. Vo $\tilde{V}_k$ máme bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ preto $\vec{AX} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$ pre jednoznačne určené $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. $\vec{AX} = \vec{AO} + \vec{OX} = \vec{OX} - \vec{OA} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$. Z toho $\vec{OX} = \vec{OA} + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$.

Obrátene: nech $\vec{x} = \vec{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k \in V_n$. Chceme ukázať, že $\vec{x} = \vec{OY}$ pre dajaké $Y \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Z axióm afinného priestoru existuje jediný bod $Y' \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ taký, že $\vec{AY'} = s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$, teda $\vec{x} = \vec{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k = \vec{OA} + \vec{AY'} = \vec{OY'}$. Hľadaný bod je bod Y' . □

Poznámka. V situácii ako vo vete sa $\tilde{V}_k$ nazýva *smerový priestor* afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_k$, a báзовé vektory $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ sú *smerové vektory* afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Z vety je jasné, že afinný podpriestor $\tilde{\mathcal{A}}_k$ je úplne jednoznačne určený jedným bodom A a smerovými vektormi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$.

Všeobecné (analytické) vyjadrenie afinného podpriestoru.

Nech je daný k -rozmerný afinný podpriestor $\tilde{\mathcal{A}}_k = (\tilde{\mathcal{B}}_k, \tilde{V}_k)$ n -rozmerného afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_n = (\tilde{\mathcal{B}}_n, \tilde{V}_n)$ s pevne zvoleným súradnicovým systémom. Nech $\tilde{\mathcal{A}}_k$ je určený bodom $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ a smerovými vektormi $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1)$, $\dots$, $\vec{b}_k \equiv (b_1^k, \dots, b_n^k)$. Teda parametrické vyjadrenie je:

$$\tilde{\mathcal{A}}_k \equiv \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k \\ \dots \\ x_n = a_n + b_n^1 t_1 + \dots + b_n^k t_k \end{cases} \quad t_i \in \mathbb{R}$$

Matica $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^k \end{pmatrix}$ má k lineárne nezávislých stĺpcov (lebo $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ sú lineárne nezávislé.) Teda $h(\mathbf{B}) = k$ z toho $\mathbf{B}$ má k lineárne nezávislých riadkov, nech sú to riadky s indexmi $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

$$(P) = \begin{cases} b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k = x_1 - a_1 \\ \dots \\ b_n^1 t_1 + \dots + b_n^k t_k = x_n - a_n \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} b_{i_1}^1 t_1 + \dots + b_{i_1}^k t_k = x_{i_1} - a_{i_1} \\ \dots \\ b_{i_k}^1 t_1 + \dots + b_{i_k}^k t_k = x_{i_k} - a_{i_k} \end{cases}$$

Máme $h \left(\begin{pmatrix} b_{i_1}^1 & \dots & b_{i_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k}^1 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix} \right) = k \Rightarrow$. Systém $(*)$ má jediné riešenie, vyrátame ho z Cramerovho pravidla:

$$t_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} & b_{i_1}^2 & \dots & b_{i_1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_k} - a_{i_k} & b_{i_k}^2 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_{i_1}^1 & \dots & b_{i_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k}^1 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix}} = \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \dots t_k = \frac{\det(\quad)}{\det(\quad)} = \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

$\ell_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ sú lineárne funkcie. Teraz dosadíme $t_1, \dots, t_k$ do zvyšných $n-k$ rovníc parametrického vyjadrenia. $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ nech je doplnok ku $\{i_1, \dots, i_k\}$ v $\{1, \dots, n\}$. Dostaneme: $b_{j_1}^1 \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) + \dots + b_{j_1}^k \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = x_{j_1} - a_{j_1} \dots$
 $b_{j_{n-k}}^1 \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) + \dots + b_{j_{n-k}}^k \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = x_{j_{n-k}} - a_{j_{n-k}}$. t.j. systém $n-k$ lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, \dots, x_n$. Matica tohto systému má hodnotu $n-k$. Teda ľubovoľný bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ z $\tilde{\mathcal{A}}_k$ spĺňa (svojimi súradnicami) lineárny systém tvaru:

$$(V) \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \dots \\ c_{n-k1}x_1 + \dots + c_{n-kn}x_n = d_{n-k} \end{cases} \quad \text{kde } c_{ij}, d_j \in \mathbb{R} \text{ a } h \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-k1} & \dots & c_{n-kn} \end{pmatrix} = n-k$$

Jedno riešenie je: $(a_1, \dots, a_n)$. Potom sú riešeniami aj n -tice: $(a_1 + b_1^1, \dots, a_n + b_n^1), \dots, (a_1 + b_k^1, \dots, a_n + b_n^k)$. Báza je k lineárne nezávislých riešení homogénneho systému patriaceho k (V) : $((b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_k^1, \dots, b_n^k))$.
 $(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + s_1(b_1^1, \dots, b_n^1) + \dots + s_k(b_k^1, \dots, b_n^k) =$ množina bodov vyhovujúcich (P) t.j. súradnice bodov z $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Veta 11.8. (o všeobecnej rovnici nadroviny)

Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ je nadrovina v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$ (s pevne zvoleným súradnicovým systémom v $\mathcal{A}_n$.) Ak $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ je bod z α a $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, \vec{b}_{n-1} \equiv (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$ sú smerové vektory (teda tvoria bázu) priestoru $\mathcal{V}(\alpha)$. Potom všeobecná rovnica nadroviny α je:

$$\alpha \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Dôkaz. Nech $X = (x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľný bod z α . Potom $(P, X) \in \mathcal{B}(\alpha) \times \mathcal{B}(\alpha)$ jednoznačne určuje vektor $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$. Vieme, že $\overrightarrow{PX} \equiv (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je lineárna kombinácia $(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$.

$$\text{Preto: } \det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Obrátene:

Nech $X \in \mathcal{B}_n$, $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ je taký bod, že $\det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$. Chceme ukázať, že $X \in \mathcal{B}(\alpha)$. Ekvivalentne máme: $\det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$. Z toho

$(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je lineárna kombinácia $(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$. Teda vektor $\overrightarrow{PX}$ je lineárnou kombináciou $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}$, teda $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$. K bodu $P \in \mathcal{B}(\alpha)$ a vektoru $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$ existuje jediný bod $X' \in \mathcal{B}(\alpha)$ taký, že $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX'}$. Z toho: $X = X'$. Teda $X \in \mathcal{B}(\alpha)$. □

Vzájomné polohy afinných podpriestorov.

Definícia 11.11. Nech $\alpha=(\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ a $\beta=(\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v afinnom priestore $\mathcal{A}_n=(\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$, $\dim(\mathcal{A}_n)=n$. Potom hovoríme, že:

1. α a β sú *rovnobežné* ($\alpha \parallel \beta$), ak $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$ alebo $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$.
2. α a β sú *rôznobežné*, ak $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$ a $\mathcal{B}(\alpha) \not\subset \mathcal{B}(\beta)$, $\mathcal{B}(\beta) \not\subset \mathcal{B}(\alpha)$.
3. α a β sú *mimobežné*, ak $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$ a $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) = \{\vec{0}\}$.

Poznámka. V aspoň 4-rozmernom afinnom priestore uvedené tri nie sú všetky možné vzájomné polohy afinných podpriestorov α, β .

Príklad. $\mathcal{A}_4=(\mathcal{B}_4, \mathcal{V}_4)$, nech $\mathcal{V}_4$ má bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. Zvoľme bod $A \in \mathcal{B}_4$. Vieme, že k bodu A a vektoru $\vec{a}_1$ $\exists! B \in \mathcal{B}_4 : \vec{a}_1 = \overrightarrow{AB}$. Zoberme dve roviny α, β v $\mathcal{A}_4$ takéto: α je určené bodom A a smerovými vektormi $\vec{a}_2, \vec{a}_3$; β je určené bodom B a smerovými vektormi $\vec{a}_3, \vec{a}_4$. Potom α a β nie sú rovnobežné, lebo $\mathcal{V}(\alpha) \not\subset \mathcal{V}(\beta)$ ani $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$; nie sú ani mimobežné, lebo $\{\vec{a}_3\} \subset \mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) \neq \{\vec{0}\}$. Nie sú ani rôznobežné, lebo $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Nech by $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Teda existuje $X \in \alpha \cap \beta$. Potom $\overrightarrow{AX} \in \mathcal{V}(\alpha)$ t.j. $\overrightarrow{AX} = \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$; $\overrightarrow{XB} \in \mathcal{V}(\beta)$ t.j. $\overrightarrow{XB} = \beta_3 \vec{a}_3 + \beta_4 \vec{a}_4$. Z toho: $\vec{a}_1 = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = \alpha_2 \vec{a}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{a}_3 + \beta_4 \vec{a}_4$ - nemožné, lebo $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_1$ sú lineárne nezávislé.

V $\mathcal{A}_n$ pre $n \geq 4$ sú možné javy, ktoré si nevieme predstaviť. Napr. v $\mathcal{A}_4$ sú $\alpha \equiv \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$ roviny, ktoré sa pretínajú v jedinom bode: $(0, 0, 0, 0)$.

Veta 11.9. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ a $\beta = (\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A}_n=(\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$.

1. Ak $\dim(\alpha) = \dim(\beta)$, tak v prípade, že $\alpha \parallel \beta$ máme $\alpha = \beta$ alebo $\alpha \cap \beta = \emptyset$.
2. Ak $\dim(\alpha) \neq \dim(\beta)$, tak v prípade, že $\alpha \parallel \beta$ máme buď $\alpha \cap \beta = \emptyset$ alebo $\alpha \subset \beta$ alebo $\beta \subset \alpha$.

Dôkaz.

1. Nech $\dim(\alpha) = \dim(\beta)$, $\alpha \parallel \beta$. Predpokladajme, že $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Teda existuje bod $A \in \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Máme $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$ alebo $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$. Z rovnosti dimenzie $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$. Teda α a β sú určené bodom A a tým istým smerovým priestorom $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$ preto $\alpha = \beta$.
2. Povedzme, že $\dim(\alpha) < \dim(\beta)$. $\alpha \parallel \beta$; ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, tak existuje $A \in \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Z toho, že $\alpha \parallel \beta$ a $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Jasné, že $\alpha \subset \beta$.

□

Veta 11.10. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A}_n=(\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$ nech $2 \leq \dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Potom: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow$ každá priamka v α je rovnobežná s β .

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\alpha \parallel \beta$. Teda $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Nech $p=(\mathcal{B}(p), \mathcal{V}(p))$ je ľubovoľná priamka v α . Teda $\mathcal{B}(p) \subset \mathcal{B}(\alpha)$, $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{V}(\alpha)$ potom $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Z definície rovnobežnosti: $p \parallel \beta$.

$\Leftarrow$: Zoberme ľubovoľný vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}(\alpha)$. Chceme ukázať, že $\vec{a} \in \mathcal{V}(\beta)$. Nech $A \in \mathcal{B}(\alpha)$ je ľubovoľný bod. Potom A a $\vec{a}$ určia priamku $q=(\mathcal{B}(q), \mathcal{V}(q))$ v α ; $A \in \mathcal{B}(q)$, $\mathcal{V}(q)=[\vec{a}]$. Podľa terajšieho predpokladu každá priamka v α je rovnobežná s β . Teda $q \parallel \beta$ t.j. $\vec{a} \in \mathcal{V}(q) \subset \mathcal{V}(\beta)$ a teda $\vec{a} \in \mathcal{V}(\beta)$. Zistili sme, že $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$, teda $\alpha \parallel \beta$.

□

Zmena súradníc pri zmene súradnicového systému.

Vo vektorovom priestore :

Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve bázy dajakého vektorového priestoru V . Máme jednoznačné vyjadrenie: $\vec{a}_1 = p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n$ až $\vec{a}_n = p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n$.

Potom $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ sa nazýva *matica prechodu* od bázy $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Obrátene máme jednoznačné vyjadrenie: $\vec{a}'_1 = p'_{11}\vec{a}_1 + \dots + p'_{1n}\vec{a}_n$ až $\vec{a}'_n = p'_{n1}\vec{a}_1 + \dots + p'_{nn}\vec{a}_n$. $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} p'_{11} & \cdots & p'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{n1} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix}$ je matica prechodu od bázy $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k báze $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Máme: $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}\vec{a}'_j$, $\vec{a}'_j = \sum_{s=1}^n p'_{js}\vec{a}_s$. Z toho: $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}\vec{a}'_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n p'_{js}\vec{a}_s = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}p'_{js}\vec{a}_s$. Z jednoznačnosti vyjadrenia $\vec{a}_i$ v tvare lineárnej kombinácie $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dostávame, že $\sum_{j=1}^n p_{ij}p'_{js} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i=s \\ 0, & \text{ak } i \neq s \end{cases}$ Teda $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}_n$.

Zistili sme, že $\mathbf{P}$ je regulárna a $\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1}$.

Veta 11.11. *Matica prechodu od jednej bázy k druhej je regulárna, pričom matica opačného prechodu je k nej inverzná.*

Veta 11.12. *Nech $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je báza priestoru V a matica $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulárna. Definujme vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ takto: $\vec{a}_1 = p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n$ až $\vec{a}_n = p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n$. Potom $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza priestoru V .*

Dôkaz. Vzhľadom na to, že vieme $\dim(V) = n$, stačí dokázať, že $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé. Nech $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\forall i : \alpha_i = 0$. Máme: $\alpha_1(p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n) + \dots + \alpha_n(p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n) = \vec{0}$. $(\alpha_1p_{11} + \dots + \alpha_np_{n1})\vec{a}'_1 + \dots + (\alpha_1p_{1n} + \dots + \alpha_np_{nn})\vec{a}'_n = \vec{0}$. Ale $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je báza, preto:

$$(*) \begin{cases} \alpha_1p_{11} + \dots + \alpha_np_{n1} = 0 \\ \dots \\ \alpha_1p_{1n} + \dots + \alpha_np_{nn} = 0 \end{cases} \quad \text{Matica systému je: } \mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Pretože $h(\mathbf{P}^T) = h(\mathbf{P})$ a $\mathbf{P}$ je podľa predpokladu regulárna, je aj $\mathbf{P}^T$ regulárna. Preto (*) má iba nulové riešenie, t.j. $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. □

Zmena súradníc vektora.

Vo V majme dve bázy $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Nech $\vec{x} \in V$ je ľubovoľný vektor, nech $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $\vec{x} \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Aký je vzťah medzi $(x_1, \dots, x_n)$ a $(x'_1, \dots, x'_n)$?

Nech $\mathbf{P} = (p_{ij})$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Máme vlastne:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}'_i. \text{ Vieme, že } \vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j. \text{ Z toho: } \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}'_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i p_{ij} \right) \vec{a}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \vec{a}'_j. \text{ Z jednoznačnosti vyjadrenia vyplýva,} \end{aligned}$$

že $x'_j = \sum_{i=1}^n x_i p_{ij} \Rightarrow (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{P}$. Stručnejšie: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a

$$\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n) \Rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}'\mathbf{P}'.$$

V afinnom priestore: Súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}_n$ a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo $\mathcal{V}_n$. Iný súradnicový systém v $\mathcal{A}_n$: $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Aký je vzťah medzi súradnicami vektora resp. bodu vzhľadom na prvý a druhý súradnicový systém v $\mathcal{A}_n$. Pre vektory je

to jasné: súradnice sú v takom vzťahu, ako sme to opísali vyššie vo vektorovom priestore, t.j. ak $\vec{x} \in \mathcal{V}_n$, $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$; $\vec{x} \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, tak $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Pre body: 1.krok: $O=O'$. (Zmenia sa len bázy vo $\mathcal{V}_n$). Súradnice bodu X sa rovnajú súradnice polohového vektora $\overrightarrow{OX_i}$. Vzťah medzi súradnicami v $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a v systéme $(O, \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je určený vzťahom $\mathbf{X}'=\mathbf{XP}$, kde $\mathbf{P}$ je matica prechodu od "čiarkovanej" k "nečiarkovanej".

2.krok: Zmeníme len začiatok, t.j. od súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ prejdeme k $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech O má v "novom" súradnicovom systéme $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(b_1, \dots, b_n)$. Teda $\overrightarrow{O'O} = b_1\vec{a}_1 + \dots + b_n\vec{a}_n$. Bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $X \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ v "novom"

$$(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i; \quad \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \overrightarrow{O'X}.$$

Aký je vzťah medzi $(x_1, \dots, x_n)$ a $(x'_1, \dots, x'_n)$?

$$\text{Máme } \overrightarrow{O'X} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n b_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (x_i + b_i) \vec{a}_i.$$

Teda: $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n) + (b_1, \dots, b_n)$. $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{B}$.

Všeobecne: spojením týchto dvoch krokov dostaneme prechod od $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Zmena súradníc potom je zložením dvoch čiastkových zmien. Nech $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ súradnice bodu z $\mathcal{B}_n$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$; a nech $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sú jeho súradnice v súradnicovom systéme $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ sú súradnice bodu O v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Potom platí: $\mathbf{X}' = \mathbf{XP} + \mathbf{B}$.

Orientácia reálneho vektorového resp. afinného priestoru.

Orientácia reálneho vektorového priestoru:

Definícia 11.12. Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých báz n -rozmerného reálneho vektorového priestoru V . Potom povieme, že dve bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ a $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ sú v relácii $\sim$ zapíšeme $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, ak matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ má kladný determinat.

Tvrdenie 11.3. $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathcal{U}$.

Dôkaz. Reflexivita: $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ pre ľubovoľnú $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathcal{U}$, lebo matica prechodu je $\mathbf{I}_n$ a $\det(\mathbf{I}_n) = 1$. *Symetrickosť*: nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$. Matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ nech je $\mathbf{P}$. Vieme, že $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulárna, z tohto $\det(\mathbf{P}) > 0$. Matica prechodu od $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ k $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je $\mathbf{P}^{-1}$. Ale $\det(\mathbf{PP}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^{-1}) \Rightarrow \det(\mathbf{P}^{-1}) > 0$. Teda $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \sim (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. *Transitivnosť*: Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \stackrel{\mathbf{P}}{\sim} (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \stackrel{\mathbf{Q}}{\sim} (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$. Chceme ukázať, že $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$. Nech $\mathbf{P} = (p_{ij})$,

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R}). \text{ Máme } \vec{w}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{v}_j \text{ pre } i=1, \dots, n \text{ a } \vec{z}_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} \vec{w}_i$$

$$\text{pre } k=1, \dots, n. \text{ Z toho: } \vec{z}_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{v}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q_{ki} p_{ij} \right) \vec{v}_j. \text{ V zátvorke}$$

je prvok i -tého riadku a j -tého stĺpca matice $\mathbf{QP}$. Teda matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ je $\mathbf{QP}$. Potom $\det(\mathbf{QP}) = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{P}) > 0$.

$\mathcal{U}$ sa rozloží na triedy ekvivalencie vzhľadom na $\sim$. Budú dve triedy ekvivalencie. $\square$

Definícia 11.13. Vektorový priestor V orientujeme tým, že jednu z dvoch tried ekvivalencie $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ vyhlásime za kladnú (privilegovanú). Urobíme to tak, že jednu

bázu priestoru V vyhlásime za kladnú. Potom kladnú triedu báz tvoria práve tie, ktoré sú v $\sim$ s touto kladnou bázou.

Príklad. $\mathbb{R}^n$ štandardne orientujeme tak, že za kladnú vyhlásime štandardnú bázu: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Veta 11.13. *Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je báza reálneho vektorového priestoru V , nech $\pi \in S_{\{1, \dots, n\}}$. Potom báza $(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ je ekvivalentná s pôvodnou bázou práve vtedy, keď je permutácia párna.*

Dôkaz. Nech napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Potom $(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ je $(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Máme: $\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$; $\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$ až $\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + \dots + 1\vec{v}_n$. Potom matica prechodu je:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matica prechodu od $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{v}_{\pi(1)}, \vec{v}_{\pi(2)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ vznikne z $\mathbf{I}_n$ tak, že jej riadky permutujeme podľa π . Potom determinant matice prechodu je $(-1)^{s(\pi)}$, kde $s(\pi)$ je počet inverzií v π . Teda je kladný práve vtedy, keď π má párný počet inverzií. □

Orientácia afinného priestoru:

Definícia 11.14. Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ je (reálny) afinný priestor. $\mathcal{A}_n$ orientujeme tak, že orientujeme vektorový priestor V_n .

Afinno-euklidovské priestory.

Definícia 11.15. Afinný priestor $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ sa nazýva *afinno-euklidovský priestor*, ak V (s pevne zvoleným skalárnym súčinom) je euklidovský priestor.

Príklad.

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ so štandardným skalárnym súčinom je afinno-euklidovský priestor.

Definícia 11.16. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinno-euklidovský priestor, pričom nech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalárny súčin na V . Ak $A, B \in \mathcal{B}_n$ sú dva body, tak ich *vzdialenosť* (označíme ju $\rho(A, B)$) definujeme ako $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$.

Veta 11.14. *Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinno-euklidovský priestor, potom $\rho(A, B) \geq 0$ pre všetky $A, B \in \mathcal{B}$.*

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$.
2. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$. (*trojuholníková nerovnosť*)

Dôkaz. $\rho(A, B) \geq 0$ jasné.

1. $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BA}| = \rho(B, A)$.
2. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. $\rho(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

□

Poznámka. Definovaním vzdialenosti medzi bodmi v afinno-euklidovskom priestore $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ sme vlastne definovali zobrazenie $\rho : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťami z predchádzajúcej vety. ρ je tzv. *metrika* na $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ je teda *metrický priestor*.

V ďalšom budeme uvažovať o n -rozmernom afinno-euklidovskom priestore s pevne zvoleným súradnicovým systémom: $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, kde O je bod toho priestoru

a $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je pevne zvolená ortonormálna báza vektorovej zložky tohto priestoru. Tento afinno-euklidovský priestor budeme označovať $\mathbb{E}^n$. Súradnicový systém $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ taký, že $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormálna báza sa nazýva *karteziánsky*. Pretože báza vo V_n je ortonormálna, pre vektory $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ a $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$ ich skalárny súčin je $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ a $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_n)$. $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Veta 11.15. *Nech A, B sú dva body v $\mathbb{E}^n$ pričom A má súradnice $(a_1, \dots, a_n)$, B má súradnice $(b_1, \dots, b_n)$. Potom $\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$.*

Dôkaz. $\overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + \dots + (b_n - a_n)\vec{e}_n$, kde $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormálna báza. $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = (b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2$,
 $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$. □

Kolmosť vektora na afinný podpriestor.

Definícia 11.17. Nech $\mathbb{E}^n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Hovoríme, že vektor $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ je *kolmý* na afinný podpriestor $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ priestoru $\mathbb{E}^n$ ak $\vec{a} \perp \vec{x}$ pre všetky $\vec{x} \in V(\alpha)$. (teda $\vec{a} \in V(\alpha)^\perp$).

Veta 11.16 a Definícia 11.18. *Nech $\alpha \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ je nadrovina v $\mathbb{E}^n$. Potom vektor $\vec{n} \equiv (a_1, \dots, a_n)$ je kolmý na α . Vektor $\vec{n}$ sa nazýva *normálový vektor* nadroviny α .*

Dôkaz. Nech $\vec{x} \in V(\alpha)$ je ľubovoľný vektor. Nech $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľný bod z α . Vieme, že existuje jediný bod $Y \equiv (y_1, \dots, y_n) \in \alpha$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$. Pritom súradnice $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$. Máme, keďže $X, Y \in \alpha$: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ a $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0$. Potom $a_1(y_1 - x_1) + \dots + a_n(y_n - x_n) = 0$. Teda $\langle \vec{n}, \overrightarrow{XY} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0$ t.j. $\vec{n}$ je kolmý na ľubovoľný vektor z $V(\alpha)$. Pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ máme $\langle c\vec{n}, \vec{x} \rangle = c\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0$. □

Veta 11.17. *Rovnica nadroviny $\alpha \in \mathbb{E}^n$ obsahujúcej bod $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$ a majúce normálový vektor $\vec{n} \equiv (c_1, \dots, c_n)$ je $\alpha \equiv c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$.*

Dôkaz. Nech $X \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ je ľubovoľný bod z α . Potom $\overrightarrow{BX} \in V(\alpha)$. Pritom: $\vec{n} \perp \overrightarrow{BX}$ teda $\langle \vec{n}, \overrightarrow{BX} \rangle = 0$. $\vec{n} \equiv (c_1, \dots, c_n)$, $\overrightarrow{BX} \equiv (x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n)$. Teda musí platiť $c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$. Vieme, že nadrovina je určená jednou lineárnou rovnicou, teda $c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$ je rovnica nadroviny α . □

Kolmosť afinných podpriestorov.

Definícia 11.19. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Hovoríme, že podpriestor α je kolmý na β , ak $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. (teda každý smerový vektor podpriestoru α je kolmý na každý smerový vektor podpriestoru β .) Ak je táto podmienka splnená, napíšeme $\alpha \perp \beta$.

Tvrdenie 11.4. *Ak $\alpha \perp \beta$, tak $\beta \perp \alpha$. (Môžeme povedať, že α a β sú navzájom kolmé.)*

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$. Teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. Ale potom $(V(\beta)^\perp)^\perp \subset V(\alpha)^\perp \Leftrightarrow V(\beta) \subset V(\alpha)^\perp \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$. Roviny O_{xy}, O_{yz} v $\mathbb{E}^3$ nie sú na seba kolmé v zmysle našej definície. Totiž $V(\alpha) \not\subset V(\beta)^\perp$, lebo $\dim(V(\alpha)) = 2$, $\dim(V(\beta)^\perp) = 1$. Teda podľa našej definície: O_{xy} nie je kolmý na O_{yz} . □

Veta 11.18. *Nech $\alpha=(\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta=(\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Ak $\alpha \perp \beta$, tak $\dim(\alpha) + \dim(\beta) \leq n$.*

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$, teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. $V(\beta) \oplus V(\beta)^\perp = V(n)$; kde $\mathbb{E}^n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Môžeme predpokladať, že $\dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. $V(\alpha) \oplus V(\beta) \subset V(\beta) \oplus V(\beta)^\perp = V(n) \Rightarrow \dim(V(\alpha) \oplus V(\beta)) = \dim(\alpha) + \dim(\beta) \leq \dim(V(n)) = n$. $\square$

Tvrdenie 11.5. *Nech $\alpha=(\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta=(\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $\alpha \perp \beta$, tak $\alpha \cap \beta$ pozostáva z jediného bodu.*

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$. Teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. Nech $\alpha \cap \beta = \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$. Nech P, Q sú dva body z $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Potom $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha) \cap V(\beta) \subset V(\beta) \cap V(\beta)^\perp = \{\vec{0}\}$. Z čoho: $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ a preto $P = Q$. $\square$

Veta 11.19. *Nech $\alpha=(\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je k -rozmerný ($k \leq n$) afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom pre ľubovoľný daný bod $A \in \mathbb{E}^n$ existuje jediný $(n-k)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$ kolmý na α obsahujúci bod A . Tento podpriestor označíme $\Pi_\alpha^\perp(A)$, a nazývame sa kolmopremietací afinný podpriestor bodu A do α .*

Dôkaz. Nech $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ a vo $V(\alpha)^\perp$ zvolíme bázu $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k})$, kde $\vec{w}_1 = (w_1^1, \dots, w_n^1)$ až $\vec{w}_{n-k} = (w_1^{n-k}, \dots, w_n^{n-k})$ Potom podpriestor

$$\gamma = \begin{cases} x_1 = a_1 + w_1^1 t_1 + \dots + w_1^{n-k} t_{n-k} \\ \dots \\ x_n = a_n + w_n^1 t_1 + \dots + w_n^{n-k} t_{n-k} \end{cases} \quad \text{má dimenziu } n-k \text{ a je kolmý na } \alpha.$$

$(V(\gamma) = [\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}] = V(\alpha)^\perp)$. Tým sme ukázali existenciu takého podpriestoru ako sa tvrdí vo vete. *Jednoznačnosť:* Nech $\delta = (\mathcal{B}(\delta), V(\delta))$ je (iný) $(n-k)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$, kolmý na α obsahujúci bod A . Potom $V(\delta) \subset V(\alpha)^\perp$. Ale $\dim(V(\delta)) = n-k$, $\dim(V(\alpha)^\perp) = n-k$. Teda musí: $V(\delta) = V(\alpha)^\perp$. T.j. $V(\delta) = V(\gamma)$. Pretože $A \in \mathcal{B}(\delta)$, $A \in \mathcal{B}(\gamma)$ musí byť $\delta = \gamma$. $\square$

Veta 11.20. *Nech $\alpha=(\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je k -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom $\Pi_\alpha^\perp(A) \cap \alpha$ pozostáva z jediného bodu, označíme ho $A^\perp$ a nazývame ho kolmý priemet bodu A do afinného podpriestoru α .*

Dôkaz. $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$; nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je ortonormálna báza priestoru $V(\alpha)$, pričom $\vec{v}_1 = (v_1^1, \dots, v_n^1)$ až $\vec{v}_k = (v_1^k, \dots, v_n^k)$. Vieme, že $V(\Pi_\alpha^\perp(A)) = V(\alpha)^\perp$. Nech $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{n-k})$ je ortonormálna báza priestoru $V(\alpha)^\perp$, pričom $\vec{z}_1 = (z_1^1, \dots, z_n^1)$ až $\vec{z}_{n-k} = (z_1^{n-k}, \dots, z_n^{n-k})$. Nech $B \in \Pi_\alpha^\perp(A)$, $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$. Potom

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = a_1 + v_1^1 t_1 + \dots + v_n^1 t_1 \\ \dots \\ x_n = a_n + v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k \end{cases} \quad \Pi_\alpha^\perp(A) \equiv \begin{cases} x_1 = b_1 + z_1^1 s_1 + \dots + z_1^{n-k} s_{n-k} \\ \dots \\ x_n = b_n + z_n^1 s_1 + \dots + z_n^{n-k} s_{n-k} \end{cases}$$

Bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \Pi_\alpha^\perp(A) \cap \alpha$ spĺňa:

$$\begin{cases} a_1 + v_1^1 t_1 + \dots + v_1^k t_k = b_1 + z_1^1 s_1 + \dots + z_1^{n-k} s_{n-k} \\ \dots \\ a_n + v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k = b_n + z_n^1 s_1 + \dots + z_n^{n-k} s_{n-k} \end{cases}$$

pre dajaké $t_i, s_i \in \mathbb{R}$. Teda $(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_{n-k})$ spĺňa:

$$(*) \begin{cases} v_1^1 t_1 + \dots + v_1^k t_k - z_1^1 s_1 - \dots - z_1^{n-k} s_{n-k} = b_1 - a_1 \\ \dots \\ v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k - z_n^1 s_1 - \dots - z_n^{n-k} s_{n-k} = b_n - a_n \end{cases}$$

Teda $X \in \alpha \cap \Pi_\alpha^\perp(A) \Leftrightarrow$ systém (*) je riešiteľný. Matica systému má n lineárne nezávislých riadkov, teda jej hodnosť je n . Teda (*) má práve jedno riešenie. $\square$

Vzdialenosť afinných podpriestorov.

Definícia 11.20. Nech α, β sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. *Vzdialenosť* α od β definujeme ako nezáporné reálne číslo $\rho(\alpha, \beta) := \inf\{\rho(X, Y); X \in \alpha, Y \in \beta\}$.

Veta 11.21. Nech $A \in \mathbb{E}^n$ je bod a nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A^\perp)$.

Dôkaz. $\rho(A, \alpha) = \inf\{\rho(A, X), X \in \alpha\}$ a $\rho(A, A^\perp) \in \{\rho(A, X), X \in \alpha\}$, teda $\rho(A, \alpha) \leq \rho(A, A^\perp)$. Ukážeme, že $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraničením množiny $\{\rho(A, X); X \in \alpha\}$. Z toho: $\rho(A, A^\perp) \leq \rho(A, \alpha) = \inf\{\rho(A, X), X \in \alpha\}$ keďže $\inf$ je najväčšie dolné ohraničenie. Rátajme: $\rho(A, A^\perp)^2 = |\overrightarrow{AA^\perp}|^2$; $\rho(A, X)^2 = |\overrightarrow{AX}|^2 = |\overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X}|^2 =$
 $= \langle \overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X}, \overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X} \rangle = \langle \overrightarrow{AA^\perp}, \overrightarrow{AA^\perp} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AA^\perp}, \overrightarrow{A^\perp X} \rangle + \langle \overrightarrow{A^\perp X}, \overrightarrow{A^\perp X} \rangle =$
 $= \rho(AA^\perp)^2 + 2 \cdot 0 + \rho(A^\perp X)^2$. Z toho: $\rho(A, X)^2 \geq \rho(A, A^\perp)^2$ preto $\rho(A, X) \geq \rho(A, A^\perp)$. Teda naozaj $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraničením. $\square$

Vzdialenosť rovnobežných afinných podpriestorov.

Veta 11.22. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú rovnobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Nech $\dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Potom $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta) = \rho(A, A^\perp)$.

Dôkaz. Z definície $\rho(\alpha, \beta) = \inf\{\rho(X, Y); X \in \alpha, Y \in \beta\}$. $\rho(A, A^\perp) \in \{\rho(X, Y), X \in \alpha, Y \in \beta\}$, a preto $\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(A, A^\perp)$. Aby sme dokázali obrátenú nerovnosť ukážeme, že $\rho(A, A^\perp)$ je tiež dolným ohraničením množiny $\{\rho(X, Y)\}$. Z toho potom dostaneme $\rho(A, A^\perp) = \rho(\alpha, \beta)$. Pre ľubovoľný $X \in \alpha$ existuje jediný vektor $\overrightarrow{AX} \in V(\alpha)$. Ale $\alpha \parallel \beta$ a preto $\overrightarrow{AX} \in V(\beta)$. Pretože $A^\perp \in \mathcal{B}(\beta)$ a $\overrightarrow{AX} \in V(\beta)$ existuje jediný bod $Z \in \beta$: $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{A^\perp Z}$. $\overrightarrow{AA^\perp} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XA^\perp}$. Ale $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{A^\perp Z}$. Z toho: $\overrightarrow{AA^\perp} = \overrightarrow{A^\perp Z} + \overrightarrow{XA^\perp} =$
 $= \overrightarrow{XA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp Z} = \overrightarrow{XZ} \in V(\beta)^\perp = \Pi_\beta^\perp(X)$. Máme $Z \in \beta \cap \Pi_\beta^\perp(X) = \{X^\perp\}$. Preto $Z = X^\perp$ a teda $\overrightarrow{AA^\perp} = \overrightarrow{XX^\perp}$ pre ľubovoľný bod $X \in \alpha$. $\rho(A, A^\perp) = \rho(X, X^\perp) = \rho(X, \beta) \leq \rho(X, Y)$ pre ľubovoľné $Y \in \beta, X \in \alpha$. $\rho(A, A^\perp) \leq \rho(X, Y)$, teda $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraničením množiny $\{\rho(X, Y), X \in \alpha, Y \in \beta\}$. $\square$

Príklad. Určte vzdialenosť bodu $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ v $\mathbb{E}^n$ od nadroviny $\alpha \equiv \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + a_0 = 0$.

Riešenie: $\Pi_\alpha^\perp(P)$ je priamka, jej smerový vektor je vlastne normálový vektor nadro-

$$\text{viny } \alpha, \text{ t.j. } \vec{n} \equiv (a_1, \dots, a_n). \Pi_\alpha^\perp(P) = \begin{cases} x_1 = p_1 + a_1 t \\ \dots \\ x_n = p_n + a_n t \end{cases}$$

$$\text{Určíme jediný bod } P^\perp = \Pi_\alpha^\perp(P) \cap \alpha. a_1(p_1 + a_1 t) + \dots + a_n(p_n + a_n t) + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + t(a_1^2 + \dots + a_n^2) = 0. \text{ Z toho: } t = -\frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

$$\rho(P, \alpha) = |PP^\perp| = \left| \left(-a_1 \frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \dots, -a_n \frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right) \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{(a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0)^2}{(a_1^2 + \dots + a_n^2)^2} \cdot (a_1^2 + \dots + a_n^2)} = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

$$\text{Teda: } \rho(P, \alpha) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Vzdialenosť rovnobežných nadrovín.

Veta 11.23. *Nech $\alpha \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$ a $\beta \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b_0 = 0$ sú dve rovnobežné nadroviny v $\mathbb{E}^n$. Potom $\rho(\alpha, \beta) = \frac{|b_0 - a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$.*

Dôkaz. Z vety 11.22 máme: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, \beta)$, kde $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ je ľubovoľný bod z α . Z príkladu vieme, že $\rho(P, \beta) = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{|-a_0 + b_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$. $\square$

Vzdialenosť dvoch mimobežných afinných podpriestorov.

Veta 11.24. *Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú mimobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Teda $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$ a $V(\alpha) \cap V(\beta) = \{\mathbf{0}\}$. Potom existuje bod $P \in \alpha$ a $Q \in \beta$ také, že $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$ a platí: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$. (Priamka určená bodmi P, Q je tzv. stredná priečka afinných podpriestorov α, β .)*

Dôkaz. Nech $X \in \alpha, Y \in \beta$ sú ľubovoľné. Potom $\overrightarrow{XY} \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Keby áno, tak by $\overrightarrow{XY} = \vec{a} + \vec{b}$ pre jednoznačne určené $\vec{a} \in V(\alpha), \vec{b} \in V(\beta)$. Potom existuje jediný bod $Z \in \alpha$: $\vec{a} = \overrightarrow{XZ}$ a jediný bod $W \in \beta$: $\vec{b} = \overrightarrow{WY}$. Teda: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{WY}$, ale zároveň $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZW} + \overrightarrow{WY}$, teda $\overrightarrow{ZW} = \mathbf{0}$, čo je ekvivalentné s tým, že $Z = W$. Teda $Z = W \in \alpha \cap \beta = \emptyset$ (keďže α, β sú mimobežné). Spor.

Nech γ je afinný podpriestor určený bodom X , pričom $V(\gamma) = V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Nech γ' je afinný podpriestor určený bodom X a taký, že $V(\gamma') = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus [\overrightarrow{XY}]$. Keďže $[\overrightarrow{XY}] \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$, $\dim(\gamma') - \dim(\gamma) = 1$, a teda (máme $\gamma \subset \gamma'$) γ je nadrovinou v γ' . Nech $\vec{n}$ nenulový je normálový vektor nadroviny γ v γ' . Teda $\vec{n} \in V(\gamma)^\perp = (V(\alpha) \oplus V(\beta))^\perp = V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$. Nech teraz $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ je dajaká ortogonálna báza vo $V(\alpha)$, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j)$ je ortogonálna báza vo $V(\beta)$. Potom vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j, \vec{n}$ sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu vo $V(\gamma')$. Pretože $\overrightarrow{XY} \in V(\gamma')$, máme $\overrightarrow{XY} = \alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k + \beta_1\vec{b}_1 + \dots + \beta_j\vec{b}_j + \delta\vec{n}$ pre jednoznačne určené $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_j, \delta \in \mathbb{R}$. Potom $\delta \neq 0$, lebo $\overrightarrow{XY} \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Označme P ten jediný bod z α , pre ktorý $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k = \overrightarrow{XP}$, označme Q ten jediný bod z β , pre ktorý $\beta_1\vec{b}_1 + \dots + \beta_j\vec{b}_j = \overrightarrow{QY}$. Teda máme, že $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY}$. Teda $\overrightarrow{PQ} = \gamma\vec{n}$. Keďže $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$, tak priamka, ktorá prechádza bodmi P, Q je kolmá na α aj β a pretína α v P a β v Q . Ešte treba ukázať, že $\rho(P, Q) = \rho(\alpha, \beta)$. Vieme, že $\rho(\alpha, \beta) = \inf\{\rho(A, B); A \in \alpha; B \in \beta\}$. Nech $A \in \alpha, B \in \beta$ sú ľubovoľné. Potom $A = P + s_1\vec{a}_1 + \dots + s_k\vec{a}_k$ zároveň $B = Q + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j$ pre vhodné $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_j \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB} = B - A = \overrightarrow{PQ} + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j - s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k$. Potom $\rho(A, B)^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ} - s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j, \overrightarrow{PQ} - s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle + 2 \underbrace{\langle \overrightarrow{PQ}, -s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j \rangle}_{=0} + \langle -s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j; -s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j \rangle = \rho(P, Q)^2 + | -s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j |^2$. Z toho vidno, že $\rho(A, B)$ sa minimalizuje vtedy, keď $| -s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j | = 0$ t.j. práve vtedy, keď $-s_1\vec{a}_1 - \dots - s_k\vec{a}_k + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_j\vec{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow s_1 = \dots = s_k = t_1 = \dots = t_j = 0$, lebo $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j)$ je báza vo $V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Teda $\rho(A, B)$ sa minimalizuje vtedy, keď sa rovná $\rho(P, Q)$. To znamená, že naozaj $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$. $\square$

Dôsledok. *Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú mimobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Potom existuje afinný podpriestor β_1 taký, že $\beta \subset \beta_1$, $\alpha \parallel \beta_1$ a $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta_1)$. (= $\rho(A, A^\perp)$, pre ľubovoľný bod $A \in \alpha$, $A^\perp$ je kolmý priemet bodu A do β_1 .)*

Dôkaz. Zoberme β_1 , ako afinný podpriestor určený ľubovoľným bodom β a taký, že $V(\beta_1) = V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Potom je pravda, že $\beta \subset \beta_1$ aj to, že $\alpha \parallel \beta_1$ (lebo $V(\alpha) \subset V(\beta_1)$). Z predchádzajúcej vety vieme, že existujú $P \in \alpha$, $Q \in \beta$ také, že $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp = (V(\alpha) \oplus V(\beta))^\perp = V(\beta_1)^\perp$ pričom $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$. Máme $Q \in \beta$, a teda tiež $Q \in \beta_1$ a zároveň $\overrightarrow{PQ} \in V(\Pi_{\beta_1}^\perp(P))$. Z toho: $Q \in \Pi_{\beta_1}^\perp(P) \cap \beta_1 = \{P^\perp\}$, a preto $P^\perp = Q$. Teda $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q) = \rho(P, P^\perp) = \rho(\alpha, \beta_1)$.

□

Uhly medzi afinnými podpriestormi v $\mathbb{E}^n$.

1. *Uhol dvoch orientovaných priamok:*

Nech $p, q \subset \mathbb{E}^n$ sú dve orientované priamky ($p \neq q$). Teda $V(p), V(q)$ sú dva orientované vektorové priestory. Z toho ak $\vec{a} \neq \vec{0}$ je smerový vektor orientovanej priamky p a $\vec{a}' \neq \vec{0}$ je iný smerový vektor, tak $\vec{a}' = k \cdot \vec{a}$ pre dajaké $k > 0$. Podobne, ak $\vec{b}', \vec{b}$ sú dva smerové vektory orientovanej priamky q , tak $\vec{b}' = l \cdot \vec{b}$.

$$\frac{\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle}{|\vec{a}'| \cdot |\vec{b}'|} = \frac{\langle k\vec{a}, l\vec{b} \rangle}{|k\vec{a}| \cdot |l\vec{b}|} = \frac{kl \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{kl |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Tento výraz nezávisí od výberu smerových vektorov orientovaných priamok p, q . Zo *Schwarzovej* nerovnosti vieme, že $\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow \exists! \varphi \in \langle 0, \pi \rangle : \cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$. φ definujeme ako uhol zovretý orientovanou priamkou p a orientovanou priamkou q .

2. *Uhol dvoch neorientovaných priamok:*

Nech $p, q \subset \mathbb{E}^n$ sú dve neorientované priamky. Potom, ak $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a}' \neq \vec{0}$ sú dva smerové vektory priamky p , tak $\vec{a}' = k \cdot \vec{a}$, kde $k \neq 0$. Podobne, ak $\vec{b}, \vec{b}' (\neq \vec{0})$ sú dva smerové vektory priamky q , tak $\vec{b}' = l \vec{b}$ pre $l \neq 0$. Potom výraz

$$\frac{\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle}{|\vec{a}'| \cdot |\vec{b}'|} = \frac{\langle k\vec{a}, l\vec{b} \rangle}{|k\vec{a}| \cdot |l\vec{b}|} = \frac{kl \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|k| |\vec{a}| \cdot |l| |\vec{b}|} \neq \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

vo všeobecnosti závisí od výberu smerového vektora priamky p resp. q . Ale už výraz

$$\left| \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| \text{ už od výberu nezávisí. Existuje jediné } \psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \text{ také, že } \cos \psi = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

ψ potom nazveme uhlom zovretý neorientovaných priamok p a q .

3. *Uhol dvoch nadrovín*

Nech α, β sú dve nadroviny v $\mathbb{E}^n$, nech $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ sú ich normálové vektory. Potom uhol medzi α a β sa definuje ako uhol neorientovaných priamok so smerovými vektormi $\vec{n}_\alpha$ resp. $\vec{n}_\beta$. Teda: ak $\alpha \equiv a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0 = 0$, $\beta \equiv b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_0 = 0$, tak $\vec{n}_\alpha = (a_1, \dots, a_n)$; $\vec{n}_\beta = (b_1, \dots, b_n)$ a $\angle(\alpha, \beta)$ je to číslo z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pre ktoré

$$\cos |\angle(\alpha, \beta)| = \frac{|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n|}{\sqrt{(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)}}.$$

Vektorový a zmiešaný súčin v $\mathbb{R}^3$.

Definícia 11.21. Nech $\mathbb{R}^3$ je štandardne orientovaný t.j. nech $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je kladná báza tohto priestoru. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^3$. Potom existuje jediný vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ taký, že

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$.

2. $|\vec{c}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$.

3. Ak $\vec{a}, \vec{b}$ sú lineárne nezávislé, tak $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$.

Vektorový súčin vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$, označuje sa $\vec{a} \times \vec{b}$.

Poznámka. Vlastne sme definovali zobrazenie $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\times(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Geometrický význam $|\vec{a} \times \vec{b}|$: je to plošný obsah rovnobežníka určeného $\vec{a}, \vec{b}$.
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}))^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \sin^2(\angle \vec{a}, \vec{b}))} =$
 $= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\angle \vec{a}, \vec{b})} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$. Plošný obsah rovnobežníka určeného $\vec{a}, \vec{b}$ je $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

Veta 11.25. *Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^3$. Potom*
 $\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Pretože $\vec{e}_1 =$
 $= (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix})$.

Dôkaz. Overíme podmienky 1.), 2.) a 3.) z definície.

1.)

$$\begin{aligned} & \langle (a_1, a_2, a_3), (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) \rangle = \\ & = a_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Podobne pre $\vec{b}$.

2.)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} = \\ & = \sqrt{|(a_1, a_2, a_3)|^2 |(b_1, b_2, b_3)|^2 - \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle^2} \end{aligned}$$

3.) Predpokladajme, že $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú lineárne nezávislé. To znamená, že (b_1, b_2, b_3) nie je nenulovým násobkom (a_1, a_2, a_3) a preto aspoň jedno z čísel $\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ je $\neq 0$. Máme $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} =$
 $= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$, $\vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3$. Teda matica prechodu od bázy $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ k trojici vektorov $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Potom $\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} > 0$. Z toho (keďže $\mathbf{P}$ je regulárna):
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je báza v $\mathbb{R}^3$, a pretože $\det(\mathbf{P}) > 0$ je kladná báza aj $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Z jednoznačnej
určenosti $\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix})$. □

Veta 11.26. *Vektorový súčin v $\mathbb{R}^3$ má tieto vlastnosti:*

1.) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ pre $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

2.) $(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta(\vec{b} \times \vec{c})$ a $\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{c})$ t.j. zobrazenie $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineárne v oboch argumentoch.

Dôkaz. 1.) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Pre lineárne závislé $\vec{a}, \vec{b}$ 1.) zrejme platí. Pre $\vec{a}, \vec{b}$ lineárne nezávislé máme, že $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza. Zároveň $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$ potom $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Iný dôkaz: Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, potom $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) = -(\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}) = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2.) Z vlastností determinantov jasné. □

Definícia 11.22. Nech $\mathbb{R}^3$ je štandardne orientovaný. Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sú dané vektory. Potom ich *zmiešaný súčin* sa definuje ako reálne číslo $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$, ozn. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Veta 11.27.

Nech $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3), \vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$. Potom $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

Dôkaz. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}), (c_1, c_2, c_3) \rangle =$
 $= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$

□

Veta 11.28. *Zmiešaný súčin má tieto vlastnosti:*

1.) je lineárny v každom argumente.

2.) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Dôkaz. jasné z determinantového vyjadrenia zmiešaného súčinu a vlastností determinantov.

□

Veta 11.29. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú dva lineárne nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$, chápané ako orientované úsečky v O_{xyz} so začiatkom v O . Nech $\vec{c}$ je vektor, ktorý neleží v smerovom priestore roviny určenej bodom O a vektormi $\vec{a}, \vec{b}$. Potom $|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ je objem rovnobežnostena určeného bodom O a orientovanými úsečkami $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Dôkaz. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, A \equiv (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = \overrightarrow{OB}, B \equiv (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = \overrightarrow{OC}, C \equiv (c_1, c_2, c_3)$. Objem rovnobežnostena $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ = (plošný obsah podstavy $O\vec{a}\vec{b}$) · výška = $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, \alpha)$, kde α je rovina určená bodom O a vektormi $\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, C^\perp)$.

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = O + a_1 t + b_1 s \\ x_2 = O + a_2 t + b_2 s \\ x_3 = O + a_3 t + b_3 s \end{cases} \quad \Pi_\alpha^\perp(C) \equiv \begin{cases} x_1 = c_1 + \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p \\ x_2 = c_2 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} p \\ x_3 = c_3 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} p \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 s - \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p = c_1 \\ a_2 t + b_2 s + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} p = c_2 \\ a_3 t + b_3 s - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} p = c_3 \end{cases}$$

$$p = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}{-\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} - \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}{D}$$

$$\rho(C, C^\perp) = \sqrt{\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} \dots}$$

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, C^\perp) = |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$$

□

Veta 11.30. *Nech $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazenie s týmito vlastnosťami:*

1.) $\times$ je lineárne v oboch argumentoch.

2.) pre $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ je $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

3.) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$.

Potom $n = 3$, alebo $n = 7$.

Bez dôkazu.

II. LINEÁRNE TRANSFORMÁCIE VEKTOROVÝCH PRIESTOROV

Definícia 12.1. *Lineárna transformácia* vektorového priestoru V je lineárne zobrazenie $V \rightarrow V$.

Príklad. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_2, -x_1)$ je lineárna transformácia priestoru $\mathbb{R}^3$.

Definícia 12.2. Nech V je n -rozmerný vektorový priestor nad poľom R . Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo V . Ak $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia priestoru V , tak jej matica vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je matica $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ taká, že $f(\vec{a}_i) = a_{i1}\vec{a}_1 + \dots + a_{in}\vec{a}_n$; $i=1, \dots, n$.

Príklad. Matica lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$ vzhľadom na bázu $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{33}(\mathbb{R})$.

Príklad. Nech $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 4x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_3, 4x_1 + 4x_2)$. Matica f vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je $\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Vektory $\vec{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 2)$

$\vec{a}_3 = (2, -3, 2)$ tiež tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$. Aká je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$? Vyrátame: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0) = x(0, 1, 2) + y(2, 1, 2) + z(2, -3, 2) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0$. Teda $\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}(0, 1, 2) + \frac{1}{2}(2, 1, 2) + 0(2, -3, 2)$. Podobne: $\vec{e}_2 = \frac{1}{4}(2, 1, 2) - \frac{1}{4}(2, -3, 2)$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(0, 1, 2) - \frac{1}{8}(2, 1, 2) + (2, -3, 2)$. Teda matica prechodu od $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

je $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Potom $f(\vec{a}_1) = f(0, 1, 2) = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = 2(\frac{1}{4}\vec{a}_2 - \frac{1}{4}\vec{e}_3) + 4(\frac{1}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{8}\vec{a}_2 + \frac{1}{8}\vec{a}_3) = 2\vec{a}_1$. $f(\vec{a}_2) = 6\vec{a}_2$ a $f(\vec{a}_3) = -2\vec{a}_3$. Teda matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ je $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Pre $\mathbf{M}_f$ platí $(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbf{M}_f = f(x_1, x_2, x_3)$.

Všeobecne, ak $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárna transformácia, tak máme $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{M}_f$, kde $\mathbf{M}_f \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Ale, ak $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na inú bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ tak už neplatí, že $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{B}$. Napríklad z predchádzajúceho príkladu: $f(1, 1, 1) = (-1, 2, 2)$, ale $(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (2, 6, -2) \neq (-1, 2, 2)$.

Veta 12.1. Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia, nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo V a nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Potom, ak $(x_1, \dots, x_n)$ je n -tica súradníc vektora $\vec{x} \in V$ v báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, tak $(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{A}$ je n -tica súradníc vektora $f(\vec{x})$ v báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dôkaz. Máme $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Potom $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n) = x_1f(\vec{a}_1) + \dots + x_nf(\vec{a}_n) = x_1(a_{11}\vec{a}_1 + \dots + a_{1n}\vec{a}_n) + \dots + x_n(a_{n1}\vec{a}_1 + \dots + a_{nn}\vec{a}_n) = (x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1})\vec{a}_1 + \dots + (x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})\vec{a}_n$. Teda $f(\vec{x})$ má vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ n -ticu súradníc $(x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1}, \dots, x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})$. Ale $(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1}, \dots, x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})$. To je práve n -tica súradníc $f(\vec{x})$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. □

Otázka. Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia, nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), (\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve bázy vo V . Nech f má vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ a vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ maticu $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Aký je vzťah medzi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$?

Odpoveď. Nech $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Vieme, že $\mathbf{P}$ je regulárna pričom $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$ je matica opačného prechodu. Nech $\vec{x} \in V$ je ľubovoľné, nech jeho súradnice vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ sú $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a

vzhľadom na bázu $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Vieme, že $\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{P}'$, $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P}$. Nech teraz $f(\vec{x})$ má súradnice $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a nech má súradnice $\mathbf{Y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Zás vieme, že $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}\mathbf{P}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}'$. Z predchádzajúcej vety tiež vieme, že $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}' = \mathbf{X}'\mathbf{B}$. Z toho: $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{Y}\mathbf{P} = \mathbf{Y}' = \mathbf{X}'\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{B}$ t.j. $\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}) = \mathbf{0}}$ pre všetky $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. Ak postupne berieme za $\mathbf{X}$ n -tice $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, tak $\square$ dáva, že prvý až n -tý riadok v matici $\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}$ je nulový, a teda $\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, z toho $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{B}$ a teda $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$.

Definícia 12.3. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Hovoríme, že matica $\mathbf{B}$ je *podobná* matici $\mathbf{A}$, ak existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$. (zápis: $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$).

Tvrdenie 12.1. $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Dôkaz.

Symetrickosť: $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$, ale potom aj $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{Q}^{-1})^{-1}$ a teda $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. *Reflexivita:* $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$, lebo $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \mathbf{A} \mathbf{I}_n^{-1}$. *Tranzitivnosť:* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}, \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{Q}\mathbf{S})\mathbf{C}(\mathbf{Q}\mathbf{S})^{-1}$ a preto $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$. $\square$

Riešenie predchádzajúcej otázky môžeme vyjadriť takto: Matice lineárnej transformácie n -rozmerného vektorového priestoru V vzhľadom na rôzne bázy priestoru V sú navzájom podobné.

Veta 12.2. Existuje lineárna transformácia a vhodná báza priestoru $\mathbb{R}^n$ také, že pre dané podobné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí: $\mathbf{A}$ je maticou tej lineárnej transformácie vzhľadom na štandardnú bázu $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ a $\mathbf{B}$ je matica tej istej lineárnej transformácie vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$, nech $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ pre dajakú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Predpis $f(\vec{e}_i) = a_{i1}\vec{e}_1 + \dots + a_{in}\vec{e}_n$ podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach definuje lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pričom f má vzhľadom na $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ maticu $\mathbf{A}$. Definujme vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$: $\vec{a}_i = p_{i1}\vec{e}_1 + \dots + p_{in}\vec{e}_n$, $i = 1, \dots, n$. Pretože $\mathbf{P} = (p_{ij})$ je regulárna, vektory $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^n$. (tiež $\vec{e}_j = \sum_{s=1}^n p'_{js}\vec{a}_s \forall j$.) Aká je matica f vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$?

$$\begin{aligned} f(\vec{a}_i) &= \sum_{j=1}^n p_{ij} f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij} f\left(\sum_{s=1}^n a_{js}\vec{e}_s\right) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n a_{js}\vec{e}_s = \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n a_{js} \sum_{t=1}^n p'_{st}\vec{a}_t = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{js} p'_{st}\right) \vec{a}_t \end{aligned}$$

V zátvorke je prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$. $\square$

Definícia 12.4. Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia. *Vlastný vektor* lineárnej transformácie f je nenulový vektor $\vec{v} \in V$ taký, že pre dáke $\lambda \in \mathbb{R}$ máme $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. V tejto situácii sa λ nazýva *vlastná hodnota* lineárnej transformácie f patriaca vlastnému vektoru $\vec{v}$.

Príklad. $id_V: V \rightarrow V$ pre $\forall \vec{v} \in V - \{\vec{0}\}$ platí $id_V(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$.

Definícia 12.5. Vlastný vektor a k nemu patriaca vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sa definuje ako vlastný vektor (a k nemu patriaca vlastná hodnota) lineárnej transformácie $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ktorej maticou vzhľadom na štandardnú bázu

je $\mathbf{A}$.) Ináč povedané: nenulový vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ ak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ také, že $(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{A} = \lambda(x_1, \dots, x_n)$. O λ hovoríme ako o vlastnej hodnote matice $\mathbf{A}$ patriacej k vlastnému vektoru $(x_1, \dots, x_n)$.

Príklad. $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (x_1, \dots, x_n) \mathbf{I}_n = 1 \cdot (x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka. Definovali sme tzv. ľavý vlastný vektor matice $\mathbf{A}$. Niekedy sa definuje aj tzv. pravý vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ ako taký $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pre ktorý existuje $\mu \in \mathbb{R}$ také, že $\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Transponovaním: $(y_1, \dots, y_n) \mathbf{A}^T = \mu(y_1, \dots, y_n)$.

Teda $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je pravý vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ práve vtedy, keď $(y_1, \dots, y_n)$ je ľavý vlastný vektor matice $\mathbf{A}^T$.

V ďalšom budeme uvažovať iba o ľavých vlastných vektoroch.

Tvrdenie 12.2. Podobné matice (nad $\mathbb{R}$) majú tú istú množinu vlastných hodnôt (z poľa $\mathbb{R}$).

Dôkaz. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ a nech sú podobné, teda $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$ pre dajakú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Označme $S(\mathbf{A})$ resp. $S(\mathbf{B})$ množinu vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$. Chceme ukázať, že $S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{B})$. Nech $\lambda \in S(\mathbf{A})$ je ľubovoľné. Vieme, že existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ taký, že $\vec{x} \cdot \mathbf{A} = \lambda \vec{x}$. Máme $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{BP}$. Teda $\vec{x} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{BP} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow (\vec{x} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{B} = \lambda (\vec{x} \mathbf{P}^{-1})$. Máme $f_{\mathbf{P}^{-1}} = \vec{x} \mathbf{P}^{-1} \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, keďže lineárna transformácia $f_{\mathbf{P}^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulárna. Teda $\lambda \in S(\mathbf{B})$, príslušný vlastný vektor je $\vec{x} \mathbf{P}^{-1}$. Ukázali sme, že $S(\mathbf{A}) \subset S(\mathbf{B})$. Analogicky sa ukáže, že $S(\mathbf{B}) \subset S(\mathbf{A})$. Vcelku $S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{B})$. □

Tvrdenie 12.3. Ak $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k λ , tak $c\vec{v}$ pre $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ je tiež vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ (patriace k vlastnej hodnote λ).

Dôkaz. Máme $\vec{v} \mathbf{A} = \lambda \vec{v}$. Potom $(c\vec{v}) \mathbf{A} = c(\vec{v} \mathbf{A}) = c(\lambda \vec{v}) = \lambda(c\vec{v})$. □

Ako závisí vlastný vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \vec{0}$ od matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$? $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ patriaci k vlastnej hodnote $\lambda \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(x_1, \dots, x_n) \mathbf{A} = \lambda(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \mathbf{A} = (x_1, \dots, x_n) \lambda \mathbf{I}_n \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \vec{0}$. t.j.

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ -a_{1n}x_1 - a_{2n}x_2 - \cdots - (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

Teda $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastným vektorom patriacim k vlastnej hodnote $\lambda \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(x_1, \dots, x_n)$ je netriviálnym riešením lineárneho systému (*). Vieme, že (*) má nenulové riešenie práve vtedy, keď $h(\text{matrice systému } *) < n$, t.j. práve vtedy, keď $h(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) < n$. Takisto máme, že $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastnou hodnotou matice $\mathbf{A}$ práve vtedy, keď $h(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) < n$ t.j. matica $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ je singularárna. Špeciálne z toho vidno, že $0 \in \mathbb{R}$ je vlastnou hodnotou matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow h(-\mathbf{A}) < n$ t.j. práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) < n$.

Príklad. Nech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineárne zobrazenie otočenie o uhol $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okolo začiatku súradnicového systému. $f_\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Aké má vlastné hodnoty a vlastné vektory? Aká je matica lineárneho zobrazenia f_φ vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$? $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. $z = x + iy$. $f_\varphi(x, y) = f_\varphi(x + iy)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi; x \sin \varphi + y \cos \varphi)$.

$\mathbf{M}_{f_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Kedy je $\lambda \in \mathbb{R}$ vlastnou hodnotou matice $\mathbf{M}_{f_\varphi}$? Práve vtedy,

keď matica $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{M}_{f_\varphi}$ je singulárna $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \lambda - \cos \varphi \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0$. Z toho:

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \cos \varphi \pm \sqrt{4 \cos^2 \varphi - 4}}{2} = \cos \varphi \pm \sqrt{-\sin^2 \varphi}$, teda $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \vee \varphi = \pi$.

Potom $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Teda matica $\mathbf{M}_{f_\varphi}$ chápaná ako reálna má vlastnú hodnotu (1 resp. -1) iba vtedy, keď $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$.

Aké sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{M}_{f_\varphi}$ ak ju chápeme ako komplexnú?

Vtedy vlastné hodnoty: $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$, pre $\forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozšírenie definície matice resp. determinantu.

Pripustíme, že prvky matíc môžu byť aj prvky ľubovoľného komutatívneho okruhu s 1. Rovnosť matíc, násobenie atď. funguje analogicky. Ak $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ (kde $(R, +, \cdot, 1)$ je komutatívny okruh s 1) definujeme determinant:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\varphi \in S_{\{1, \dots, n\}}} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

Mnohé z vlastností determinantov nad poľom sa zachovávajú aj pre determinanty nad komutatívnym okruhom s 1. Napr. determinant zmení znamienko na opačné ak vzájomne vymeníme dva riadky; determinant je nulový ak niektorý riadok je nulový; $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$, atď...

Definícia 12.6. *Charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ (kde R je pole) sa definuje ako $\chi_A(t) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$.*

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R) \quad \chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Prvkami tejto matice sú prvky okruhu polynómov $R[t]$. Označme $R[t]$ okruh polynómov v neurčitej t nad poľom R . Ak $p(t) \in R[t]$, tak jeho koreň je $a \in R$, pre ktoré $p(a) = 0$.

Príklad. $p(t) = t^2 - 2t + 1 \in R[t]$. $p(1) = 0$, 1 je koreň.

Z doterajšieho: $\lambda \in R$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ práve vtedy, keď λ je koreňom charakteristického polynómu $\chi_A(t)$ matice $\mathbf{A}$.

Napr.: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{33}(\mathbb{R})$. $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = t^3 - t^2 + t - 1 = (t^2 + 1)(t - 1)$

Má jeden reálny koreň: 1. Matica $\mathbf{A}$ chápaná ako reálna matica má jediná vlastnú hodnotu: $\lambda = 1$. Neskôr sa pozrieme, aké sú vlastné hodnoty, ak $\mathbf{A}$ chápeme ako komplexnú maticu.

Definícia 12.7. *Stupeň polynómu $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[t]$ je s , ak $a_s \neq 0$, ale $a_i = 0$, pre $i > s$ v prípade, že $p(t) \neq 0$. Ak $p(t) \equiv 0$, tak stupeň polynómu sa definuje ako $-\infty$.*

Veta 12.3. *Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Potom stupeň $\chi_A(t)$ je n . Okrem toho, koeficient pri t^{n-1} v $\chi_A(t)$ je $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$ a absolútny člen v $\chi_A(t)$ je $(-1)^n \det(\mathbf{A})$.*

Dôkaz.

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = (t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn}) + \text{členy s } t^k$$

kde $k \leq n-2$. Koeficient pri t^n a t^{n-1} získame z $(t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn})$. Z toho koeficient pri t^n je 1, pri t^s , $s > n$ sú nuly. Koeficient pri t^{n-1} je $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Koeficient

$$\text{pri } t^0 \text{ je } \chi_A(0) = \det \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A}).$$

□

Definícia 12.8. Pre maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ sa $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ nazýva *stopa* matice $\mathbf{A}$, ozn. $\text{Tr}(\mathbf{A})$; $\text{Sp}(\mathbf{A})$. Platí napr. ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, tak $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$.

Veta 12.4. Podobné matice majú ten istý charakteristický polynóm.

Dôkaz. Majme $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, nech $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$ pre dákú regulárnu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Chceme ukázať, že $\chi_A(t) = \chi_B(t)$. Z definície: $\chi_B(t) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{B}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{PAP}^{-1}) = \det(\mathbf{P}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^{-1}) \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \chi_A(t)$.

□

Definícia 12.9. Charakteristický polynóm lineárnej transformácie $f: R^n \rightarrow R^n$ (R je pole) je charakteristický polynóm matice lineárnej transformácie vzhľadom na ľubovoľnú bázu v R^n .

Definícia je dobrá, lebo ak $\mathbf{A}$ je matica transformácie f vzhľadom na jednu bázu a $\mathbf{B}$ je jej matica vzhľadom na inú bázu, tak $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú podobné, teda $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.

Poznámka. $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ je komplexne združené k z . $z \in \mathbb{C}$ je reálne $\Leftrightarrow z = \bar{z}$. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Definícia 12.10. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{ks}(\mathbb{C})$. Komplexne združená k nej je matica $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij}) \in \mathfrak{M}_{ks}(\mathbb{C})$.

Zrejme platí: $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$; $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}}$.

Veta 12.5. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je symetrická (t.j. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). Ak $\mathbf{A}$ chápeme ako komplexnú maticu, tak všetky jej vlastné hodnoty sú reálne.

Dôkaz. Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je ľubovoľná vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$. Teda existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ taký, že $\vec{x}\mathbf{A} = \lambda\vec{x}$. Komplexné združenie: $\vec{x}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\lambda}\vec{x}$ t.j. $\vec{x}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\lambda}\vec{x}$. Pretože $\mathbf{A}$ má všetky prvky reálne, máme $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, a teda $\vec{x}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\lambda}\vec{x}$. Transponovanie dáva: $(\vec{x}\mathbf{A})^T = (\bar{\lambda}\vec{x})^T$, t.j. $\mathbf{A}^T \vec{x}^T = \bar{\lambda}\vec{x}^T$, ale $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ a preto $\mathbf{A}\vec{x}^T = \bar{\lambda}\vec{x}^T \Leftrightarrow \vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T = \bar{\lambda}\vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T$.

Máme: $\vec{x}\mathbf{A} = \lambda\vec{x}$; preto $\lambda\vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T = \bar{\lambda}\vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T$ t.j. $(\lambda - \bar{\lambda})\vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T = 0$. $\vec{x}\bar{\mathbf{A}}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$, keďže $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, preto $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ t.j. $\lambda = \bar{\lambda}$ teda $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Podobnosť matice s diagonálnou maticou.

Veta 12.6. Matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú celý priestor R^n . Ak $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici, tak je podobná matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že matica $\mathbf{A}$ je podobná $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Pretože máme $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) : \vec{e}_i \mathbf{D} = d_i \vec{e}_i$, teda $d_1, \dots, d_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{D}$ (a $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sú príslušné vlastné vektory). Vieme, že $\{d_1, \dots, d_n\}$ je tiež množinou všetkých vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$. Chceme ukázať, že vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú R^n . Máme, že $\mathbf{D} = \mathbf{PAP}^{-1}$ pre vhodnú regulárnu maticu $\mathbf{P}$. Teda z $\vec{e}_i \mathbf{D} = d_i \vec{e}_i$ dostaneme: $\vec{e}_i \mathbf{PAP}^{-1} = d_i \vec{e}_i$ (sprava $\mathbf{P}$): $(\vec{e}_i \mathbf{P}) \mathbf{A} = d_i (\vec{e}_i \mathbf{P})$. $\vec{e}_1 \mathbf{P}, \dots, \vec{e}_n \mathbf{P}$ sú nenulové z R^n , teda sú to vlastné vektory patriace k vlastným hodnotám $d_1, \dots, d_n$ matice $\mathbf{A}$. Navyše $\vec{e}_1 \mathbf{P}, \dots, \vec{e}_n \mathbf{P}$ sú lineárne nezávislé, lebo sú to obrazy báзовých vektorov $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ priestoru R^n pri regulárnej lineárnej transformácii $f_P : R^n \rightarrow R^n$. Teda $\vec{e}_1 \mathbf{P}, \dots, \vec{e}_n \mathbf{P}$ sú vlastné vektory matice $\mathbf{A}$, generujúce R^n .

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú celý priestor R^n . Vyberme spomedzi nich bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ priestoru R^n . Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$ patriace k $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$. Teda $\vec{b}_1 \mathbf{A} = \lambda_1 \vec{b}_1 = f_A(\vec{b}_1), \dots, \vec{b}_n \mathbf{A} = \lambda_n \vec{b}_n = f_A(\vec{b}_n)$. t.j. máme, že $f_A(\vec{b}_1) = \lambda_1 \vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n, \dots, f_A(\vec{b}_n) = 0\vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$. Teda lineárna transformácia $f_A : R^n \rightarrow R^n$ (ktorá vzhľadom na $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ má maticu $\mathbf{A}$) má vzhľadom na bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ maticu $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Potom z jednej z viet vieme, že $\mathbf{A}$ je podobná $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. □

Príklad. Matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nie je podobná diagonálnej matici.

$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2$. Keby $\mathbf{A}$ bola podobná diagonálnej matici, tak by bola podobná $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Teda by existovala regulárna matica $\mathbf{P}$ taká, že $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – to nie je pravda, preto $\mathbf{A}$ nie je podobná diagonálnej matici.

Vlastné vektory patriace k vlastnej hodnote $\lambda=1$: $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (x_1, x_2)$.

Z toho: $x_1 = x_1$ a $x_1 + x_2 = x_2$ Potom $x_1 = 0$. Vlastné vektory sú tvaru: $k(0, 1)$; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Vlastné vektory negenerujú celé $\mathbb{R}^2$, podľa vety $\mathbf{A}$ nie je podobná diagonálnej matici.

Veta 12.7. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ a nech $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in R$ sú také vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$, ktoré sú navzájom rôzne. Nech $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sú vlastné vektory patriace $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Potom $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Indukcia podľa r :

1° Pre $r=1$ keďže $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ je lineárne nezávislé, tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $r-1$. Teraz nech $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ je r navzájom rôznych vlastných hodnôt, nech príslušné vlastné vektory sú $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$. Nech $\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Sprava $(\lambda_r \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$:
 $\alpha_1 \vec{b}_1 (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) + \dots + \alpha_{r-1} \vec{b}_{r-1} (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) = \vec{0} (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) \Leftrightarrow \alpha_1 \vec{b}_1 \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_1 \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots$
 $\dots + \alpha_{r-1} \vec{b}_{r-1} \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} \vec{b}_{r-1} + \alpha_r \vec{b}_r \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_r \vec{b}_1 - \alpha_1 \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots$
 $\dots + \alpha_{r-1} \lambda_r \vec{b}_{r-1} + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} \vec{b}_{r-1} + \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r - \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Teda $\alpha_1 (\lambda_r - \lambda_1) \vec{b}_1 + \dots +$
 $+ \alpha_{r-1} (\lambda_r - \lambda_{r-1}) \vec{b}_{r-1} = \vec{0}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r-1}$ sú lineárne nezávislé. Preto $\alpha_1 (\lambda_r - \lambda_1) = 0, \dots, \alpha_{r-1} (\lambda_r - \lambda_{r-1}) = 0$. Ale $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$, teda $\lambda_r - \lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r - \lambda_{r-1} \neq 0$, z toho: $\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$. Zostáva $\alpha_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Pretože $\vec{b}_r \neq \vec{0}$, máme aj $\alpha_r = 0$.

□

Dôsledok. Ak $\mathbf{A}$ je taká matica, že má n navzájom rôznych vlastných hodnôt, tak príslušné vlastné vektory sú lineárne nezávislé, teda generujú celé R^n , a teda je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Niektoré fakty o polynómoch.

Veta 12.8. Nech polynóm $p(t)$ je stupňa $n \geq 0$; $q(t)$ je stupňa $m \geq 0$ nad R . Potom existuje jediný polynóm $d(t)$ a jediný polynóm $r(t)$ ($\deg(r(t)) < m$) také, že $p(t) = d(t)q(t) + r(t)$.

Veta 12.9. Nech $p(t) \in R[t]$, $\deg(p(t)) \geq 1$. Potom $\alpha \in R$ je koreňom $p(t)$ práve vtedy, keď $p(t) = (t - \alpha)q(t)$, kde $\deg(q(t)) = \deg(p(t)) - 1$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\alpha \in R$ je koreň. Teda $p(\alpha) = 0$. Z vety 12.8 vieme, že: $p(t) = (t - \alpha)q(t) + r(t)$, kde $\deg(r(t)) < 1$. Keďže $p(\alpha) = 0 = r(\alpha)$, máme $r(t) \equiv 0$, teda $p(t) = (t - \alpha)q(t)$.

$\Leftarrow$: Ak $p(t) = (t - \alpha)q(t)$, tak $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$, teda α je koreň.

□

Definícia 10.11. Hovoríme, že polynóm $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in R[t]$ sa nad R úplne rozkladá na lineárne činitele, ak $p(t)$ sa dá vyjadriť v tvare $p(t) = a_n(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$ pre dáke $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$. Keď združíme rovnaké činitele, tak dostaneme: $p(t) = a_n(t - \alpha_1)^{k_1} \dots (t - \alpha_s)^{k_s}$, pričom $\sum k_i = n$.

Príklad. Polynóm $t^2 + 1$ sa nad $\mathbb{R}$ nerozkladá úplne na lineárne činitele, ale nad $\mathbb{C}$ sa rozkladá.

Základná veta algebry.

Každý nekonštantný polynóm z $\mathbb{C}[t]$ má v $\mathbb{C}$ koreň.

Dôsledok. Každý polynóm z $\mathbb{C}[t]$ sa úplne rozkladá na lineárne činitele nad $\mathbb{C}$.

Tvrdenie 12.4. Každý nekonštantný polynóm s reálnymi koeficientmi sa rozkladá na súčin polynómov stupňa ≤ 2 .

Dôkaz. Nech $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Ak $p(t)$ chápeme ako polynóm nad $\mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je jeho koreň, tak aj $\bar{z}_0$ je koreň, lebo $p(z_0) = 0 = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0$, a teda tiež $0 = a_n \bar{z}_0^n + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = a_n \bar{z}_0^n + \dots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = a_n (\bar{z}_0)^n + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0$. Z dôsledku základnej vety algebry vieme, že $p(t) = a_n(t - z_1) \dots (t - z_n)$ pre $z_i \in \mathbb{C}$. Ale ak z_i je koreň, tak aj $\bar{z}_i$ je koreň, teda pre $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $z_i = \bar{z}_j$ pre vhodné $j \in \{1, \dots, n\}$. Teda $p(t)$ obsahuje súčiny $(t - z_j)(t - \bar{z}_j) = t^2 - \underbrace{(z_j + \bar{z}_j)}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{z_j \bar{z}_j}_{\in \mathbb{R}}$; ob-

sahuje činitele stupňa 1 $\vee$ 2.

□

Tvrdenie 12.5. Ak $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ má nepárny stupeň, tak $p(t)$ má koreň v $\mathbb{R}$.

Dôkaz. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že ak $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ nemá reálne korene, tak má párny stupeň.

□

Veta 12.10. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ má charakteristický polynóm $\chi_A(t) \in R[t]$ taký, že sa úplne rozkladá nad R na navzájom rôzne lineárne činitele, $\chi_A(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$. Nech $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sú vlastné vektory patriace k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, označme $V_A(\vec{b}_i) = [\vec{b}_i] \subset R^n$. Potom matica $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]$.

Dôkaz. To, že $\mathbf{A}$ je podobná $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ už vlastne vieme z dôsledku vety 12.7. Tiež vieme, že $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ generujú celé R^n . Teda každé $\vec{x} \in R^n$ je tvaru $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots$

$\cdots + \alpha_n \vec{b}_n$, teda $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \cdots \oplus [\vec{b}_n]$. Ale $[\vec{b}_i] \cap ([\vec{b}_1] \oplus \cdots \oplus [\vec{b}_{i-1}] \oplus [\vec{b}_{i+1}] \oplus \cdots \oplus [\vec{b}_n]) = \{\vec{0}\}$ pre každé i . (keby nie, tak by pre dáke $\alpha \vec{b}_i = \beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_{i-1} \vec{b}_{i-1} + \beta_{i+1} \vec{b}_{i+1} + \cdots + \beta_n \vec{b}_n$, čo je nemožné, lebo $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sú lineárne nezávislé.) Teda v skutočnosti: $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \cdots \oplus [\vec{b}_n]$. □

Definícia 12.12. Pre $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ definujeme jej k -tú mocninu ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) takto: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n, \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1}$.

Veta Cayley-Hamiltonova.

Nech $\chi_A(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in R[t]$ je charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Potom platí $a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}$. Stručne $\chi_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ máme

$$\mathbf{B} \cdot \text{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(\det(\mathbf{B}), \dots, \det(\mathbf{B})) = \det(\mathbf{B}) \mathbf{I}_n$$

to platí aj pre matice nad komutatívnym okruhom s 1. Špeciálne:

$$(*) \quad (t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n = \chi_A(t) \cdot \mathbf{I}_n$$

Lubovoľnú maticu nad okruhom $R[t]$ môžeme napísať v tvare "polynóm" s koeficientami z $M_{nn}(R)$ pri mocninách t . Napr.:

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & -1 \\ 0 & t & 2t \\ t+t^2 & t+t^2 & t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ takto napíšeme ako "polynóm" s konštantnými maticovými koeficientmi stupňa $\leq n-1$. Teda $\text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t + \cdots + \mathbf{B}_{n-1} t^{n-1}$ pre vhodné $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{n-1} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Teda (*) prepíšeme $(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t + \cdots + \mathbf{B}_{n-1} t^{n-1}) = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) \mathbf{I}_n$. Porovnáme koeficienty na ľavej a pravej strane pri rovnakých mocninách t .

$$\begin{array}{lll} t^0 : & -\mathbf{A}\mathbf{B}_0 = a_0 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^0 \\ t^1 : & \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1 = a_1 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A} \\ t^2 : & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_2 = a_2 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t^{n-1} : & \mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1} = a_{n-1} \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^{n-1} \\ t^n : & \mathbf{B}_{n-1} = \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^n \end{array}$$

Sčítaním ľavých resp. pravých strán: $a_0 \mathbf{I}_n + a_1 \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$. □

Veta 12.11 a Definícia 12.13. Pre každú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ existuje práve jeden polynóm $\mu_A(t) \in R[t]$ s koeficientom 1 pri najvyššej mocnine t taký, že " $\mu_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ " a taký, že každý polynóm $R[t] \ni p(t) \neq 0$ s vlastnosťou " $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ " je násobkom polynómu $\mu_A(t)$. Polynóm $\mu_A(t)$ sa nazýva minimálny polynóm matice $\mathbf{A}$.

Dôkaz. Označme $N_A = \{p(t) \in R[t]; p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ a ak $p(t) \neq 0$, tak má koeficient 1 pri najvyššej mocnine. $N_A \neq \emptyset$, lebo z Cayley – Hamiltonovej vety vieme, že $\chi_A(t) \in N_A$.

Zároveň je jasné, že v N_A existujú polynómy stupňa ≥ 0 . Nech $\mu_A(t)$ je polynóm najmenšieho stupňa ≥ 1 v N_A . Nech $p(t) \neq 0$ je taký, že $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Chceme ukázať, že $p(t)$ je násobkom $\mu_A(t)$. Vieme, že existuje jediný $p(t)$ a jediný $r(t)$ tak, že $p(t) = \mu_A(t)q(t) + r(t)$, pričom $\deg(r(t)) < \deg(\mu_A(t))$. Máme $r(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ a zároveň $\deg(r(t)) < \deg(\mu_A(t))$, to je možné len tak, že $r(t) \equiv 0$, teda $p(t)$ je $q(t)$ -násobkom polynómu $\mu_A(t)$. Ešte treba ukázať jednoznačnosť: Nech by boli dva také polynómy $\mu_A(t); \bar{\mu}_A(t)$ s potrebnými vlastnosťami. Potom $\bar{\mu}_A(t)$ je násobkom polynómu $\mu_A(t)$, ale aj μ_A je násobkom $\bar{\mu}_A(t)$. Pretože $\mu_A(t)$ aj $\bar{\mu}_A(t)$ má koeficient 1 pri najvyššej mocnine, dostávame $\mu_A(t) = \bar{\mu}_A(t)$.

□

Príklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(t) = (t-1)^2$. $\mu_A(t)$ by mohol byť $(t-1)^2$ alebo $(t-1)$.
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ teda $t-1$ nie je minimálny polynóm. Teda $\mu_A(t) = (t-1)^2$.

Jordanov normálny tvar matice (lineárnej transformácie).

Definícia 12.14. Ak $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia a $\lambda \in R$ je jej vlastná hodnota, tak $(f - \lambda)^k$ bude označovať lineárnu transformáciu $(f - \lambda \text{id}_{R^n}) \circ \dots \circ (f - \lambda \text{id}_{R^n}) : R^n \rightarrow R^n$. Špeciálne: $(f - \lambda)^0 = \text{id}_{R^n}$. Označme $V_f(\lambda) = \{\vec{x} \in R^n; \text{ existuje } n \geq 0 \text{ také, že } (f - \lambda)^n(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Vlastné vektory lineárnej transformácie f patriace k λ patria do $V_f(\lambda)$: ak $\vec{v}$ je vlastný vektor patriaci k λ , tak $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ t.j. $(f - \lambda)(\vec{v}) = \vec{0}$.

Definícia 12.15. $V_f(\lambda)$ sa nazýva *zovšeobecnená vlastná množina* patriaca k vlastnej hodnote λ .

Veta 12.12.

- 1.) $V_f(\lambda)$ je vektorový podpriestor v R^n .
- 2.) $f(V_f(\lambda)) \subset V_f(\lambda)$ (tomu sa hovorí, že $V_f(\lambda)$ je f -invariantný podpriestor v R^n .)
- 3.) Pre $\vec{x} \in R^n$ označme $\vec{x}_i = (f - \lambda)^i(\vec{x})$. Ak $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$ sú (pre dáke k) nenulové, ale už $\vec{x}_k = \vec{0}$, tak potom $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$ sú lineárne nezávislé.

Dôkaz.

- 1.) $V_f(\lambda) \neq \emptyset$, lebo tam patria vlastné vektory f . Nech $\vec{x}, \vec{y} \in V_f(\lambda)$ sú ľubovoľné, nech $\alpha \in R, \beta \in R$. Chceme ukázať, že $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V_f(\lambda)$. Máme $(f - \lambda)^k(\vec{x}) = \vec{0}$ pre dáke $k \geq 0$; $(f - \lambda)^m(\vec{y}) = \vec{0}$ pre dáke $m \geq 0$. Potom $(f - \lambda)^{k+m}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = (f - \lambda)^m(f - \lambda)^k(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = (f - \lambda)^m(\alpha(f - \lambda)^k(\vec{x}) + \beta(f - \lambda)^k(\vec{y})) = \beta(f - \lambda)^m(f - \lambda)^k(\vec{y}) = \beta(f - \lambda)^k(\vec{y}) = \vec{0}$.

$$\cdot \underbrace{(f - \lambda)^m(\vec{y})}_{\vec{0}} = \vec{0}.$$

- 2.) Nech $\vec{y} \in f(V_f(\lambda))$. Chceme ukázať, že $\vec{y} \in V_f(\lambda)$. Máme $\vec{y} = f(\vec{x})$ pre dáke $\vec{x} \in V_f(\lambda)$. Teda $\exists m \geq 0$: $(f - \lambda)^m(\vec{x}) = \vec{0}$. Potom $(f - \lambda)^m(\vec{y}) = (f - \lambda)^m(f(\vec{x})) = (f - \lambda)^m \circ f(\vec{x}) = f \circ \underbrace{(f - \lambda)^m(\vec{x})}_{\vec{0}} = \vec{0}$, teda $\vec{y} \in V_f(\lambda)$.

- 3.) Nech $\alpha_0\vec{x}_0 + \dots + \alpha_{k-1}\vec{x}_{k-1} = \vec{0}$, chceme ukázať, že $\alpha_0 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Máme $\alpha_0(f - \lambda)^0(\vec{x}) + \alpha_1(f - \lambda)^1(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$. Aplikujeme na obe strany $(f - \lambda)^{k-1}$. Potom $\alpha_0(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) + \alpha_1(f - \lambda)^k(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{2k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$
 $\alpha_0\vec{x}_{k-1} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}_{k-1} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha_0 = 0$.
 Zostáva: $\alpha_1(f - \lambda)^1(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0} \quad / (f - \lambda)^{k-2}$
 $\alpha_1(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{2k-3}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \alpha_1\vec{x}_{k-1} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$ atď.
 $\alpha_i = 0 \quad \forall i$.

□

Dôsledok. $\forall \vec{a} \in V_f(\lambda)$ máme $(f - \lambda)^n(\vec{a}) = \vec{0}$.

Dôkaz. Nech $\vec{a} \in V_f(\lambda)$ je ľubovoľný. Ak $(f - \lambda)^n(\vec{a}) \neq \vec{0}$, tak aj $\vec{a}_i = (f - \lambda)^i(\vec{a}) \neq \vec{0}$ pre $i = 0, \dots, n$. Z 3.) by sme mali (keďže existuje $m \geq 0 : (f - \lambda)^m(\vec{a}) = \vec{0}$, pretože $\vec{a} \in V_f(\lambda)$), že $\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé. Ale je ich $n+1$ a sú v R^n -spor. $\square$

Definícia 12.16. *Jordanova matica* typu $n \times n$ nad poľom R patriaca k vlastnej hodnote λ (lineárnej transformácie, resp. matice) je matica, ktorá má na hlavnej diagonále samé λ , na susednej (zhora) čiare rovnobežnej s hlavnou diagonálou má samé 1, a inde 0. Ozn. $\mathbf{J}_n(\lambda)$.

Príklad. $\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda), \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Veta 12.13. *Nech $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia, ktorá má jedinú a pritom n -násobnú vlastnú hodnotu $\lambda \in R$. Potom $V_f(\lambda) = R^n$ a vo $V_f(\lambda)$ existuje báza, vzhľadom na ktorú má f maticu $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, pozostávajúca z Jordanových matíc $\mathbf{J}_{q_1}(\lambda), \dots, \mathbf{J}_{q_r}(\lambda)$ (kde $q_1 \geq \dots \geq q_r$) umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály a okrem toho už iba z núl. $q_1 + \dots + q_r = n$*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{q_1}(\lambda)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{J}_{q_2}(\lambda)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{q_r}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

Veta 12.14. *Pre maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ takú, že má jedinú n -násobnú vlastnú hodnotu $\lambda \in R$ platí, že $V_f(\lambda) = R^n$ a matica $\mathbf{A}$ je podobná matici $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ pozostávajúcej z Jordanových matíc: $\mathbf{J}_{q_1}(\lambda), \dots, \mathbf{J}_{q_r}(\lambda)$ umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály ($q_1 + \dots + q_r = n$) ináč iba z núl.*

Dôkaz. $\chi_A(t) = (t - \lambda)^n$. Z Cayley – Hamiltonovej vety: $(f - \lambda)^n \equiv 0$. T.j. pre $\forall \vec{x} \in R^n : (f - \lambda)^n(\vec{x}) = \vec{0}$; z toho teda $R^n = V_f(\lambda)$. $\square$

Veta 12.15. *Nech $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia taká, že jej charakteristický polynóm je: $\chi_f(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_s)^{n_s}$ (kde $n_1 + \dots + n_s = n$). Potom $R^n = V_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_f(\lambda_s)$ a pre každé $V_f(\lambda_i); i = 0, 1, \dots, s$ existuje jeho báza, vzhľadom na ktorú má $f|_{V_f(\lambda_i)} : V_f(\lambda_i) \rightarrow V_f(\lambda_i)$ maticu $\mathbf{A}(\lambda_i) \in \mathfrak{M}_{n_i n_i}(R)$ pozostávajúcu z Jordanových matíc (súčet stupňov ktorých je n_i) umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály a ináč iba z núl. Teda vzhľadom na bázu $(B_1, \dots, B_s)$ priestoru R^n má f maticu tvaru:*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{q_1}(\lambda)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{J}_{q_2}(\lambda)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{q_r}(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Potom $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \dots (t - \lambda_s)^{n_s}$. ($\sum n_i = n$) platí, že $R^n = V_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_f(\lambda_s)$ a matica $\mathbf{A}$ je podobná matici tvaru $(*)$.

Definícia 12.17. Matica $(*)$ je tzv. *Jordanov normálny tvar* matice $\mathbf{A}$.

Poznámka.

- 1.) Každá matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{C})$ spĺňa predpoklady vety a teda k nej existuje nejaký Jordanov normálny tvar.
- 2.) Špeciálne, ak matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je taká, že $\chi_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ kde $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$, tak sme už dávnejšie dokázali, že $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Toto je Jordanov normálny tvar takejto matice $\mathbf{A}$.

Tvrdenie 12.6.

- 1.) *Jordanov normálny tvar je jediný, odhliadnime od permutácie Jordanových matíc pozdĺž hlavnej diagonály.*
- 2.) *Dve matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ také, že ich charakteristické polynómy sa nad R úplne rozkladajú na lineárne činitele sú podobné práve vtedy, keď pripúšťajú ten istý Jordanov normálny tvar.*
- 3.) *Počet Jordanových matíc v Jordanovom normálnom tvare matice $\mathbf{A}$ sa rovná najmenšiemu možnému počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$.*
- 4.) *Počet Jordanových matíc zodpovedajúcich nejakej vlastnej hodnote matice $\mathbf{A}$ sa rovná maximálnemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k tej vlastnej hodnote. Ak $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in R$; ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$) tak $m_i =$ súčet stupňov Jordanových matíc patriacich k λ_i .*
- 5.) *Stupeň najväčšej spomedzi Jordanových matíc patriacich k vlastnej hodnote λ sa rovná násobnosti λ ako koreňa minimálneho polynómu.*
- 6.) *Nech $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$. Potom stupeň najväčšej spomedzi Jordanových matíc patriacich k λ_i určíme takto: vyrátame $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n, (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^2, \dots$. Zistíme, že hodnota matice $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^k$ s rastom k po čase prestane klesať. Práve najmenšia hodnota k , pre ktorú sa dosiahne najnižšia hodnota sa rovná stupni najväčšej Jordanovej matice patriacej k λ_i .*

Príklad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -4 & -\frac{11}{3} \\ 2 & 3 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 6 & 6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2 \\ \text{teda existuje jej} \\ \text{Jordanov} \\ \text{normálny tvar.} \end{array}$$

$h(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4) = 3$; $h((\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)^2) = 2$; $h((\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)^3) = 2, \dots$ Teda v Jordanovom normálnom tvare bude $\mathbf{J}_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4) = 2$; $h((\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^2) = 2, \dots$ stupeň najväčšej Jordanovej matice patriacej k 1 bude 1. Z toho Jordanov normálny tvar matice $\mathbf{A}$ je:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka.

Nech charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je $\chi_A(t) = (t - \lambda)^n$. Potom:

- (i) Najväčšia Jordanova matica má stupeň k_1 , kde k_1 je najmenšie celé také, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1} = 0$.
- (ii) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-1}) =$ počet Jordanových matíc stupňa k_1 .
- (iii) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-2}) = (2 \cdot \text{počet Jordanových matíc stupňa } k_1) + (\text{počet Jordanových matíc stupňa } (k_1-1))$.
- (iv) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-3}) = (3 \cdot \text{počet JM stupňa } k_1) + 2 \cdot (\text{počet JM stupňa } k_1-1) + 1 \cdot (\text{počet JM stupňa } (k_1-2))$.

atď.

Príklad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{R}) \quad \begin{array}{ll} \chi_A(t) = (t-1)^4, & h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4) = 2 \\ h((\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^2) = 1, & h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^3 = 0 \end{array}$$

Potom počet Jordanových matic stupňa 3 je $h((\mathbf{A}-1\mathbf{I}_4)^2)=1$.

Jordanov normálny tvar matice $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III. KVADRATICKÉ FORMY (NAD POĽOM $\mathbb{R}$)

Budeme uvažovať o n ($n \geq 0$) premenných $x_1, \dots, x_n$, ktoré budú môcť nadobúdať reálne hodnoty, pritom bude platiť $x_i x_j = x_j x_i \forall i, j$. Potom *kvadratická forma* n premenných $x_1, \dots, x_n$ je výraz tvaru: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sú tzv. koeficienty kvadratickej formy.

Príklad.

- 1.) 0 je kvadratická forma, kde $a_{ij} = 0 \forall i, j$.
- 2.) $x_1^2 + x_2^2$ je kvadratická forma dvoch premenných.
- 3.) $x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2 x_3$ je kvadratická forma troch premenných.

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2 x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kvadratickú formu $\sum a_{ij} x_i x_j$ (n premenných) môžeme napísať v tvare: $\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Ale takýchto zápisov} \\ \text{v tvare } \mathbf{X} \cdot \text{matica} \cdot \mathbf{X}^T \\ \text{je nekonečne veľa} \\ \text{napr. tiež:} \end{array} \mathbf{X} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - \varepsilon & \cdots & a_{1n} \\ -\varepsilon & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{X}^T$$

pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Veta 13.1. Pre každú kvadratickú formu $\sum a_{ij} x_i x_j$ existuje jediná symetrická matica $\mathbf{S} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$.

Dôkaz. $\mathbf{S} = s_{ij}; s_{ij} = s_{ji}$. Musí byť $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} x_i x_j$. Z porovnávaní:

$$a_{ii} = s_{ii} \text{ pre } i = 1, \dots, n \text{ a pre } i \neq j : s_{ij} + s_{ji} = 2s_{ij} = a_{ij} \Rightarrow s_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij}.$$

$\mathbf{S}$ je matica kvadratickej formy. □

Príklad.

$$2x_1^2 - x_1 x_2 + x_3^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definícia 13.1.

Regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ rozumieme zavedenie nových premenných $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ takých, že $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{P}$ pre dákú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1}$.

Kvadratické formy budeme zapisovať v tvare $\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T$, kde $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$. Urobme v kvadratickej forme $\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T$ regulárnu lineárnu transformáciu premenných $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{P}$. Keďže $\mathbf{P}$ je regulárna, máme $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1}$, teda $\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T = \mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1})^T = \mathbf{Y} \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{P}^{-1})^T}_{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^T$. Máme $\mathbf{B}^T = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{P}^{-1})^T)^T = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{P}^{-1})^T = \mathbf{B}$, teda $\mathbf{B}$ je symetrická. Od formy $\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T$ premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ sme prešli ku kvadratickej forme n premenných $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{Y} \mathbf{B} \mathbf{Y}^T$ pričom $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{P}^{-1})^T$. t.j. $\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{P}^T$.

Definícia 13.2. Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sú *kongruentné* (nad $\mathbb{R}$) ak existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\mathbf{A} = \mathbf{QBQ}^T$.

Poznámka. Ak kvadratickú formu $\mathbf{XSX}^T$ upravíme regulárnou lineárnou transformáciou premenných na "novú" kvadratickú formu, tak matice týchto foriem sú kongruentné.

Veta 13.2. Každú (nenulovú) kvadratickú formu n premenných možno vhodnou regulárnou lineárnou transformáciou premenných previesť na tvar: $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$, kde $s \leq n$.

Dôkaz. Majme (nenulovú) kvadratickú formu $\mathbf{XSX}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = (s_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Vhodnou regulárnou lineárnou transformáciou premenných môžeme $\mathbf{XSX}^T$ previesť na $\mathbf{ZBZ}^T$, kde $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, pričom už $b_{11} \neq 0$. Ak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ také, že $s_{ii} \neq 0$, tak zoberieme $x_i = z_1$, $x_1 = z_i$, $x_j = z_j$ pre $1 \neq j \neq i$. Ak $s_{11} = \dots = s_{nn} = 0$ tak existujú dáke $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq j$, $s_{ij} \neq 0$. Potom zavedieme nové premenné $(y_1, \dots, y_n)$, $x_i = y_i + y_j$; $x_j = y_i - y_j$; $x_k = y_k$ pre $i \neq k \neq j$. To je regulárna lineárna transformácia premenných. Dostaneme: $\mathbf{XSX}^T = 2 \underbrace{s_{ij}}_{\neq 0} x_i x_j + \text{členy bez } x_i x_j = 2s_{ij}(y_i^2 - y_j^2) + \text{členy bez } y_i^2 = 2s_{ij}y_i^2 + \text{členy}$

bez y_i^2 , máme $\mathbf{XSX}^T = \mathbf{YCY}^T$, kde $\mathbf{C} = (c_{ij})$ má $c_{ii} = 2s_{ij} \neq 0$. Potom zámenou premenných $z_1 = y_i$; $z_i = y_1$; $z_j = y_j$ pre $1 \neq j \neq i$ prejdeme k forme $\mathbf{ZBZ}^T$, kde už $b_{11} \neq 0$. Teraz: $\mathbf{XSX}^T = \mathbf{ZBZ}^T = b_{11}z_1^2 + b_{12}z_1z_2 + \dots + b_{1n}z_1z_n + b_{21}z_2z_1 + \dots + b_{n1}z_nz_1 +$

$$+ \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}z_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n b_{1j}z_1z_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}(z_1^2 + 2z_1 \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j) +$$

$$+ \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}(z_1 + \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j - b_{11} \left(\sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j \right)^2,$$

$$\begin{array}{l} \text{zámena} \\ \text{premenných:} \end{array} \left| \begin{array}{l} u_1 = z_1 + \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j \\ u_2 = z_2 \\ \dots \\ u_n = z_n \end{array} \right| - \begin{array}{l} \text{to je regulárna} \\ \text{lineárna transformácia} \\ \text{premenných, jej matica:} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_{12}}{b_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{1n}}{b_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je regulárna. Dostaneme: $\mathbf{XSX}^T = \mathbf{ZBZ}^T = b_{11}u_1^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} g_{ij}u_iu_j = b_{11}u_1^2 + \mathbf{UGU}^T$,

kde $\mathbf{G} \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$, $\mathbf{U} = (u_2, \dots, u_n)$. Opakovaním konečného počtu takýchto krokov dostaneme pomocou regulárnych lineárnych transformácií premenných, že $\mathbf{XSX}^T = d_1v_1^2 + \dots + d_sv_s^2$, kde $s \leq n$. Permutáciou premenných $v_1, \dots, v_n$ dostaneme, že $\mathbf{XSX}^T = c_1p_1^2 + \dots + c_kp_k^2 + c_{k+1}p_{k+1}^2 + c_sp_s^2$, kde $c_1, \dots, c_k$ sú kladné a $c_{k+1}, \dots, c_s$ sú záporné. Potom urobíme regulárnu lineárnu transformáciu premenných: $y_1 = \sqrt{c_1}p_1, \dots, y_k = \sqrt{c_k}p_k, y_{k+1} = \sqrt{-c_{k+1}}p_{k+1}, \dots, y_s = \sqrt{-c_s}p_s$. Potom $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2 = \mathbf{XSX}^T$; $s \leq n$

□

Dôsledok. Každá symetrická matica typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je kongruentná s diagonálnou maticou, ktorá má na hlavnej diagonále iba prvky z $\{-1, 0, 1\}$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tak $\mathbf{XSX}^T$ je kvadratická forma, ktorá sa regulárnou lineárnou transformáciou premenných upraví na tvar: $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$, ($s \leq n$), teda na kvadratickú formu s maticou $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Matice tých kvadratických foriem sú kongruentné.

□

Veta 13.3. (o zotrvačnosti):

Ak danú (nenulovú) kvadratickú formu $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$ n premenných upravíme regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{Y}=\mathbf{X}\mathbf{Q}$ na $y_1^2+\dots+y_k^2-y_{k+1}^2-\dots-y_s^2$, ($s\leq n$) a regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\mathbf{H}$ ju upravíme na $z_1^2+\dots+z_r^2-z_{r+1}^2-\dots-z_t^2$ ($t\leq n$), tak $k=r$ a $s=t$.

Poznámka. Táto veta odôvodňuje, prečo sa tvar $y_1^2+\dots+y_k^2-y_{k+1}^2-\dots-y_s^2$ ($s\leq n$) nazýva aj *kanonický tvar* kvadratickej formy $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$.

Dôkaz. 1.) $[s=t]$: $\mathbf{D}_1=\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_k,\underbrace{-1,\dots,-1}_{s-k},0,\dots,0)$ je matica $y_1^2+\dots+y_k^2-y_{k+1}^2-\dots-y_s^2$. Vieme, že $\mathbf{S}=\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T$. $\mathbf{D}_2=\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_r,\underbrace{-1,\dots,-1}_{t-r},0,\dots,0)$

je matica $z_1^2+\dots+z_r^2-z_{r+1}^2-\dots-z_t^2$. Tiež $\mathbf{S}=\mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{H}^T$. Pre hodnotu máme:

$h(\mathbf{S})=h(\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T)=\dim(\text{Im}f_{Q^T D_1 Q})=\dim(\text{Im}f_{Q^T} f_{D_1} f_Q)=\dim(\text{Im}f_{Q^T} f_{D_1})=$

$=\dim(\text{Im}f_{D_1})=h(\mathbf{D}_1)=s$ (pretože $\mathbf{Q}$ aj $\mathbf{Q}^T$ je lineárny izomorfizmus).

2.) $[k=r]$: Nech by $r<k$. $f_Q:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$, $f_H:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ sú lineárne izomorfizmy. Označme $S_1=[\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k]$, $S_2=[\vec{e}_{r+1},\dots,\vec{e}_n]$ podpriestory v $\mathbb{R}^n$. Teda $\dim(S_1)=k$, $\dim(S_2)=n-r$. Označme $T_1=f_Q^{-1}(S_1)$, $T_2=f_H^{-1}(S_2)$. Pretože f_Q, f_H sú lineárne izomorfizmy, máme $\dim(T_1)=k$, $\dim(T_2)=n-r$. Tvrdíme, že $T_1\cap T_2\neq\{\vec{0}\}$.

$\dim(T_1+T_2)=\dim(T_1)+\dim(T_2)-\dim(T_1\cap T_2)=\dim(T_1)+\dim(T_2)=k+n-r$. Ale z predpokladu $k-r>0$, teda by bolo, že $\dim(T_1+T_2)>n$ spor s tým, že $T_1+T_2\subset\mathbb{R}^n$.

Nech teraz $\vec{c}\in T_1\cap T_2$, $\vec{c}\neq\vec{0}$. Máme $\mathbf{D}_1=\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_k,\underbrace{-1,\dots,-1}_{s-k},0,\dots,0)$,

$\mathbf{D}_2=\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_r,\underbrace{-1,\dots,-1}_{s-r},0,\dots,0)$. Vieme, že $\mathbf{S}=\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{S}=\mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{H}^T$. Rá-

tajme: $\vec{c}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{c}^T=\vec{c}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T\cdot\vec{c}^T=(\vec{c}\cdot\mathbf{Q})\mathbf{D}_1(\vec{c}\cdot\mathbf{Q})^T=f_Q(\vec{c})\mathbf{D}_1(f_Q(\vec{c}))^T$. Keďže $f_Q(\vec{c})\in S_1$

máme: $f_Q(\vec{c})=(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k,0,\dots,0)$, kde $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k)\neq(0,\dots,0)$. Teda $\vec{c}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{c}^T=$

$=(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k,0,\dots,0)\cdot\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_k, -1,\dots,-1,0,\dots,0)(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k,0,\dots,0)^T=$

$=(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k,0,\dots,0)(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k,0,\dots,0)^T=\tilde{c}_1^2+\dots+\tilde{c}_k^2>0$. Zároveň: $\vec{c}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{c}^T=$

$=\vec{c}\cdot\mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{H}^T\cdot\vec{c}^T=f_H(\vec{c})\mathbf{D}_2(f_H(\vec{c}))^T$, $\vec{0}\neq f_H(\vec{c})=(\underbrace{0,\dots,0}_r,\tilde{c}_{r+1},\dots,\tilde{c}_n)$. Preto

$\vec{c}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{c}^T=(0,\dots,0,\tilde{c}_{r+1},\dots,\tilde{c}_n)\text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_r,\underbrace{-1,\dots,-1}_{s-r},0,\dots,0)(0,\dots,0,\tilde{c}_{r+1},$

$\dots,\tilde{c}_n)^T=(0,\dots,0,-\tilde{c}_{r+1},\dots,-\tilde{c}_s,0,\dots,0)(0,\dots,0,\tilde{c}_{r+1},\dots,\tilde{c}_n)^T=$

$=-\tilde{c}_{r+1}^2-\dots-\tilde{c}_s^2<0$ spor.

Podobne sa odvodí spor z predpokladu $r>k$. Vcelku: $r=k$.

□

Definícia 13.3. Kvadratická forma $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T$ sa nazýva *kladne definitná*, ak pre všetky $\mathbf{X}\neq\vec{0}$ je $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T>0$. [nazýva sa *kladne semidefinitná*, ak $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T\geq 0$ pre všetky $\mathbf{X}\neq\vec{0}$; nazýva sa *záporne definitná* ak $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T<0$ pre všetky $\mathbf{X}\neq\vec{0}$.]

Definícia 13.4. Symetrická matica $\mathbf{A}\in\mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sa volá *kladne definitná*, ak kvadratická forma $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T$ je kladne definitná.

Veta 13.4. Ak kvadratická forma $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T$ je kladne definitná a $\mathbf{Y}=\mathbf{X}\mathbf{P}$ je regulárna lineárna transformácia premenných, tak kvadratická forma $\mathbf{Y}\mathbf{B}\mathbf{Y}^T$ získaná z $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T$ uvedenou regulárnou lineárnou transformáciou premenných je tiež kladne definitná.

Dôkaz. Vieme, že $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^T$, $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{P}^{-1})^T$. Potom pre ľubovoľnú $\mathbf{Y}\neq\vec{0}$ máme $\mathbf{Y}\mathbf{B}\mathbf{Y}^T=\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{Y}^T=(\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1})^T$, ak forma $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T$ je kladne defi-

nitná, tak $\mathbf{YBY}^T = (\mathbf{YP}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{YP}^{-1})^T > 0$, lebo $\mathbf{YP}^{-1} \neq \mathbf{0}$ (keďže $\mathbf{P}^{-1}$ je regulárna matica). Teda aj forma $\mathbf{YBY}^T$ je kladne definitná. $\square$

Veta 13.5. Kvadratická forma je kladne definitná práve vtedy, keď jej kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2$.

Dôkaz. $\boxed{\Leftarrow}$: Ak kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2$, tak pre všetky $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n) \neq \mathbf{0}$ je $y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že aj pôvodná forma je kladne definitná.

$\boxed{\Rightarrow}$: Predpokladajme, že daná kvadratická forma je kladne definitná. Jej kanonický tvar $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$; $s \leq n$. Keby bolo $k < s \leq n$, tak hodnota tejto kvadratickej formy v $(\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$ by bola -1 , a teda táto kvadratická forma

by nebola kladne definitná t.j. ani pôvodná by nebola kladne definitná – spor. $\square$

Veta 13.6. Matica $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je kladne definitná práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\mathbf{P} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\mathbf{A} = \mathbf{PP}^T$.

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je kladne definitná. Teda kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná, teda jej kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2 = \mathbf{YI}_n\mathbf{Y}^T$. Potom vieme, že $\mathbf{A} = \mathbf{PI}_n\mathbf{P}^T$, kde $\mathbf{Y} = \mathbf{XP}$ je regulárna lineárna transformácia premenných, ktorá $\mathbf{XAX}^T$ prevedie na $\mathbf{YI}_n\mathbf{Y}^T$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že $\mathbf{A} = \mathbf{PP}^T$. Potom kvadratická forma určená maticou $\mathbf{A}$ je $\mathbf{XAX}^T = \mathbf{XPP}^T\mathbf{X}^T = (\mathbf{XP})(\mathbf{XP})^T$. Ak $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$, tak $\mathbf{XAX}^T > 0$, alebo $\mathbf{XP} = (x_1, \dots, x_n)\mathbf{P}$ je nenulová n -tica $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ a $b_1^2 + \dots + b_n^2 > 0$. $\square$

Veta 13.7. (Sylvestrovo kritérium)

Matica $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je kladne definitná práve vtedy, keď $\det(a_{11}) > 0$,

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0$ čo je ekvivalentné s tým, že kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná.

Stručne: práve vtedy, keď všetky tzv. hlavné rohové determinanty matice $\mathbf{A}$ sú kladné.

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na n :

1°: Pre $n=1$: $a_{11}x_1^2$ je kladne definitná práve vtedy, keď $a_{11} = \det(a_{11}) > 0$.

2°: Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky reálne symetrické matice typu $(n-1) \times (n-1)$. Teraz nech $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Nutnosť podmienky: Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je kladne definitná. Chceme ukázať, že jej hlavné rohové determinanty sú kladné. Vieme, že kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná. $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$. $\mathbf{XAX}^T = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}x_i x_j +$

$+ 2 \cdot (a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}x_n) + a_{nn}x_n^2$. Uvažujme o kvadratickej forme:

$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}x_i x_j$. Jej matica je $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$. Táto kvadratická forma je

tiež kladne definitná. Keby nie, tak by existovala $(n-1)$ -tica $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \neq \mathbf{0}$ taká, že $\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \leq 0$. Potom $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, 0)$ by bola nenulová n -tica, pričom

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \leq 0$ – spor s tým, že $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná.

Z indukčného predpokladu: $\det(a_{11}) > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} > 0$. Zostáva

ešte ukázať, že $\det(\mathbf{A}) > 0$. Ale matica $\mathbf{A}$ je kladne definitná, a teda podľa vety 13.6 existuje regulárna matica $\mathbf{P} : \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$, preto $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^T) = \det^2(\mathbf{P}) > 0$ keďže $\mathbf{P}$ je regulárna.

Postačujúcosť: Predpokladajme, že $\det(a_{11}) > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0$.

Z indukčného predpokladu vyplýva, že kvadratická forma

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij} x_i x_j$$

je kladne definitná. Teda existuje regulárna matica $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ taká, že regulárna lineárna transformácia premenných $(y_1, \dots, y_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \mathbf{P}$ prevedie túto kvadratickú formu na $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2$. Definujme $y_n = x_n$. To znamená, že dostaneme regulárnu lineárnu transformáciu n premenných $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$.

Táto prevedie kvadratickú formu $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ na $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2 \cdot (b_{1n} y_1 y_n + \dots + b_{n-1n} y_{n-1} y_n) + b_{nn} y_n^2$ pre vhodné $b_{ij} \in \mathbb{R}$.

Upravíme: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = (y_1 + \dots + b_{1n} y_n)^2 + \dots + (y_{n-1} + b_{n-1n} y_n)^2 + c y_n^2 =$

$$= \begin{vmatrix} z_1 = y_1 + \dots + b_{1n} y_n \\ \vdots \\ z_{n-1} = y_{n-1} + b_{n-1n} y_n \\ z_n = y_n \end{vmatrix} = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 + c z_n^2 \quad \begin{matrix} \text{táto forma} \\ \text{má maticu:} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}$$

Táto je kongruentná s $\mathbf{A}$, teda existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že: $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, c) = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$. Z toho: $\det(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = c = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{Q}^T) = \det^2(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{A}) > 0$, teda $c > 0$.

□

IV. HOMOGÉNNE BILINEÁRNE FORMY

Definícia 14.1. Nech sú dané dve skupiny n premenných $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n$. Potom *homogénna bilineárna forma* (týchto dvoch skupín premenných) je výraz

tvaru: $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$, pričom $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sú koeficienty tejto formy.

Príklad. $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ je homogénna bilineárna forma, ktorá definuje štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$.

Formu $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ môžeme zapísať pomocou matíc $\mathbf{XAY}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Ak $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ tak $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ je kvadratická forma premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definícia 14.2. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Funkcia $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je *bilineárna*, ak pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí: $\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}; \vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\varphi(\vec{y}, \vec{z})$; $\varphi(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\varphi(\vec{x}, \vec{z})$.

Tvrdenie 14.1. *Homogénna bilineárna forma je vlastne súradnicové vyjadrenie bilineárnej funkcie.*

Dôkaz. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ sú dve bázy vo V . Nech $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$ resp. $\vec{y} = y_1 \vec{b}_1 + \dots + y_n \vec{b}_n$. Nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineárna funkcia. Potom $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i; \sum_{j=1}^n y_j \vec{b}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \varphi(\vec{a}_i, \vec{b}_j) y_j$. K φ prislúcha homogénna bilineárna forma $\mathbf{XAY}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ $\mathbf{A}$ má v i -tom riadku a j -tom stĺpci prvok $\varphi(\vec{a}_i, \vec{b}_j)$. □

Homogénna kvadratická funkcia.

Definícia 14.3. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineárna funkcia. Potom *homogénna kvadratická funkcia* prislúchajúca k φ sa definuje ako $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$; $\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$.

Príklad. $V = \mathbb{R}^3$, bilineárna funkcia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_2 y_2$. φ určuje kvadratickú funkciu $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2$. Tá istá kvadratická funkcia prislúcha aj k bilineárnej funkcii $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$.

Veta 14.1. *Nech $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ je homogénna kvadratická funkcia na reálnom vektorovom priestore V . Potom existuje jediná symetrická bilineárna funkcia určujúca ψ (teda taká bilineárna funkcia $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, že $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a pritom $\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$).*

Dôkaz.

Jedinečnosť: Nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrická bilineárna funkcia, ktorá určuje homogénnu kvadratickú funkciu $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ (teda $\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in V$). Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in V$: $\varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}) + 2\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{y}, \vec{y}) \Rightarrow \psi(\vec{x} + \vec{y}) = \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{y}) + 2\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ z čoho máme, že musí platiť $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{x} + \vec{y}) - \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})]$. Teda symetrická φ je naozaj jednoznačne určená funkciou φ .

Existencia: Z definície vieme, že existuje nejaká bilineárna funkcia $\tilde{\varphi} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že $\psi(\vec{x}) = \tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x})$ pre každé $\vec{x} \in V$. Definujme funkciu $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{x} + \vec{y}) - \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})]$. φ je symetrická, lebo $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{x} + \vec{y}) - \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})] = \frac{1}{2}[\psi(\vec{y} + \vec{x}) - \psi(\vec{y}) - \psi(\vec{x})] = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$. Je ľahké overiť, že keďže $\psi(\vec{x}) = \tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x})$, tak φ je bilineárna funkcia. Nakoniec nám zostáva dokázať, že pre každé $\vec{x} \in V$ máme (tak

ako treba) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \psi(\vec{x})$. Rátajme: $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{2}[\psi(2\vec{x}) - 2\psi(\vec{x})] =$
 $= \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(2\vec{x}, 2\vec{x}) - 2\tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x})] = \frac{1}{2}[4\tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}) - 2\tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x})] = \tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}) = \psi(\vec{x})$.

□

Poznámka. Nech V je reálny vektorový priestor, nech je daná kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ n premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Potom táto kvadratická forma určuje homogénnu kvadratickú funkciu takto: zvolíme bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ vo V . Ak $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \in V$, tak definujeme $\psi(\vec{x}) = \mathbf{XAX}^T$. Potom $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ je homogénna kvadratická funkcia.

Niektoré fakty z euklidovskej teórie kvadratických foriem.

Pripomeňme si: matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je ortogonálna, ak $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n$, t.j. jej riadky tvoria ortonormálny systém vektorov v $\mathbb{R}^n$ t.j. pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ máme, že $\langle \vec{x}\mathbf{A}; \vec{y}\mathbf{A} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Tvrdenie 14.2. *Ortogonalne matice typu $n \times n$ tvoria grupu; je to tzv. ortogonálna grupa; označme ju $O(n)$.*

Dôkaz. Ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$, tak $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n, \mathbf{BB}^T = \mathbf{I}_n$ potom $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AI}_n\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$. Teda $\mathbf{AB} \in O(n)$. Asociatívnosť: $\sqrt{}$; neutrálny prvok: $\mathbf{I}_n \in O(n)$, inverzný prvok k $\mathbf{A} \in O(n)$ je $\mathbf{A}^T$, máme $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T$ t.j. $\mathbf{A}^T \in O(n)$.

□

Veta 14.2. *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v $\mathbb{R}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom) k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež: ak od ortonormálnej bázy v $\mathbb{R}^n$ prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

Dôkaz. 1.časť: Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), (\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve ortonormálne bázy v $\mathbb{R}^n$. Nech $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Teda

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}\vec{a}'_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{Potom } \delta_{ik} = \langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n p_{ij}\vec{a}'_j, \sum_{s=1}^n p_{ks}\vec{a}'_s \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n p_{ij}p_{ks} \underbrace{\langle \vec{a}'_j, \vec{a}'_s \rangle}_{=\delta_{js}} = \sum_{j=1}^n p_{ij}p_{kj}, \quad \text{teda } \sum_{j=1}^n p_{ij}p_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i=k \\ 0 & \text{ak } i \neq k \end{cases}. \quad \text{To znamená, že}$$

každý riadok v $\mathbf{P}$ (ako vektor z $\mathbb{R}^n$) má dĺžku 1 a každé dva riadky sú na seba kolmé, t.j. riadky v $\mathbf{P}$ tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$, t.j. $\mathbf{P} \in O(n)$.

2.časť: Nech je daná $O(n) \ni \mathbf{P} = (p_{ij})$ a báza $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, ktorá je ortonormálna.

Matica $\mathbf{P}$ je regulárna, teda vzťahy $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}\vec{a}'_j$ definujú bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Pritom

$$\text{však } \langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = \sum_{j=1}^n p_{ij}p_{kj} = \delta_{ik} \quad \text{teda } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \text{ je ortonormálna báza.}$$

□

Veta 14.3. *(o hlavných osiach) Pre každú reálnu symetrickú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ existuje $\mathbf{C} \in O(n)$ taká, že $\mathbf{CAC}^T = \mathbf{CAC}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. (Riadky v $\mathbf{C}$ sú ortogonálne vlastné vektory patriace k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.)*

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na n .

1° Pre $n=1$ tvrdenie platí.

2° Indukčný predpoklad: Predpokladajme, že veta je správna pre $n-1$. Teraz nech $\mathbf{A}$ je symetrická reálna matica typu $n \times n$. Nech $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ je jej vlastná hodnota, k nej zoberme vlastný vektor $\vec{x}_1$, rovno ho zoberme taký, že $|\vec{x}_1| = 1$. Doplňme vektor $\vec{x}_1$ na ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$; nech to je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu

od $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ k $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, vieme, že $\mathbf{P} \in O(n)$. Nech $\mathbf{B}$ je matica lineárnej transformácie $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vzhľadom na $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Matica f_A vzhľadom na $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je $\mathbf{A}$, potom vieme, že $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{PAP}^T$. Máme $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$. Tiež: $f_A(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1$, lebo $\vec{x}_1$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k λ_1 . To znamená, že $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}' \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{A}' \in \mathfrak{M}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ je symetrická. Podľa indukčného predpokladu existuje ortonormálna matica $\mathbf{H} \in O(n-1)$: $\mathbf{HA}'\mathbf{H}^T = \mathbf{HA}'\mathbf{H}^{-1} = \text{diag}(\lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$, kde $\lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}'$. Utvoríme: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{pmatrix}$ máme, že $\mathbf{Q} \in O(n)$. Tiež $\mathbf{QP} \in O(n)$. Rátajme: $\mathbf{QPA}(\mathbf{QP})^{-1} = \mathbf{QPA}(\mathbf{QP})^T = \mathbf{QPAP}^T\mathbf{Q}^T =$

$$= \mathbf{QBQ}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{HA}'\mathbf{H}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Z podobnosti vyplýva $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n\}$. Za $\mathbf{C}$ z tvrdenia zoberieme $\mathbf{QP}$. Teda máme $\mathbf{C} \in O(n)$ takú, že $\mathbf{CAC}^T = \mathbf{CAC}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Z toho: $\vec{e}_i \mathbf{CAC}^{-1} = \vec{e}_i \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\vec{e}_i \mathbf{CA} = (0, \dots, \lambda_i, \dots, 0) \mathbf{C} = \lambda_i \vec{e}_i \mathbf{C}$. Teda $(\vec{e}_i \mathbf{C}) \mathbf{A} = \lambda_i (\vec{e}_i \mathbf{C})$ t.j. $\vec{e}_i \mathbf{C}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k vlastnej hodnote λ_i zároveň $\vec{e}_i \mathbf{C}$ je i -tý riadok matice $\mathbf{C}$. □

Poznámka.

1. Vieme, že vďaka symetrickosti reálnej matice $\mathbf{A}$ sú všetky jej vlastné hodnoty reálne.
2. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ môžeme chápať ako maticu lineárnej transformácie $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Veta vlastne hovorí, že existuje taká báza v $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na ktorú je $\mathbf{A}$ podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
3. Pre kvadratické formy n premenných veta hovorí, že regulárna lineárna transformácia $\mathbf{X} = \mathbf{YC}$ (t.j. $\mathbf{Y} = \mathbf{XC}^T = \mathbf{XC}^{-1}$) prevedie danú kvadratickú formu $\mathbf{XAX}^T$ na tvar $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. ($\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$)

Veta 14.4. Nech $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je taká, že jej vlastné hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú jednotkové vlastné vektory prislúchajúce k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ tvoria ortonormálny systém v $\mathbb{R}^n$ (a môžeme ich zobrať ako riadky matice $\mathbf{C} \in O(n)$ z vety 14.3).

Dôkaz. Máme: $\vec{x}_i \mathbf{A} = \lambda_i \vec{x}_i$ (pre $i=1, \dots, n$). Vynásobením: $\vec{x}_i \mathbf{A} \vec{x}_j^T = \lambda_i \vec{x}_i \vec{x}_j^T$; transponovaním: $\vec{x}_j \mathbf{A}^T \vec{x}_i^T = \lambda_i \vec{x}_j \vec{x}_i^T$ t.j. $\vec{x}_j \mathbf{A} \vec{x}_i^T = \lambda_i \vec{x}_j \vec{x}_i^T \Leftrightarrow \lambda_j \vec{x}_j \vec{x}_i^T = \lambda_i \vec{x}_j \vec{x}_i^T \Leftrightarrow (\lambda_j - \lambda_i) \vec{x}_j \vec{x}_i^T = 0$. Ale $\lambda_i \neq \lambda_j$, teda $\vec{x}_j \vec{x}_i^T = 0$ štandardný skalárny súčin $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$. $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ má vzhľadom na bázu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ maticu $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. □

Príklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Nájsť ortogonálnu maticu $\mathbf{C} \in O(n)$, aby $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{CAC}^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Kde $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

V. KRIVKY 2. RÁDU

V afinno-euklidovskom priestore $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ majme karteziánsku súradnicový systém $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Bod X nech má v ňom súradnice $X \equiv (x_1, x_2)$. Nech je daná funkcia $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + d$, kde $a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. f je tzv. nehomogénna kvadratická funkcia na $\mathcal{A}$, ak $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0$. ozn. $g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

Otázka: Akú množinu bodov v $\mathcal{A}$ vyjadruje rovnica $f(x_1, x_2) = 0$, ak aspoň jedno z $a_{ij} \neq 0$? Odpoveď: Veta 15.1:

Veta 15.1. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; f(x_1, x_2) = 0\}$ je tzv. zovšeobecnená kužeľosečka; presnejšie je to elipsa, hyperbola, parabola, priamka, dvojica priamok, prázdna množina.

Dôkaz. Kvadratická forma $g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ má maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{22}(\mathbb{R})$. Z vety o hlavných osiach vieme, že existuje $\mathbf{C} \in O(2)$: $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2): a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$. Prvky z $O(2)$ sú tvaru $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ t.j. matica otočenia o uhol φ , alebo $\begin{pmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. (determinant prvej matice je 1 a druhej je -1.) Ale za $\mathbf{C}$ z vety o hlavných osiach možno zobrať maticu z $O(2)$ tvaru $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. (Totiž v druhom prípade stačí vynásobiť maticu maticou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

Takto: nech $\vec{e}'_1$ je vlastný vektor patriaci k λ_1 . $|\vec{e}'_1| = 1$. Doplníme $\vec{x}_1$ vektorom $\vec{e}'_2 \in \mathbb{R}^2, |\vec{e}'_2| = 1$ na bázu $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ v $\mathbb{R}^2$ takú, aby matica prechodu od $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ k $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ –ozn. ju $\mathbf{P}$ – mala kladný determinant. Nech $\mathbf{B}$ je matica lineárnej transformácie $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vzhľadom na $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$. Máme $f(\vec{e}'_1) = \lambda_1 \vec{e}'_1$ vieme, že $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T$, lebo $\mathbf{P} \in O(2)$. Teda $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, b musí byť λ_2 , za $\mathbf{C}$ zoberieme $\mathbf{P}$. Teda

nech $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in O(2)$ je taká, že $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ak (x'_1, x'_2) sú súradnice bodu $X \equiv (x_1, x_2)$ vzhľadom na bázu $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ a (x_1, x_2) sú jeho súradnice vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, a $\mathbf{C}$ je matica prechodu od $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ k $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$, tak $(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \cdot \mathbf{C}$, t.j. $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) \cdot \mathbf{C}^{-1}$ čo je to isté ako

$(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. (*) $\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi + x'_2 \sin \varphi \\ x_2 = x'_2 \cos \varphi - x'_1 \sin \varphi \end{cases}$. (*) pre vhodné φ je

regulárna lineárna transformácia premenných, ktorá formu $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ prevedie na $\lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2$. Týmto otočením prejde ($\clubsuit$) $f(x_1, x_2) = 0$ na tvar ($\diamond$) $\lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + 2b_1x'_1 + 2b_2x'_2 + b = 0$. λ_1, λ_2 sú korene charakteristického polynómu $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & t - a_{22} \end{pmatrix} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. Z toho: $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 =: \delta$.

Rozlíšime dva prípady:

(I): $\delta \neq 0: \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Máme teda $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$. ($\diamond$) upravíme takto: $\lambda_1(x'_1 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x'_1) + \lambda_2(x'_2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}x'_2) + b = 0$. Upravíme na štvorce: $\lambda_1(x'_1 + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + b - \lambda_1 \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \lambda_2 \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} = 0$. Potom regulárna lineárna transformácia: $\begin{cases} x''_1 = x'_1 + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ x''_2 = x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$

t.j. posunutie prevedie ($\diamond$) na tvar: ($\spadesuit$) $\lambda_1 x''^2_1 + \lambda_2 x''^2_2 + c = 0; c \in \mathbb{R}$.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c < 0 \vee \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, c > 0$ tak rovnica ($\spadesuit$) a teda aj $f(x_1, x_2) = 0$ vyjadruje elipsu.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, c \neq 0 \vee \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, c \neq 0$ tak je to hyperbola.

Ak $c = 0$ a $\delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, tak jednobodová množina, ak $c = 0, \delta < 0$, tak dvojica priamok.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c > 0 \vee \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, c < 0$, tak prázdna množina.

(II): $\delta = 0 = \lambda_1 \lambda_2$ Nech napr. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Teda ($\diamond$) je $\lambda_2 x'^2_2 + 2b_1x'_1 + 2b_2x'_2 + b = 0$.

Ak $b_1 \neq 0: \lambda_2(x'_2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}x'_2) + 2b_1(x'_1 + \frac{b_1}{2b_1}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2(x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + 2b_1(x'_1 - c) = 0$

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1 - c \\ x''_2 = x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 x''_2 + 2b_1 x''_1 = 0 \text{ to je rovnica paraboly.}$$

Ak $b_1=0$, potom množina vyhovujúcich bodov je zrejme alebo prázdna množina, alebo priamka, alebo dvojica rovnobežných priamok. $\square$

Invarianty krivky 2. rádu.

Definícia 15.1. *Invariantom* krivky druhého rádu vyjadrenej rovnicou $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$ je taký algebraický výraz závisiaci od $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$, ktorý sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme (ku ktorému prejdeme pomocou otočení a posunutí).

Veta 15.2.

Invariantmi krivky 2. rádu $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$ sú:

$$s = \text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}; \quad \delta = \det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2; \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}$$

Dôkaz. Urobme transformáciu posunutie: $\begin{cases} x_1 = x'_1 + \alpha \\ x_2 = x'_2 + \beta \end{cases} (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ dané}).$ Dostaneme:

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1)x_1' + 2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2)x_2' + (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_2\beta^2 + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a) = 0.$$

Máme: $s(x'_1, x'_2) = a_{11} + a_{22} = \text{Tr}(\mathbf{A}) = s(x_1, x_2)$ a $\delta(x'_1, x'_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \delta(x_1, x_2)$.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a \end{pmatrix}$$

Otočenie: od kvadratickej formy $\mathbf{XAX}^T = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ prejdeme pomocou regulárnej lineárnej transformácie s maticou $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ k forme s maticou $\mathbf{CAC}^T$. Potom $s = \text{Tr}(\mathbf{CAC}^T) = \text{Tr}(\mathbf{CAC}^{-1}) = \text{Tr}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CA}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$. $\delta = \det(\mathbf{CAC}^{-1}) = \det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$. $\square$

Invarianty krivky 2. rádu sa dajú využiť pri skúmaní rovnice

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \quad \star$$

Napr. videli sme, že v situácii, keď $\lambda_1 \lambda_2 = \delta \neq 0$ vhodným otočením rovnica $\star$ prejde na tvar $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. Z invariantnosti Δ máme: $\Delta = \det \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, c) = \lambda_1 \lambda_2 c = \delta c$, teda $c = \frac{\Delta}{\delta}$. Teda máme $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ – z tohto sa už ľahko prejde ku kanonickému tvaru.

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$ ak $s\Delta < 0$, tak elipsa; ak $s\Delta > 0$, tak $\emptyset$
krivka eliptického typu	$\Delta = 0$ bod
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$ hyperbola
krivka hyperbolického typu	$\Delta = 0$ dvojica rôznobežných priamok
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$ parabola
krivka parabolického typu	$\Delta = 0$ dvojica rovnobežných priamok, priamka alebo $\emptyset$

VI. DUÁLNY VEKTOROVÝ PRIESTOR A ZÁKLADY MULTILINEÁRNEJ ALGEBRY

Nech V, W sú vektorové priestory nad R . Označme $L(V, W)$ množinu lineárnych zobrazení z V do W . $L(V, W) \neq \emptyset$, lebo nulové zobrazenie patrí do $L(V, W)$. Definujeme $+: L(V, W) \times L(V, W) \rightarrow L(V, W)$, $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$. Pre $f \in L(V, W)$ a $\alpha \in R$ definujeme: $\alpha f : V \rightarrow W$, $\alpha f(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x}))$, $\alpha f \in L(V, W)$. Pre $f, g \in L(V, W)$ je $f+g : V \rightarrow W$ naozaj lineárne: $(f+g)(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) + g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) + \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y}) = \alpha(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) + \beta(f(\vec{y}) + g(\vec{y})) = \alpha(f+g)(\vec{x}) + \beta(f+g)(\vec{y})$. Podobne sa presvedčíme, že pre $\alpha \in R$, $f \in L(V, W)$ je $\alpha f : V \rightarrow W$ naozaj lineárne. $\alpha f(\beta\vec{v} + \gamma\vec{p}) = \alpha(f(\beta\vec{v} + \gamma\vec{p})) = \alpha(\beta f(\vec{v}) + \gamma f(\vec{p})) = \alpha\beta f(\vec{v}) + \alpha\gamma f(\vec{p}) = \beta\alpha f(\vec{v}) + \gamma\alpha f(\vec{p}) = \beta(\alpha f)(\vec{v}) + \gamma(\alpha f)(\vec{p})$. Ľahko sa overí, že potom $L(V, W)$ s takto definovaným + resp. takto definovaním násobením prvkov z $L(V, W)$ prvkami z R je vektorový priestor nad R .

Definícia 16.1. Nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Nech V a W sú konečne generované. Pevne zvolíme bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V a $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W . Potom matica f vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ sa definuje ako matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{ks}(R)$ taká, že jej i -tý riadok ($i=1, \dots, k$) tvoria súradnice vektoru $f(\vec{v}_i)$ vzhľadom na bázu $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$.

Veta 16.1.

Nech vektorové priestory V, W nad R sú konečne generované. Potom aj vektorový priestor $L(V, W)$ je konečne generovaný, a máme $\dim(L(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Dôkaz. Definujme zobrazenie $\Phi : L(V, W) \rightarrow \mathfrak{M}_{ks}(R)$, kde $\dim(V)=k, \dim(W)=s$. $\Phi(f) :=$ matica f vzhľadom na pevne zvolenú bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V respektíve $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W . Toto Φ je lineárny izomorfizmus, keďže $\mathfrak{M}_{ks}(R)$ je vektorový priestor dimenzie $k \cdot s$, z toho vyplýva tvrdenie.

Φ je lineárne: $\Phi(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{v}_1) \\ \dots \\ f(\vec{v}_k) \end{pmatrix}$. (s -tice súradníc vektora $f(\vec{v}_i)$ v báze $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$.)

Pre $\alpha, \beta \in R$, $f, g \in L(V, W)$ máme:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \begin{pmatrix} (\alpha f + \beta g)\vec{v}_1 \\ \dots \\ (\alpha f + \beta g)\vec{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f(\vec{v}_1) + \beta g(\vec{v}_1) \\ \dots \\ \alpha f(\vec{v}_k) + \beta g(\vec{v}_k) \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} f(\vec{v}_1) \\ \dots \\ f(\vec{v}_k) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} g(\vec{v}_1) \\ \dots \\ g(\vec{v}_k) \end{pmatrix} = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g) \end{aligned}$$

Φ je surjektívne: Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{ks}(R)$ je ľubovoľná. Potom predpis

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + \dots + a_{1s}\vec{w}_s \\ \dots \\ f(\vec{v}_k) = a_{k1}\vec{w}_1 + \dots + a_{ks}\vec{w}_s \end{cases}$$

úplne a jednoznačne definuje, keďže $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza lineárneho zobrazenia $f : V \rightarrow W$, z definície je jasné, že f má vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ maticu $\mathbf{A}$, t.j. $\Phi(f) = \mathbf{A}$.

Φ je injektívne: Nech $\Phi(f) = \Phi(g)$. To znamená, že $f(\vec{v}_i) = g(\vec{v}_i)$, $i=1, \dots, k$. Pretože $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , z toho $f=g$.

□

Definícia 16.2. Nech V je vektorový priestor nad R . Vektorový priestor $L(V, R)$ sa nazýva *duálny priestor* k priestoru V , označíme ho V^* .

Poznámka. Z vety 16.1 (keďže R je 1-rozmerný vektorový priestor nad R) máme, že ak V je konečne generovaný, tak $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Definícia 16.3.

Prvky z V^* sa volajú *lineárne formy* na vektorovom priestore V .

Príklad.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. pr_i je lineárna forma na $\mathbb{R}^n$

t.j. $pr_i \in (\mathbb{R}^n)^*$.

2. $C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$ je vektorový priestor spojitých funkcií $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. $\int_0^1 : C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\int_0^1(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_0^1 f + \beta \int_0^1 g$ teda $\int_0^1 \in C^*(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$.

Definícia 16.4+Tvrdenie 16.1.

Zobrazenie $(\cdot, \cdot) : V^* \times V \rightarrow R$ (V je vektorový priestor nad R); $(x^*, \vec{y}) = x^*(\vec{y})$ pre každé $x^* \in V^*$, $\vec{y} \in V$, je bilinéarne, nazýva sa *párovacie zobrazenie* V^* a V .

Dôkaz.

Lineárnosť v 1. argumente: $\alpha, \beta \in R$, $x^*, y^* \in V^*$, $\vec{v} \in V$, $(\alpha x^* + \beta y^*, \vec{v}) = (\alpha x^* + \beta y^*)(\vec{v}) = \alpha x^*(\vec{v}) + \beta y^*(\vec{v}) = \alpha(x^*, \vec{v}) + \beta(y^*, \vec{v})$. Lineárnosť v 2. argumente: $(x^*, \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = x^*(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha x^*(\vec{a}) + \beta x^*(\vec{b}) = \alpha(x^*, \vec{a}) + \beta(x^*, \vec{b})$.

□

Definícia 16.5+Veta 16.2.

Nech vektorový priestor V nad R je konečne generovaný, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je dáka báza vo V . Potom predpis $(b_i^*, \vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i=j \\ 0, & \text{ak } i \neq j \end{cases}$ pre $i, j = 1, \dots, k$ úplne a jednoznačne definuje lineárne formy $b_1^*, \dots, b_k^* \in V^*$. $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je potom báza priestoru V^* , nazýva sa *duálna báza* k báze $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$.

Dôkaz. Vieme, že $\dim(V^*) = \dim(V) = k$. Teda na dôkaz toho, že $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je báza vo V^* stačí ukázať, že $b_1^*, \dots, b_k^*$ sú lineárne nezávislé. Nech $\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^* = 0$ (t.j. nulové zobrazenie $V \rightarrow R$). Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Takto: $(\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^*, \vec{b}_i) = \alpha_1(b_1^*, \vec{b}_i) + \dots + \alpha_{i-1}(b_{i-1}^*, \vec{b}_i) + \alpha_i(b_i^*, \vec{b}_i) + \dots + \alpha_k(b_k^*, \vec{b}_i) = \alpha_i \cdot 1 = 0$ pre $i = 1, \dots, k$.

□

Tvrdenie 16.2. Ak V je konečne generovaný vektorový priestor nad R , tak $V^* \cong V$.

Dôkaz. Zoberieme ľubovoľnú bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ vo V . Potom priradenie $\vec{b}_i \mapsto b_i^*$ $i = 1, \dots, k$ definuje lineárne zobrazenie $V \rightarrow V^*$, keďže zobrazuje bázu na bázu, je to lineárny izomorfizmus.

□

Definícia 16.6. Nech V je vektorový priestor nad R . Priestor $(V^*)^*$ označíme V^{**} , nazýva sa druhý duálny priestor priestoru V .

Veta 16.3. Ak V je konečne generovaný, tak existuje kanonický lineárny izomorfizmus $V^{**} \cong V$.

Dôkaz. Definujme $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$, $\varepsilon_V(\vec{v}) : V^* \rightarrow R$, $\varepsilon_V(\vec{v})(x^*) := x^*(\vec{v})$. (ak ε_V je naozaj lineárny izomorfizmus, tak je jasné, že je kanonický, lebo nezávisí od výberu.)

1. Overíme, že $\varepsilon_V(\vec{v})$ je pre každé $\vec{v} \in V$ lineárne zobrazenie. $\varepsilon_V(\vec{v})(\alpha a^* + \beta b^*) = (\alpha a^* + \beta b^*)(\vec{v}) = (\alpha a^*)(\vec{v}) + (\beta b^*)(\vec{v}) = \alpha a^*(\vec{v}) + \beta b^*(\vec{v}) = \alpha \varepsilon_V(\vec{v})(a^*) + \beta \varepsilon_V(\vec{v})(b^*)$.

2. Overíme, že $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$ je lineárne. $\varepsilon_V(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z}) \stackrel{?}{=} \alpha \varepsilon_V(\vec{v}) + \beta \varepsilon_V(\vec{z})$ pre $\alpha, \beta \in R$, $\vec{v}, \vec{z} \in V$. Stačí ukázať, že ľavá a pravá strana majú rovnaké hodnoty na všetkých $x^* \in V^*$. Ľavá strana: $\varepsilon_V(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z})(x^*) = x^*(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z}) = \alpha x^*(\vec{v}) + \beta x^*(\vec{z}) = \alpha \varepsilon_V(\vec{v})(x^*) + \beta \varepsilon_V(\vec{z})(x^*) = (\alpha \varepsilon_V(\vec{v}) + \beta \varepsilon_V(\vec{z}))(x^*) =$ pravá strana.

3. Ukážeme, že $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$ je bijekcia. Nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báza vo V . Nech $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je duálna báza vo V^* a nech $(b_1^{**}, \dots, b_k^{**})$ je duálna báza vo V^{**} . Zaujímá nás, čo je $\varepsilon_V(\vec{b}_i)$. Máme $\varepsilon_V(\vec{b}_i) \in (V^*)^*$, rátajme $(\varepsilon_V(\vec{b}_i), b_j^*) = \varepsilon_V(\vec{b}_i)(b_j^*) =$

$= b_j^*(\vec{b}_i) = \begin{cases} 1 & \text{ak } i=j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$. Z jednoznačnej určenosti duálnej bázy dostávame, že $\varepsilon_V(\vec{b}_i) = b_i^{**}$ $i=1, \dots, k$. Keďže ε_V zobrazuje bázu na bázu, je to lineárny izomorfizmus. □

Veta 16.4. *Nech V, W sú vektorové priestory nad R , nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom existuje jediné lineárne zobrazenie $f^* : W^* \rightarrow V^*$ také, že $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v}))$ pre všetky $w^* \in W^*, \vec{v} \in V$. Toto f^* sa volá duálne, alebo adjungované lineárne zobrazenie k zobrazeniu f .*

Dôkaz.

Jednoznačnosť: Nech by aj $f_1^* : W^* \rightarrow V^*$ bolo také ako f^* z tvrdenia. Potom $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v})) = (f_1^*(w^*), \vec{v})$. Z toho: $(f^*(w^*), \vec{v}) = (f_1^*(w^*), \vec{v})$ pre všetky $\vec{v} \in V, w^* \in W^*$. Z bilineárnosti: $(f^*(w^*) - f_1^*(w^*), \vec{v}) = ((f^* - f_1^*)(w^*), \vec{v}) = 0$. Teda $(f^* - f_1^*)(w^*) : V \rightarrow R$ je nulové, preto $f^* - f_1^* =$ nulové zobrazenie, teda $f^* = f_1^*$.

Existencia: Treba, že f^* definované vlastnosťou $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v}))$ je lineárne: $f^*(\alpha w^* + \beta z^*) \stackrel{?}{=} \alpha f^*(w^*) + \beta f^*(z^*)$. Treba ukázať, že ľavá a pravá strana majú (ako lineárne zobrazenie $V \rightarrow R$) tú istú hodnotu v ľubovoľnom $\vec{v} \in V$. Ľavá strana: $(f^*(\alpha w^* + \beta z^*), \vec{v}) = (\alpha w^* + \beta z^*, f(\vec{v})) = \alpha(w^*, f(\vec{v})) + \beta(z^*, f(\vec{v})) = \alpha(f^*(w^*), \vec{v}) + \beta(f^*(z^*), \vec{v}) = (\alpha f^*(w^*) + \beta f^*(z^*), \vec{v}) =$ pravá strana. □

Veta 16.5. *Nech V, W sú konečne generované nad R , nech $f : V \rightarrow W$ má vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{ks}(R)$. Potom duálne lineárne zobrazenie $f^* : W^* \rightarrow V^*$ má vzhľadom na bázu $(w_1^*, \dots, w_s^*)$ vo W^* resp. $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ maticu $\mathbf{A}^T$.*

Dôkaz. Máme $f(\vec{v}_i) = \sum_{j=1}^s a_{ij} w_j$ pre $i=1, \dots, k$. Potrebujeme zistiť, čo je $f^*(w_t^*)$ pre

$$t = 1, \dots, s. \text{ Máme } f^*(w_t^*) = \sum_{j=1}^k b_{tj} v_j^*, \text{ chceme zistiť } b_{tj}(f^*(w_t^*), \vec{v}_p) =$$

$$= (w_t^*, \sum_{j=1}^s a_{pj} \vec{w}_j) \rightsquigarrow \sum_{j=1}^s a_{pj} (w_t^*, \vec{w}_j) = a_{pt}. \text{ Pravá strana:}$$

$$\left(\sum_{j=1}^k b_{tj} v_j^*, \vec{v}_p \right) = \sum_{j=1}^k b_{tj} (v_j^*, \vec{v}_p) = b_{tp}; \text{ z toho } b_{tp} = a_{pt} \text{ teda matica } \mathbf{B} \text{ zobrazenia } f^* \text{ je vlastne } \mathbf{A}^T. \quad \square$$

Veta 16.6. *Ak f, g sú lineárne zobrazenia $f, g : V \rightarrow W$, tak*

1. $(f+g)^* = f^* + g^*$
2. Ak $f : V \rightarrow W, \alpha \in R$, tak $(\alpha f)^* = \alpha(f^*)$
3. $\mathcal{O} : V \rightarrow W$ je nulové zobrazenie, potom $\mathcal{O}^* : V^* \rightarrow W^*$ je tiež nulové; $(id_V)^* = id_{V^*}$
4. Ak $f : V \rightarrow W, g : W \rightarrow S$ sú lineárne zobrazenia, tak $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
5. Ak $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a V, W sú konečne generované, tak $(f^*)^* : (V^*)^* \rightarrow (W^*)^*$ sa stotožní s f , ak stotožní V^{**} s V a W^{**} s W .

Dôkaz. Priamo z definície: pre prípad zobrazení medzi konečne generovanými priestormi tieto vlastnosti vyplývajú z vlastností matíc. Napr. $(f+g)^* = f^* + g^* \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ alebo: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. □

Tenzorový súčin vektorových priestorov.

Nech V, W sú konečne generované vektorové priestory nad R . Potom $V \times W$ je vektorový priestor nad R . Označme M množinu všetkých zobrazení $V \times W \rightarrow R$,

ktoré nadobúdajú nenulové hodnoty iba v konečnom počte prvkov z $V \times W$. $M \neq \emptyset$, lebo nulové zobrazenie patrí do M . Množina G všetkých zobrazení z $V \times W \rightarrow R$ je vektorový priestor. Pre $f, g \in G$ definujeme $f+g : V \times W \rightarrow R$; $(f+g)(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y})$, podobne pre $f \in G, \alpha \in R$ definujeme $\alpha f : V \times W \rightarrow R$; $(\alpha f)(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(f(\vec{x}, \vec{y}))$. Je jasné, že G je vektorový priestor nad R . M je vektorový podpriestor v G . (stačí použiť kritérium vektorového podpriestoru).

Ak $f \in M$, tak existujú $(\vec{v}_1, \vec{w}_1), \dots, (\vec{v}_k, \vec{w}_k) \in V \times W$ také, že $f(\vec{v}_i, \vec{w}_i) = \alpha_i$ pre $i=1, 2, 3, \dots, k$, pričom $\alpha_i \neq 0$ a $f(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ pre $(\vec{v}, \vec{w}) \notin \{(\vec{v}_1, \vec{w}_1), \dots, (\vec{v}_k, \vec{w}_k)\}$. Pre takéto f zavedieme symbol $\alpha_1(\vec{v}_1, \vec{w}_1) + \dots + \alpha_k(\vec{v}_k, \vec{w}_k)$. Napr. $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ (pre $\vec{v} \in V, \vec{w} \in W$) znamená funkciu, ktorá má vo $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ hodnotu 1 a vo všetkých iných má hodnotu 0. Podobne $-1 \cdot (\vec{v}_0, \vec{w}_0) := -(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ je funkcia, ktorá má vo $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ hodnotu -1 a všade inde 0.

Iný prípad: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}_2) - (\vec{v}_1, \vec{w}_2) - (\vec{v}_2, \vec{w}_2)$ je symbol označujúci zobrazenie $V \times W \rightarrow R$, ktorá má vo $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2)$ hodnotu 1, vo $(\vec{v}_1, \vec{w}_2)$ a $(\vec{v}_2, \vec{w}_2)$ -1 a všade inde 0.

Definícia 16.6. Nech $S \subset M$ je vektorový podpriestor v M generovaný prvkami tvaru $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) - (\vec{v}_1, \vec{w}) - (\vec{v}_2, \vec{w})$, $(\vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2) - (\vec{v}, \vec{w}_1) - (\vec{v}, \vec{w}_2)$, $(\alpha \vec{v}, \vec{w}) - \alpha(\vec{v}, \vec{w})$ [pre ľubovoľné $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$] a $(\vec{v}, \alpha \vec{w}) - \alpha(\vec{v}, \vec{w})$.

Definícia 16.7. Nech V, W, M, S sú ako vyššie. Potom *tenzorový súčin* priestorov V a W sa definuje ako faktorový vektorový priestor M/S , označíme ho $V \otimes W$. Teda $V \otimes W = M/S$. Prvok vo $V \otimes W$ reprezentovaný $(\vec{v}, \vec{w}) \in M$ označíme $\vec{v} \otimes \vec{w}$.

Trieda ekvivalencie prvku $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) - (\vec{v}_1, \vec{w}) - (\vec{v}_2, \vec{w})$ bude $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \otimes \vec{w} - \vec{v}_1 \otimes \vec{w} - \vec{v}_2 \otimes \vec{w} = 0 \in V \otimes W$ t.j. platí: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \otimes \vec{w} = \vec{v}_1 \otimes \vec{w} + \vec{v}_2 \otimes \vec{w}$. Podobne:

$$\begin{aligned}\vec{v} \otimes (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= \vec{v} \otimes \vec{w}_1 + \vec{v} \otimes \vec{w}_2 \\ (\alpha \vec{v}) \otimes \vec{w} &= \alpha(\vec{v} \otimes \vec{w}) \\ \vec{v} \otimes (\alpha \vec{w}) &= \alpha(\vec{v} \otimes \vec{w})\end{aligned}$$

Teda ak definujeme zobrazenie $S : V \times W \rightarrow V \otimes W$, $S(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \otimes \vec{w}$, toto S bude bilinéarne.

Veta 16.7.

1. Ak V, W, T sú konečne generované vekt. priestory, tak $(V \otimes W) \otimes T \cong V \otimes (W \otimes T)$.
2. Ak V, W sú konečne generované, tak $V \otimes W \cong W \otimes V$.
3. Ak V alebo W je nulový priestor, tak $V \otimes W \cong 0$
4. Ak $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ je báza vo W , tak báza vo $V \otimes W$ pozostáva z vektorov $(\vec{v}_i \otimes \vec{w}_j)$, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s$. Teda $\dim(V \otimes W) = k \cdot s = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Veta 16.8. Nech V, W sú konečne generované vektorové priestory nad R . Potom $V^* \otimes W \cong L(V, W)$.

Dôkaz. Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ je báza vo W . Definujme lineárne zobrazenie $\Phi : V^* \otimes W \rightarrow L(V, W)$ takto: $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)(\vec{v}_s) = v_i^*(\vec{v}_s) \cdot \vec{w}_j$. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)(\vec{v}_s) = \delta_{is} \vec{w}_j$. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)$ má maticu (vzhľadom na bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W .) ktorej i -tý riadok má v j -tom stĺpci 1 a všade inde sú nuly. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)$ je bázový prvok v $L(V, W)$ t.j. Φ je lineárny izomorfizmus. Je jasné, že pre vektorové priestory $V_1, \dots, V_k$ môžeme definovať ich tenzorový súčin induktívne:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k = V_1 \otimes (V_2 \otimes \dots \otimes V_k).$$

□

Definícia 16.8. Nech V je konečne generovaný vektorový priestor nad R . Nech p, q sú dané nezáporné celé čísla. Potom vektorový priestor

$$T_p^q(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q$$

sa nazýva priestor tenzorov p -krát kovariantných a q -krát kontravariantných. Prvky $T_p^q(V)$ sa volajú *tenzory* typu (p, q) nad V .

Príklad.

1. $T_0^1(V) = V$, teda tenzory typu $(0, 1)$ sú vektory z V .
2. $T_1^0(V) = V^*$, teda tenzory typu $(1, 0)$ sú lineárne formy na V .
3. $T_1^1(V) = V^* \otimes V \cong L(V, V)$, teda tenzory typu $(1, 1)$ sú vlastne lineárne zobrazenia z V do V .

Tenzory typu (p, q) sa využívajú v diferenciálnej geometrii a v matematickej fyzike. Pracuje sa tam s ich súradnicami.

Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V . Potom bázu priestoru $T_p^q(V)$ tvoria vektory $v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_p}^* \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$ kde $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq k$ a $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq k$. Teda každý prvok z $T_p^q(V)$ má jediné vyjadrenie v tvare:

$$\sum_{1 \leq i_i, j_i \leq k} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_p}^* \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Namiesto v_s^* napíšeme v^s , potom dostaneme: $v^j(\vec{v}_i) = \delta_{ij}$.

$$\sum_{1 \leq \dots \leq k} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_p} \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Einsteinova sumačná konvencia: Ten istý tenzor zapíšeme takto:

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_p} \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Aj bazové vektory sa v praxi vynechávajú, ten istý tenzor sa označuje $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, ($1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq k$).

Dané sú pravidlá ako sa zmení tenzor $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, ak od bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V prejdeme k báze $(\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_k)$. To je obsah tzv. tenzorového počtu.