

LINEÁRNA ALGEBRA

I.ROČNÍK

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského

CONTENTS

I. Zobrazenia medzi množinami	2
II. Okruh, teleso, pole	9
III. Vektorové priestory	10
IV. Systémy lineárnych rovníc	13
V. Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov	15
VI. Lineárne a priame súčty	19
VII. Matice	20
VIII. Lineárne zobrazenie	24
IX. Systémy lineárnych rovníc 2	32
X. Euklidovský vektorový priestor	42
XI. Afinný priestor (nad $\mathbb{R}$)	48
XII. Lineárne transformácie vektorových priestorov	69
XIII. Kvadratické formy	81
XIV. Homogénne bilinéarne formy	86
XV. Krivky 2. rádu	89
XVI. Duálny vektorový priestor a základy multilineárnej algebry	91

REFERENCES

1. M.Hejný, V.Zaťko, P.Kršňák, *Geometria 1*, SPN, Bratislava, 1985.
2. T.Katriňák, M. Gavalec, E.Gedeonová, J.Smítal, *Algebra a teoretická aritmetika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 1999.
3. G.Birkhoff, S.MacLane, *Prehľad modernej algebry*, ALFA, Bratislava, 1979.
4. A.I.Kostrikin, Y.I.Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Gordon & Breach, New York, 1989.
5. A.K.Faddejev, J.S.Sominskij, *Zbierka úloh z vyššej algebry*, ALFA, Bratislava, 1968.
6. I.V.Proskurjakov, *Problems in Linear Algebra*, Mir, Moscow, 1978.
7. A.I.Kostrikin, *Exercises in Algebra; A Collection of Exercises in Algebra; Linear Algebra and Geometry*, Gordon & Breach, New York, 1996.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T $\mathcal{E}\mathcal{X}$

I. ZOBRAZENIA MEDZI MNOŽINAMI

Definícia 1.1. Nech A, B sú množiny. Zobrazenie z A do B je predpis, ktorý každému prvku z A priradí práve jeden prvok z B . Ak tento predpis označíme f , tak hovoríme $f : A \rightarrow B$. $f(a) = b$ znamená, že sme priradili prvku $a \in A \rightarrow b \in B$. a je tzv. *vzor* prvku b . $f : a \rightarrow b$. $f(A) = \text{obraz zobrazenia } f$. $Im(f)$ je obraz množiny A pri zobrazení $Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$

Definícia 1.2. Zobrazenia $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ sa rovnajú ($f = g$), ak pre $\forall a \in A$ je $f(a) = g(a)$. $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $f(x) = x + x$; $g(x) = 2x$

Definícia 1.3. Nech $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie a nech $\hat{A} \subset A$. Predpis, ktorý každému prvku $a \in \hat{A}$ priradí $f(a)$ sa nazýva *zúženie zobrazenia f na podmnožinu $\hat{A}$* . Označenie: $f \upharpoonright_{\hat{A}} : \hat{A} \rightarrow B$ a $f \upharpoonright_{\hat{A}}(x) = f(x)$

Definícia 1.4. $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *surjektívne* ak $f(A) = B$. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je surjektívne $\iff \forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$.

Definícia 1.5. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *injektívne* ak z toho, že $f(a) = f(\hat{a})$ vyplýva, že $a = \hat{a}$

Definícia 1.6. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *bijekcia* ak je surjektívne aj injektívne.

Definícia 1.7. Nech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú dve zobrazenia, potom predpis $x \in A \rightarrow g(f(x))$ definuje zobrazenie $A \rightarrow C$ označíme ho $g \circ f : A \rightarrow C$, $g \circ f(x) = g(f(x))$ pre $\forall x \in A$. Zobrazenie $g \circ f : A \rightarrow C$ sa nazýva zobrazenie *zložené z f a g* resp. kompozícia zobrazení f a g .

Tvrdenie 1.1.

- 1.) Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú injekcie, tak aj $g \circ f : A \rightarrow C$ je injekcia.
- 2.) Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú surjekcie, tak aj $g \circ f : A \rightarrow C$ je surjekcia.

Dôkaz. Predpokladajme, že $g \circ f(a) = g \circ f(\hat{a})$. Chceme ukázať, že $a = \hat{a}$.

Ale $g(f(a)) = g(f(\hat{a}))$, lebo g je injektívne. Z toho: $f(a) = f(\hat{a})$. Ale aj f je injektívne $\Rightarrow a = \hat{a}$.

Tvrdenie 1.2. Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ sú zobrazenia, tak $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. To je tzv. *asociatívnosť skladania zobrazení*.

Dôkaz. $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$;
 $(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) : \forall x \in A$

Veta 1.1 a Definícia 1.8. Nech $f : A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom existuje zobrazenie $B \rightarrow A$, ktoré každému prvku $b \in B$ priradí len jediný prvok $a \in A$, pre ktorý $f(a) = b$. Toto je *inverzné zobrazenie k f* , označíme ho f^{-1} . Teda $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$. Zobrazenie $f^{-1} : B \rightarrow A$ je tiež bijektívne a platí: $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$.

Dôkaz.

- 1.) f^{-1} je injekcia: nech $a = f^{-1}(b) = f^{-1}(\hat{b})$ Potom $f(a) = b$ a $f(a) = \hat{b} \Rightarrow b = \hat{b}$. f^{-1} je injekcia.
- 2.) f^{-1} je surjekcia: ľubovoľné $a \in A$, $f^{-1}(f(a)) = a$, f^{-1} je bijekcia.

Tvrdenie 1.3. Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_A$, tak f je injektia a g je surjektia.

Dôkaz.

f je injektia: Predpokladajme, že $f(a) = f(\acute{a}) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(\acute{a})) = (g \circ f)(\acute{a}) = id_A(\acute{a}) = \acute{a}$.

g je surjektia: ľubovoľné $a \in A \Rightarrow f(a) \in B$, $a = g(f(a)) \Rightarrow f(a)$ je vzor k prvku a pri zobrazení g .

Veta 1.2. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je bijektívne $\Leftrightarrow$ keď existuje $g : B \rightarrow A$ také, že $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$

Dôkaz. Predpokladajme, že f je bijektívne. Potom vieme, že $\exists f^{-1} : B \rightarrow A$ s tým, že $f^{-1} \circ f = id_A$. Predpokladajme, že $\exists g : B \rightarrow A : g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$. Z tvrdenia 1.3 dostávame, že f je injektívne aj surjektívne $\Rightarrow$ bijektívne.

Binárne operácie.

Definícia 1.9. Binárna operácia na množine $M \neq \emptyset$ je zobrazenie $M \times M \rightarrow M$. Binárne operácie označujeme rôznymi spôsobmi. Obraz dvojice $(a, b) \in M \times M$ potom označujeme obyčajne $a + b = + (a, b) \dots$

Definícia 1.10. Nech $*$: $M \times M \rightarrow M$ je binárna operácia na M . Prvok $e \in M$ taký, že $m * e = m = e * m$ pre $\forall m \in M$ sa nazýva *neutrálny prvok* operácie $*$.

Pozn.. Binárna operácia nemusí mať neutrálny prvok.

Tvrdenie 1.4. Ak binárna operácia $*$: $M \times M \rightarrow M$ má neutrálny prvok, tak ho má jediný.

Dôkaz. Keby $e_1, e_2 \in M$ boli neutrálne, tak $e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$.

Definícia 1.11. Nech $*$: $M \times M \rightarrow M$ je binárna operácia a nech má neutrálny prvok $e \in M$. Ak pre nejaké $x \in M : \exists y \in M$ také, že $x * y = y * x = e$, tak y sa volá *inverzný prvok* k x .

Označenie. Inverzný prvok k prvku x z predchádzajúcej definície označíme x^{-1} .

Definícia 1.12. Binárna operácia je *asociatívna*, ak pre všetky $a, b, c \in M$ máme: $a * (b * c) = (a * b) * c$

Tvrdenie 1.5. Nech $\bullet : M \times M \rightarrow M$ je asociatívna binárna operácia a nech $e \in M$ je neutr. prvok tejto operácie. Potom ak pre $x \in M$ existuje inverzný prvok, tak je jediný.

Dôkaz. Nech pre $x \in M$ by inverzné prvky boli dva: $a \in M$, $b \in M$. Teda: $ax = xa = e$, $bx = xb = e$. Chceme ukázať, že $a = b$. Takto: $a = ae = a(xb) = (ax)b = eb = b$.

Definícia 1.13. Nech $G \neq \emptyset$ je množina a nech $*$: $G \times G \rightarrow G$ je binárna operácia na G s týmito vlastnosťami:

- 1.) binárna operácia $*$ je asociatívna
- 2.) v G existuje neutrálny prvok operácie $*$, označíme ho e , teda pre každé $x \in G$: $e * x = x * e = x$
- 3.) $\forall x \in G$ existuje v G inverzný prvok, vieme už, že to je jediný prvok $x^{-1} \in G$ taký, že $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Potom hovoríme, že dvojica $(G, *)$ je *grupa*. (alebo G s operáciou $*$ je grupa). Ak je operácia $*$ jasná, niekedy hovoríme, že G je grupa.

Príklad. Nech $m \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Označme $\mathbb{Z}_m$ množinu zvyškov po delení celých čísel číslom m . Teda $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Definujme pre $x, y \in \mathbb{Z}_m$: $x \oplus y$ je zvyšok po vydelení $x+y$ číslom m . Potom $\oplus$ je binárna operácia na $\mathbb{Z}_m$. Je asociatívna, neutrálny prvok je 0, inverzný prvok k $x \in \mathbb{Z}_m$ je zvyšok po vydelení čísla $m-x$ číslom m . $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ je grupa.

Definícia 1.14. Binárna operácia $*$: $M \times M \rightarrow M$ na množine $M \neq \emptyset$ je *komutatívna*, ak pre $\forall a, b \in M$: $a*b = b*a$. Ak túto vlastnosť nemá tak je *nekomutatívna*.

Definícia 1.15. Ak $(G, *)$ je grupa a operácia $*$ je komutatívna, tak grupa G sa nazýva *komutatívna* (alebo tiež *Abelovská*).

Príklady.

- 1.) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutatívna grupa.
- 2.) $G = \{e\}$, $e*e = e$ to je tzv. triviálna grupa.
- 3.) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ sú komutatívne grupy.
- 4.) Nech $M \neq \emptyset$ je množina. Označme $S_M :=$ množinu všetkých bijekcií $M \rightarrow M$. Skladanie zobrazení definuje binárnu operáciu $*$ na S_M , tj. $f*g = g \circ f$ pre $\forall f, g \in S_M$. Potom $(S_M, *)$ je grupa. Nie je komutatívna.
- 5.) Ak M z 4.) je $M = \{1, 2, \dots, n\}$ čo je vlastne S_M ? $S_{\{1,2,\dots,n\}}$ je vlastne množina permutácií prvkov $1, 2, \dots, n$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Permutáciu $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ môžeme prehľadne zapísať ako $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$
Např. pre $S_{\{1,2,3\}}$ je $(S_{\{1,2,3\}}, *)$ grupa, ktorá má 6 prvkov.
Např.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ kým $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 $S_{\{1,2,3\}}$ je komutatívna grupa.

Veta 1.3. Nech $(G, \bullet)$ je grupa. Potom:

- 1.) $(x^{-1})^{-1} = x$ pre $\forall x \in G$
- 2.) $(x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$ pre $\forall x, y \in G$

Dôkaz.

- 1.) $(x^{-1})^{-1}$ je inverzný prvok k x^{-1} . Ale máme $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$ a teda inverzný prvok k x^{-1} je x . Pretože inverzný prvok je jediný máme: $(x^{-1})^{-1} = x$.
- 2.) Rátajme $(x \bullet y) \bullet (y^{-1} \bullet x^{-1}) = x \bullet (y \bullet y^{-1}) \bullet x^{-1} = x \bullet 1 \bullet x^{-1} = 1$
Podobne $(y^{-1} \bullet x^{-1}) \bullet (x \bullet y) = y^{-1} \bullet (x^{-1} \bullet x) \bullet y = y^{-1} \bullet 1 \bullet y = 1 \Rightarrow 2.)$

Podgrupa.

Definícia 1.16. Nech $(G, \bullet)$ je grupa. Nech $U \neq \emptyset$ je podmnožina v G s binárnou operáciou $*$: $U \times U \rightarrow U$ takou, že pre každé $x, y \in U$ platí $x*y = x \bullet y$. Ak $(U, *)$ je grupa, tak hovoríme, že $(U, *)$ je *podgrupa* grupy $(G, \bullet)$. Voľnejšie tiež hovoríme, že grupa U je podgrupou grupy G . Teda ak $(U, *)$ je podgrupou v $(G, \bullet)$ tak zobrazenie $\bullet|_{U \times U} : U \times U \rightarrow G$ je vlastne U teda (trochu nepresne) môžeme povedať, že v tejto situácii je binárna operácia $*$ podgrupy U zúžením binárnej operácie $\bullet$ grupy G .

Veta 1.4. (kritérium podgrupy). Nech $U \neq \emptyset$ je podmnožina množiny G , pričom nech $(G, \bullet)$ je grupa. Potom U je podgrupou grupy G práve vtedy, keď platí

ktorákoľvek z nasledujúcich dvoch ekvivalentných podmienok:

(I): pre $\forall x, y \in U$ je $x \bullet y^{-1} \in U$

(II): pre $\forall x, y \in U$ je $x \bullet y \in U$ a $y^{-1} \in U$.

Dôkaz. U je podgrupa potom $(I) \wedge (II)$

Najskôr ukážeme, že $(U, *)$ je podgrupa v $(G, \bullet)$. Označme 1_U neutrálny prvok grupy U , 1 je neutrálny prvok grupy G . Máme: $1_U * 1_U = 1_U = \boxed{1_U \bullet 1_U = 1_U \bullet 1}$. Vynásobením rovnosti $\boxed{}$ zľava prvkom 1_U^{-1} dostávame: $1_U = 1$. Teraz pre ľubovoľný prvok $y \in U$ označme y_U^{-1} k nemu inverzný prvok v podgrupe $(U, *)$. (y^{-1} je inverzný prvok k y v grupe $(G, \bullet)$). Máme: $y_U * y_U^{-1} = y_U \bullet y_U^{-1} = 1_U = 1 = y_U^{-1} * y_U = y_U^{-1} \bullet y_U$. Teda z toho, čo je podčiarknuté vidíme, že k y je v G inverzný prvok y_U^{-1} . Ale tiež je to y^{-1} . Keďže inverzný prvok k prvku grupy je práve jeden, dostávame: $y_U^{-1} = y^{-1}$. Teda pre $x, y \in U$ máme aj $x, y^{-1} \in U$. Pretože $(U, *)$ je podgrupa, máme $x * y^{-1} = x \bullet y^{-1} \in U$. To je práve (I). Analogicky sa dokáže, že ak $(U, *)$ je podgrupa, tak platí (II).

Teraz predpokladajme, že je splnená podmienka (I). Chceme ukázať, že potom $(U, *)$ je podgrupa. Pretože $U \neq \emptyset$ máme ďalej prvok $a \in U$. Z (I) potom dostávame, že $a \bullet a^{-1} = 1 \in U$. Ďalej, ak $y \in U$ je ľubovoľné, tak z podmienky (I) vyplýva $1 \bullet y^{-1} = y^{-1} \in U$. Teraz pre ľubovoľné $x, y \in U$ bude tiež $x, y^{-1} \in U$. Z (I) potom máme, že aj $x \bullet (y^{-1})^{-1} = x \bullet y \in U$. Ináč povedané, predpis $x * y = x \bullet y$ pre ľubovoľné $(x, y) \in U \times U$ definuje binárnu operáciu $*$: $U \times U \rightarrow U$. Operácia $*$ je asociatívna (lebo $\bullet$ je taká), neutrálny prvok je, inverzný prvok $y_U^{-1} = y^{-1}$, teda $(U, *)$ je grupa. Je to podgrupa v $(G, \bullet)$.

Homomorfizmy grúp.

Definícia 1.17. Nech $(G, \bullet), (H, *)$ sú grupy. *Homomorfizmus* z $(G, \bullet)$ do $(H, *)$ je zobrazenie $f : G \rightarrow H$ také, že $f(x \bullet y) = f(x) * f(y)$ pre všetky $x, y \in G$.

Veta 1.5. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, *)$ je homomorfizmus grúp. Potom

- 1.) $f(1) = 1$.
- 2.) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Dôkaz.

- 1.) $1 * f(1) = f(1 \bullet 1) = f(1) * f(1) \Leftrightarrow f^{-1}(1) * 1 * f(1) = f^{-1}(1) * f(1) * f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1$
- 2.) Nech $x \in G$ je ľubovoľné. Potom $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$. Pretože f je homomorfizmus a platí $f(1) = 1$ máme, že $f(x \bullet x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) = f(x^{-1}) * f(x) = f(1) = 1$ z čoho $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

Veta 1.6. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, *)$ je homomorfizmus grúp. Ak $S \neq \emptyset$ je podgrupa grupy G tak $f(S)$ je podgrupa grupy H .

Dôkaz. Pretože S je podgrupa vieme, že $1 \in S$. Potom $f(1) = 1 \in S$, teda $f(S) \neq \emptyset$. Ďalej overíme (napr.) podmienku (I) z kritéria podgrupy pre $f(S)$. Nech $x, y \in f(S)$ sú ľubovoľné. Teda $x = f(a)$ a $y = f(b)$ pre $a, b \in S$. Potom $y^{-1} = (f(b))^{-1} = f(b^{-1})$ z predchádzajúcej vety. Z toho $x * y^{-1} = f(a) * f(b^{-1}) = f(a \bullet b^{-1}) \in f(S)$ totiž $a \bullet b^{-1} \in S$ keďže $a, b \in S$ a S je podgrupa. Podmienka (I) je splnená a teda $f(S)$ je podgrupa.

Definícia 1.18. Majme zobrazenie $f : M \rightarrow N$ a nech $A \subset N$. Vzor množiny A pri zobrazení f označíme $f^{-1}(A)$ pritom $f^{-1}(A) = \{x \in M; f(x) \in A\}$

Veta 1.7. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$ je homomorfizmus grúp a nech $S \subset H$ je podgrupa grupy H . Potom $f^{-1}(S)$ je podgrupa grupy G .

Dôkaz. Vieme, že $f(1)=1$ pritom $1 \in S$, lebo S je podgrupa. Teda $1 \in f^{-1}(S)$ a preto $f^{-1} \neq \emptyset$. Teraz použijeme kritérium podgrupy. Nech $x, y \in f^{-1}(S)$ sú ľubovoľné. Chceme ukázať, že $x \bullet y^{-1} \in f^{-1}(S)$. Takto: pretože $x, y \in f^{-1}(S)$ máme $f(x) \in S$, $f(y) \in S$. Pretože S je podgrupa, potom aj $f(x) \bullet (f(y))^{-1} \in S$. Pritom však vieme, že $f(y^{-1}) = (f(y))^{-1}$. Teda máme $f(x) \bullet f(y^{-1}) \in S \Rightarrow f(x \bullet y^{-1}) \in S$. To znamená, že $x \bullet y^{-1} \in f^{-1}(S)$. $\square$

Definícia 1.19. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$ je homomorfizmus grúp. Vieme, že $\{1\} \subset H$ je podgrupa grupy H . Podgrupu $f^{-1}(\{1\})$ grupy G nazývame *jadro* homomorfizmu f , označuje sa $\text{Ker}(f)$. Teda $\text{Ker}(f) = \{x \in G; f(x) = 1\}$

Veta 1.8. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$ je homomorfizmus grúp. Potom f je injektia $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{1\}$

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech f je injektívne zobrazenie. Chceme ukázať, že $\text{Ker}(f) = \{1\}$. Takto: máme $f(1) = 1$, a teda zrejme $\{1\} \subset \text{Ker}(f)$. Ak $x \in \text{Ker}(f)$, tak $f(x) = 1 = f(1)$. Z injektívnosti f vyplýva, že $x = 1$. Teda tiež $\text{Ker}(f) \subset \{1\}$. Vcelku: $\text{Ker}(f) = \{1\}$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\text{Ker}(f) = 1$. Chceme ukázať, že f je injektívne. Takto: nech $f(x) = f(y)$ pre dáke $x, y \in G$. Potrebujeme ukázať, že $x = y$. Z toho, že $f(x) = f(y)$ dostávame $f(x) \bullet (f(y))^{-1} = 1$. Ale vieme, že $f(y^{-1}) = (f(y))^{-1}$. Teda platí: $f(x) \bullet f(y^{-1}) = 1$. Pretože f je homomorfizmus, z toho dostaneme: $f(x \bullet y^{-1}) = 1$. Teda: $x \bullet y^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1\}$. To znamená, že $x \bullet y^{-1} = 1$. Z toho dostaneme, že $x = y$.

Definícia 1.20. Injektívny homomorfizmus grúp sa nazýva *monomorfizmus*.

Surjektívny homomorfizmus grúp sa nazýva *epimorfizmus*. Homomorfizmus grúp, ktorý je bijektívny sa volá *izomorfizmus*. Ak $(G, \bullet)$ a $(H, \bullet)$ sú grupy a existuje izomorfizmus $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$ tak hovoríme, že grupy G a H sú izomorfné. Vtedy stručne píšeme: $f : G \xrightarrow{\cong} H$, alebo $G \cong H$.

Veta 1.9. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$ je izomorfizmus grúp. Potom aj inverzné zobrazenie $f^{-1} : (H, \bullet) \rightarrow (G, \bullet)$ je izomorfizmus grúp.

Dôkaz. Vieme, že $f^{-1} : H \rightarrow G$ existuje a že je bijekcia. Ešte treba ukázať, že f^{-1} je aj homomorfizmus grúp. Takto: nech $x, y \in H$ sú ľubovoľné. Potom existujú jednoznačne určené $a, b \in G$ také, že $f(a) = x$, $f(b) = y$. Keďže f je homomorfizmus máme $f(a) \bullet f(b) = f(a \bullet b) = x \bullet y$; z toho: $f^{-1}(x \bullet y) = a \bullet b = f^{-1}(x) \bullet f^{-1}(y)$.

Veta 1.10. Zloženie dvoch homomorfizmov grúp je znova homomorfizmus grúp. Zloženie dvoch izomorfizmov grúp je znova izomorfizmus.

Dôkaz. Nech $f : (G, \bullet) \rightarrow (H, \bullet)$, $t : (T, \bullet) \rightarrow (S, \bullet)$ sú homomorfizmy grúp. Potom pre $\forall x, y \in G$ je $t \circ f(x \bullet y) = t(f(x \bullet y)) = t(f(x) \bullet f(y)) = t(f(x)) \bullet t(f(y)) = (t \circ f(x)) \bullet (t \circ f(y))$.

Relácie na množinách a faktorové grupy komutatívnych grúp.

Definícia 1.21. Relácia na množine $M \neq \emptyset$ je hocijaká podmnožina $R \subset M \times M$.

Definícia 1.22. Relácia R na množine $M \neq \emptyset$ sa volá *relácia ekvivalencie* ak má tieto vlastnosti:

- 1.) $(x, x) \in R \quad \forall x \in M$ (reflexívnosť relácie R)
- 2.) ak $(x, y) \in R$ tak aj $(y, x) \in R$ (symetrickosť)
- 3.) ak $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ tak aj $(x, z) \in R$ (tranzitívnosť)

Definícia 1.23. Nech $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine $M \neq \emptyset$. Potom pre ľubovoľné $y \in M$ označíme $[y] = \{x \in M; x \sim y\}$. $[y]$ sa volá *trieda ekvivalencie* určená (reprezentovaná) prvkom y , y sa volá *reprezentant* triedy ekvivalencie $[y]$.

Veta 1.11. Nech $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine $M \neq \emptyset$ a nech $[y]$ pre $y \in M$ znamená triedu reprezentovanú prvkom y . Potom:

- 1.) $[y] \neq \emptyset \quad \forall y \in M$
- 2.) $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \quad \forall x, y \in M$
- 3.) ak $[x] \neq [y]$, tak $[x] \cap [y] = \emptyset$
- 4.) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$

Dôkaz.

- 1.) $y \sim y$ a vtedy $y \in M$.
- 2.) $[\Leftarrow]$: Nech $x \sim y$. Chceme ukázať, že $[x] = [y]$. Nech $a \in [x]$. Potom $a \sim x$, ale $x \sim y$, preto $a \sim y$, a teda $a \in [y]$. Teda $[x] \subset [y]$. Analogicky sa dokáže $[y] \subset [x]$, teda $[x] = [y]$. $[\Rightarrow]$: Predpokladajme, že $[x] = [y]$. Potom $x \in [x] = [y]$, teda $x \in [y]$, preto $x \sim y$.
- 3.) Predpokladajme, že $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Teda existuje $a \in [x] \cap [y]$. Potom $a \sim x$ a $a \sim y$, teda $x \sim y$.
- 4.) Je zrejmé, že $\bigcup_{x \in M} [x] \subset M$. Nech teraz $x \in M$. Potom $x \in [x]$, teda $x \in \bigcup_{x \in M} [x]$, ukázali sme tiež, že $M \subset \bigcup_{x \in M} [x]$. Teda $M = \bigcup_{x \in M} [x]$.

Veta 1.12. Nech $(G, +)$ je komutatívna grupa a nech H je jej podgrupa. Definujme reláciu $\sim$ na G takto: pre $x, y \in G$ platí $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in H$. Potom $\sim$ je relácia ekvivalencie.

Dôkaz.

Reflexívnosť: $x - x = 0 \in H$, teda $x \sim x \quad \forall x \in G$

Symetrickosť: nech $x \sim y$. Potom $x - y \in H$. Ale H je podgrupa a preto aj $-(x - y) \in H$ teda $y \sim x$.

Tranzitívnosť: nech $x \sim y$ a $y \sim z$. Potom: $x - y \in H$ a $y - z \in H$. Pretože H je podgrupa máme, že $(x - y) + (y - z) \in H$. Teda $x \sim z$.

Označenie. Množinu tried ekvivalencie na grupe G vzhľadom na reláciu ekvivalencie z predchádzajúcej vety označíme G/H . (G podľa H)

Tvrdenie 1.5. Nech pre $[x] \in G/H$ a $[y] \in G/H$ je $[x] \oplus [y] = [x + y]$. Potom

$\oplus : G/H \times G/H \rightarrow G/H$ je dobre definované zobrazenie a teda $\oplus$ je binárna operácia na množine G/H .

Dôkaz. Treba ukázať, že $[x + y]$ nezávisí od výberu reprezentant tried $[x]$ resp. $[y]$. Nech $[x] = [a]$, $[y] = [b]$. Chceme ukázať, že $[a + b] = [x + y]$. Takto: z toho, že $[x] = [a]$, $[y] = [b]$ vieme, že $x \sim a$, $y \sim b$. Teda $x - a \in H$, $y - b \in H$. Pretože H je podgrupa

grupy G , máme tiež $(x-a)+(y-b)\in H \Leftrightarrow (x+y)-(a+b)\in H$. Z toho $x+y\sim a+b$, teda $[x+y]=[a+b]$.

Veta 1.13 a Definícia 1.24. *Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Na množine G/H definujeme binárnu operáciu $\oplus$ ako v predchádzajúcom tvrdení. Potom $(G/H; \oplus)$ je komutatívna grupa. Táto grupa sa volá faktorová grupa grupy G podľa podgrupy H .*

Dôkaz. $G/H \neq \emptyset$, lebo $[0] \in G/H$. Asociatívnosť operácie $\oplus$: $[x] \oplus ([y] \oplus [z]) = [x + (y + z)] = [(x + y) + z] = [x + y] \oplus [z] = ([x] \oplus [y]) \oplus [z]$ pre $\forall [x], [y], [z] \in G/H$. Existencia neutrálného prvku: pre každé $[x] \in G/H$ máme $[x] \oplus [0] = [x + 0] = [x] = [0 + x] = [0] \oplus [x]$. Teda $[0]$ je neutrálny prvok operácie $\oplus$. Existencia inverzného prvku: nech $[x] \in G/H$ je ľubovoľné, potom: $[x] \oplus [-x] = [x - x] = [0] = [-x] \oplus [x]$, teda inverzný prvok k $[x] \in G/H$ je $[-x] \in G/H$. $(G/H, \oplus)$ je komutatívna grupa: $[x] \oplus [y] = [x + y] = [y + x] = [y] \oplus [x]$.

Príklad. Nech $m \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Zoberme $G = \mathbb{Z}$ s operáciou sčítovania a $H = m\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$, $[x] \oplus [y] = [x + y] \forall x, y \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \oplus)$ je komutatívna grupa.

Tvrdenie 1.6. *Nech $H \neq \{0\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Z}, +)$. Potom $\exists m \in \mathbb{N}$ také, že $H = m\mathbb{Z}$.*

Dôkaz.

Nech m je najmenšie celé číslo patriace do H . Potom aj $k \cdot m = \overbrace{m + \dots + m}^{k\text{-krát}} \in H$ pre $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pretože H je podgrupa, máme tiež $k \cdot m \in H$ pre $\forall k \in \mathbb{Z}$. Teda $m\mathbb{Z} \subset H$. Ešte ukážeme, že $H \subset m\mathbb{Z}$. Nech $x \in H$ je ľubovoľný kladný prvok z H , ukážeme, že $x \in m\mathbb{Z}$ (to stačí). Vieme, že $x = q \cdot m + r$, pre jednoznačne určené q, r pričom $0 \leq r < m$. Z toho: $r = x - q \cdot m \in H$. Keby $r > 0$, tak by r bolo kladné číslo z H , menšie ako najmenší kladný prvok z H – to je nemožné. Preto $r = 0$, a teda $x = q \cdot m$ tj. $x \in m\mathbb{Z}$. Tým sme ukázali, že aj $H \subset m\mathbb{Z}$. Vcelku: $H = m\mathbb{Z}$.

Veta 1.14. *(o faktorovom izomorfizme): Nech $(G, +)$ a $(H, +)$ sú komutatívne grupy a nech $f : G \rightarrow H$ je homomorfizmus grúp. Potom $G/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$. Špeciálne, ak f je epimorfizmus, tak $G/\text{Ker}(f) \cong H$.*

Dôkaz. Predpis, ktorý ľubovoľnému $[x] \in G/\text{Ker}(f)$ priradí $f(x) \in \text{Im}(f) = f(G)$, dobre definuje zobrazenie $\bar{f} : G/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$. Treba ukázať, že ak $[x] = [a]$, tak aj $f(x) = f(a)$. Takto: ak $[x] = [a]$, tak $x \sim a$, teda $x - a \in \text{Ker}(f)$. Z toho $f(x - a) = 0 \in H$ tj. $f(x) - f(a) = 0$, a teda $f(x) = f(a)$. Ukázali sme, že $\bar{f} : G/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$; $\bar{f}([x]) = f(x)$ je dobre definované zobrazenie. $\bar{f}$ je aj homomorfizmus grúp: $\bar{f}([x] + [y]) = \bar{f}([x + y]) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \bar{f}([x]) + \bar{f}([y])$ pre všetky $[x], [y] \in G/\text{Ker}(f)$. $\bar{f}$ je monomorfizmus grúp: Nech $\bar{f}([x]) = \bar{f}([y])$. Potom $f(x) = f(y)$, a teda $f(x) - f(y) = 0$, tj. $f(x - y) = 0$ tj. $x - y \in \text{Ker}(f)$. Teda $x \sim y$, preto $[x] = [y]$. $\bar{f}$ je epimorfizmus grúp: pre ľubovoľné $b \in \text{Im}(f)$ máme $x \in G : f(x) = b$. Potom $\bar{f}([x]) = f(x) = b \Rightarrow \bar{f}$ je izomorfizmus grúp.

Príklad. $m \in \mathbb{N}$ pevne zvolené. Zobrazenie $\varphi_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$. $\varphi_m(x) =$ zvyšok po vydelení x číslom m . φ_m je epimorfizmus z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ na $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$. $\text{Ker}(\varphi_m) = \{x \in \mathbb{Z}; m|x\} = m\mathbb{Z}$. Z vety o faktorovom izomorfizme: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$.

II. OKRUH, TELESO, POLE

Definícia 2.1. Nech R je množina v ktorej sú aspoň dva prvky. Nech sú na R definované dve binárne operácie: $+$: $R \times R \rightarrow R$ ("sčítovanie") a $\bullet$: $R \times R \rightarrow R$ ("násobenie"). Hovoríme, že $(R, +, \bullet)$ je *okruh*, ak:

- 1.) $(R, +)$ je komutatívna grupa.
- 2.) $\bullet$ je asociatívna: $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z \quad \forall x, y, z \in R$
- 3.) $\bullet$ je distributívna vzhľadom na sčítovanie: $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$
 $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$ Ak $\bullet$ je komutatívna, potom $(R, +, \bullet)$ s vlastnosťami 1.), 2.), 3.) je komutatívny okruh. Ak $\bullet$ má neutrálny prvok, hovoríme o okruhu s 1, $(R, +, \bullet, 1)$.

Definícia 2.2. Okruh $(R, +, \bullet)$, v ktorom operácia $\bullet$ je komutatívna sa volá *komutatívny okruh*.

Definícia 2.3. Nech $(R, +, \bullet)$ je okruh s 1, ak $\bullet|_{R^*}$, kde $R^* = R \setminus \{0\}$ nadobúda hodnoty v R , tj. ak $\bullet|_{R^*}$ definuje binárnu operáciu v R^* , a R^* s touto operáciou je grupa, tak $(R, +, \bullet, 1)$ sa nazýva *teleso*. Komutatívny okruh, ktorý je telesom sa nazýva *pole*.

Veta 2.1. Nech $(R, +, \cdot)$ je ľubovoľný okruh. Potom v ňom platia tieto pravidlá pre ráťanie:

- 1.) $0 \cdot x = x \cdot 0$ pre $\forall x \in R$
- 2.) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ pre $\forall x, y \in R$
- 3.) Ak R má 1, tak $1 \neq 0$.
- 4.) Ak R je teleso, tak z toho, že $x \cdot y = 0$ vyplýva, že $x = 0 \vee y = 0$.
- 5.) Ak R je teleso, tak $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Dôkaz.

- 1.) $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot x$.
 - 2.) $(x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$
 $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0 \Leftrightarrow -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.
 - 3.) Pretože R má aspoň 2 prvky, existuje $x \in R, x \neq 0$. Ak R má 1, tak $x \cdot 0 = 0$ podľa 1.) a $x \cdot 1 = x$, keďže $x \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 0$.
 - 4.) Ak $x \neq 0$ a $y \neq 0$, tak treba dokázať $x \cdot y \neq 0$. Takto: $x \neq 0, y \neq 0$, tak $x \in R^*$ a $y \in R^*$, ale R^* je grupa (vzhľadom na $\cdot|_{R^*}$) a preto $x \cdot y \in R^*$ tj. $x \cdot y \neq 0$.
 - 5.) $\Rightarrow$: Predpokladajme, že $x^2 = 1$. Teda $x^2 - 1 = 0$, tj. $(x - 1)(x + 1) = 0 \stackrel{4.)}{\Rightarrow} x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$.
- $\Leftarrow$ Pomocou 2.). $\square$

Lema 2.1.

Nech $p, q \in \mathbb{N}$. Potom množina $\{p \cdot x + q \cdot y \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupou v $(\mathbb{Z}, +)$, pričom $\{p \cdot x + q \cdot y \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{Z}\} = r\mathbb{Z}$, kde r je najväčší spoločný deliteľ čísel p, q .

Dôkaz. $\{p \cdot x + q \cdot y \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$. Kritérium podgrupy: $p \cdot x + q \cdot y - (p \cdot \hat{x} + q \cdot \hat{y}) = p \cdot (x - \hat{x}) + q \cdot (y - \hat{y}) \in \{p \cdot x + q \cdot y, x, y \in \mathbb{Z}\}$. V $(\mathbb{Z}, +)$ sú všetky podgrupy tvaru: $k\mathbb{Z}$, (pre nejaké $k \in \mathbb{N}$). Teda $\{p \cdot x + q \cdot y; x, y \in \mathbb{Z}\} = r\mathbb{Z}$. Treba ešte ukázať, že r je najväčší spoločný deliteľ čísel p, q . $p \in \{p \cdot x + q \cdot y; x, y \in \mathbb{Z}\}$, $p = r \cdot k$, teda $r|p$. $q \in \{p \cdot x + q \cdot y; x, y \in \mathbb{Z}\}$, $q = r \cdot l$, teda $r|q$. Nech c je nejaký spoločný deliteľ čísel p, q . Chceme ukázať, že $c|r$. Ak $c|p$ a $c|q$, tak $c|p \cdot x + q \cdot y$ pre $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, a teda c je deliteľom každého prvku z $\{p \cdot x + q \cdot y; x, y \in \mathbb{Z}\} = r\mathbb{Z}$, teda $c|r \cdot 1$ t.j. $c|r$.

Veta 2.2. Nech $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Potom $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ je pole $\Leftrightarrow m$ je prvočíslo.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ je pole. (To znamená, že nenulové prvky tvoria grupu.) Keby m nebolo prvočíslo, tak by $m = m_1 \cdot m_2$, kde $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $1 < m_1 < m$, $1 < m_2 < m$. Potom $[m_1] \neq 0$, $[m_2] \neq 0$, ale $[m_1] \cdot [m_2] = [m_1 \cdot m_2] = [m] = [0] = 0$. Je to spor s tým, že $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ je grupa.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že m je prvočíslo. Chceme ukázať, že $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \odot)$ je grupa. Na to stačí ukázať, že pre ľubovoľné nenulové $0 \neq x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ existuje v $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ inverzný prvok vzhľadom na násobenie. Takto: pre $[x] \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ máme $m \nmid x$, z toho: najväčší spoločný deliteľ m, x je 1. Potom z Lemy 2.1 vieme, že $1 = a \cdot x + b \cdot y$ pre dáke $a, b \in \mathbb{Z}$. Z toho $[1] = 1 = [a \cdot x + b \cdot y] = [a \cdot x] + [b \cdot y] = [a] \cdot [x] + [0] \Leftrightarrow [1] = [a] \odot [x]$ t.j. inverzný prvok k $[x]$ vzhľadom na násobenie je $[a] \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

III. VEKTOROVÉ PRIESTORY

Definícia 3.1. Nech $V \neq \emptyset$ je množina, jej prvky budeme označovať: $\vec{a}, \dots, \vec{x}$. Nech R je pole. Nech na V je definovaná binárna operácia $+: V \times V \rightarrow V$ (budeme jej hovoriť sčítovanie prvkov z V) a nech okrem toho je dané zobrazenie $R \times V \rightarrow V$: $(\alpha, \vec{x}) \mapsto \alpha \cdot \vec{x}$ (hovoríme mu násobenie prvkov z V prvkami z R .) V sa nazýva *vektorový priestor* nad poľom R ak spĺňa axiómy:

- 1.) $(V, +)$ je komutatívna grupa.
- 2.) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre všetky $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$.
- 3.) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre $\forall \alpha, \beta \in R$ a $\forall \vec{x} \in V$
- 4.) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall \vec{x} \in V$.
- 5.) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, pre $\forall \vec{x} \in V$.

Ak V je vektorový priestor, prvky z V sa volajú *vektory*, prvky z R sa volajú *skaláry*.

Poznámka.

Neutrálny prvok vo vektorovom priestore $(V, +)$ sa nazýva *nulový vektor*, ozn.: $\vec{0}$. Ak $\alpha \in R$, $\vec{x} \in V$, tak $\alpha \cdot \vec{x}$ nazývame α -násobok vektora $\vec{x} \in V$.

Veta 3.1. Nech V je vektorový priestor nad poľom R . Potom $\forall \vec{x} \in V$, $\forall \alpha \in R$:

- 1.) $\vec{0} \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- 2.) $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.
- 3.) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Dôkaz.

- 1.) $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (1 + \vec{0})\vec{x} = 1\vec{x} + \vec{0}\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}\vec{x} \Leftrightarrow \vec{0}\vec{x} = \vec{0}$.
- 2.) $(1 + (-1))\vec{x} = \vec{0}\vec{x} = \vec{0}$. $1\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x}$. Teda $\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$, z čoho $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$.
- 3.) $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{x} + (-\vec{x})) = \alpha(1\vec{x} + (-1)\vec{x}) = \alpha(1 + (-1))\vec{x} = \alpha\vec{0}\vec{x} = \vec{0}\vec{x} = \vec{0}$.

Definícia 3.2. Nech V je vektorový priestor nad poľom R a nech $D \neq \emptyset$ je podmnožina vo V . D je *vektorový podpriestor* priestoru V , ak D je vektorový priestor nad R , pričom sčítovanie v D a násobenie prvkov z D skalármi z R je zúžením sčítovania vo V resp. násobenia prvkov z V skalármi z R .

Veta 3.2. (kritérium podpriestoru):

Nech V je vektorový priestor nad poľom R a nech $D \neq \emptyset$, $D \subset V$. D je vektorový podpriestor priestoru V práve vtedy, keď je splnená hociktorá z týchto dvoch ekvivalentných podmienok:

(I.) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D : \vec{x} + \vec{y} \in D$ a pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x} \in D$ je $\alpha \vec{x} \in D$.

(II.) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D$ a $\forall \alpha, \beta \in R$ je $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in D$.

Dôkaz. Predpokladajme, že D je vektorový podpriestor. Potom (I) je splnená (z definície vektorového podpriestoru). Teraz predpokladajme, že je splnená (I).

$+$ z V je zúžené na D definuje na D binárnu operáciu $+$. Podľa (I) : $0\vec{x} = \vec{0}$ patrí do D . $\vec{0}$ je neutrálny prvok operácie $+$ na D . Pre $\vec{x} \in D$ podľa (I) tiež $(-1)\vec{x} = -\vec{x} \in D$. $+$ je asociatívne, komutatívne, vcelku $(D, +)$ je komutatívna grupa. Okrem toho z (I) vyplýva, že máme definované zobrazenie $R \times D \rightarrow D$. Operácia $+$ a násobenie prvkov z D prvkami z R majú potrebné vlastnosti (zdedené z V); D je teda vektorový podpriestor priestoru V . Na ukončenie dôkazu vety stačí ukázať $(I) \Leftrightarrow (II)$. Nech platí (I), nech $\alpha, \beta \in R$ a $\vec{x}, \vec{y} \in D$. Potom $\alpha \vec{x} \in D$ a $\beta \vec{y} \in D \xrightarrow{(I)} \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in D$. Teda $(I) \Rightarrow (II)$. Nech platí (II). Potom pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D$ máme, že $1\vec{x} + 1\vec{y} = \vec{x} + \vec{y} \in D$. Pre ľubovoľné $\alpha \in R$ a ľubovoľné $\vec{x} \in D$, podľa (II) : $\alpha \vec{x} + 0\vec{x} = \alpha \vec{x} \in D$ tj. aj $(II) \Rightarrow (I)$.

Veta 3.3. Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom R . Potom $S \cap T$ je takisto vektorový podpriestor priestoru V .

Dôkaz. $S \cap T \neq \emptyset$, lebo $\vec{0} \in S \cap T$. Ukážeme, že $S \cap T$ spĺňa podmienku (II). Nech $\alpha, \beta \in R$, pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S \cap T$ sú ľubovoľné. Potom $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in S$ a $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in T \Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in S \cap T$. Čiže S aj T spĺňajú podmienku (II).

Veta 3.4. Nech $\{S_\alpha, \alpha \in A\}$ (A indexová množina.) je ľubovoľný systém vektorových podpriestorov vektorového priestoru V nad poľom R . Potom $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ je vektorový podpriestor priestoru V .

Dôkaz. Podobne ako vo Vete 3.3.

Definícia 3.3. Nech V je vektorový priestor nad poľom R a nech $A \neq \emptyset$ je podmnožina vo V . Najmenší vektorový podpriestor priestoru V obsahujúci A je vektorový podpriestor S taký, že:

1.) $A \subset S$.

2.) Ak T je vektorový podpriestor vo V taký, že $A \subset T$, tak $S \subset T$.

Veta 3.5. Nech V je vektorový priestor nad poľom R a nech A je podmnožina vo V . Potom najmenší vektorový podpriestor vo V obsahujúci A existuje a je jediný.

Dôkaz.

Jednoznačnosť: Nech by S a T boli najmenšie podpriestory obsahujúce A . Potom $T \subset S$ a $S \subset T$, teda $S = T$.

Existencia: Nech φ je systém všetkých vektorových podpriestorov obsahujúcich A . $\varphi \neq \emptyset$, lebo $V \in \varphi$. Potom $\bigcap_{S \in \varphi} S$ je najmenší podpriestor vo V obsahujúci A , lebo:

$\forall S \in \varphi$ máme $A \subset S$, a preto $A \subset \bigcap_{S \in \varphi} S$, tj. je splnená aj podmienka 2.) z Def 3.3.

Teda $S_A = \bigcap_{S \in \varphi} S$.

Definícia 3.4. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú vektory z vektorového priestoru V nad poľom R , nech $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$. Potom $\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k$ sa nazýva *lineárna kombinácia* vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ s koeficientmi $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Ak $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, táto lineárna kombinácia sa nazýva triviálna (a je to $\vec{0}$). Ak niektoré $\alpha_i \neq 0$, tak lineárna kombinácia je netriviálna.

Veta 3.6. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú vektory z vektorového priestoru V nad R . Potom $M = \{\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k \in V, \alpha_i \in R\}$ je vektorový podpriestor vo V .

Dôkaz. Daná množina je neprázdna, lebo $\vec{0} \in M$. Ďalej kritérium vektorového podpriestoru. Nech $\alpha, \beta \in R$, $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k, \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_k \vec{x}_k$ sú z tej množiny. Potom $\alpha \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^k \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) \vec{x}_i \in M$, lebo $\alpha \alpha_i + \beta \beta_i \in R$.

Označenie. V situácii z predchádzajúcej vety označíme: $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = \{\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k \in V; \alpha_i \in R\}$.

Veta 3.7. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú vektory z vektorového priestoru V nad R a nech $T \subset V$ je vektorového podpriestor taký, že $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset T$. Potom aj $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \subset T$.

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na maximálny počet nenulových koeficientov lineárnej kombinácie vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$. Ak lineárna kombinácia $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k$ má maximálny počet nenulových koeficientov, tak patrí do T , lebo je to buď $\vec{0}$, alebo nenulový násobok spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$, v každom prípade táto lineárna kombinácia patrí do T . Predpokladajme, že každá lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ s maximálne $s-1$ ($\leq k-1$) nenulovými koeficientmi patrí do T . Nech $\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_s \vec{x}_s$ je lineárna kombinácia s maximálne s nenulovými koeficientmi. Potom $\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_s \vec{x}_s = (\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_{s-1} \vec{x}_{s-1}) + \beta_s \vec{x}_s \in T$; T je vektorový podpriestor.

Veta 3.8.

Nech V je vektorový priestor nad R a nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ je ľubovoľná konečná podmnožina vo V . Potom najmenší vektorový podpriestor je $S_{\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}} = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

Dôkaz. Stačí ukázať, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ má obidve vlastnosti najmenšieho vektorového podpriestoru obsahujúceho množinu $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$.

1. $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.
2. Ak $T \subset V$ je ľubovoľný podpriestor vo V obsahujúci $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$, tak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \subset T$ platí podľa Vety 3.7. Z jednoznačnej určenosti vlastnosťami 1.), 2.) vyplýva, že naozaj $S_{\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}} = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

Definícia 3.5. Nech V je vektorový priestor nad R a nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset V$. Potom vektorový priestor $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \subset V$ sa nazýva *lineárny (vektorový) obal množiny* $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$. Vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sa nazývajú *generátory* vektorového priestoru $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

Veta 3.9. *Nech V je vektorový priestor nad R a nech $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}] \in V$. Potom $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ práve vtedy, keď $\vec{a}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}]$. Potom $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}] \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ teda $\vec{a}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.
 $\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\vec{a}$ je lineárnou kombináciou $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$. Chceme ukázať, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}]$. Je zrejmé, že $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}]$ a $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}]$. Okrem toho, pretože $\vec{a}$ je lineárna kombinácia $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ máme, že $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}\} \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$, teda $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}] \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. Vcelku: $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{a}] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

Z toho vyplýva, že najjednoduchší zápis lineárneho obalu $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]$ dostaneme postupným vynechávaním tých vektorov, ktoré sú lineárnou kombináciou ostatných.

IV. SYSTÉMY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Definícia 4.1. Systém rovníc S :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}$$

(všetky rovnice musia byť splnené súčasne) je systém s lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, \dots, x_n$, ak $a_{ij} \in R$ ($i \in [1, s], j \in [1, n]$) a $b_i \in R$, kde R je dané pole. Prvky poľa a_{ij} sa nazývajú *koefficienty*, $b_1, \dots, b_n$ sa nazývajú *absolútne členy* systému S .

Definícia 4.2. Usporiadaná n -tica $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$ je *riešenie* systému S , ak $r_1, \dots, r_n$ po dosadení $x_i = r_i$ vyhovuje všetkým rovniciam S . Vyriešiť systém znamená nájsť všetky jeho riešenia. Ak žiadna n -tica z R^n nie je riešením systému S , hovoríme, že je *neriešiteľný*.

Definícia 4.3. Dva systémy lineárnych rovníc sú *ekvivalentné* ak majú tú istú množinu riešení. Vyriešiť daný lineárny systém potom znamená vyriešiť hocijaký s ním ekvivalentný systém.

Definícia 4.4. *Ekvivalentné úpravy* sú také, ktoré nemenia množinu riešení.

Veta 4.1. Nasledujúce úpravy sú ekvivalentné:

- 1.) Vzájomná výmena dvoch rovníc systému.
- 2.) Vynásobenie ľubovoľnej rovnice v S prvkom $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$.
- 3.) Pripočítanie ľubovoľnej rovnici v S inej rovnici v S .

Dôkaz. triviálny.

Záver pri riešení systému S . :

Pomocou ekvivalentných úprav ho prevedieme na jednoduchý ekvivalentný systém, ktorý už nie je problém vyriešiť.

Gaussova eliminačná metóda.

Predpokladajme, že niektorý z koeficientov pri x_1 v S je nenulový. Môžeme priamo predpokladať, že $a_{11} \neq 0$.

1.krok. Pomocou prvej rovnice vylúčime x_1 z druhej $\dots$, s -tej rovnice. Takto: k druhej rovnici prirátame $-(a_{11}^{-1}a_{21})$ -násobok prvej rovnice, $\dots$ atď, až k s -tej rovnici prirátame $-(a_{11}^{-1}a_{s1})$ -násobok prvej rovnice. Dostaneme ekvivalentný systém S^* tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \bar{a}_{s2}x_2 + \dots + \bar{a}_{sn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

V S^* môžu byť rovnice s ľavou aj pravou stranou nulovou, tie vynecháme. V S^* sa môže vyskytnúť rovnica s ľavou stranou nulovou, kým jej pravá strana je nenulová. Ak sa stane takéto niečo, potom systém S^* a teda aj S je neriešiteľný. Po konečnom počte opakovaní prvého kroku dostaneme systém V tvaru:

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1k}y_k + \dots + c_{1n}y_n &= d_1 \\ c_{22}y_2 + \dots + c_{2k}y_k + \dots + c_{2n}y_n &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{kk}y_k + \dots + c_{kn}y_n &= d_k \end{aligned}$$

Kde $y_1, \dots, y_n$ vznikli (príp. viacnásobným) premenovaním neznámych $x_1, \dots, x_n$, pritom $k \leq s$ a $k \leq n$. Navyše $c_{11} \neq 0, \dots, c_{ii} \neq 0, \dots, c_{kk} \neq 0$.

Ak $k=n$, tak V vyzerá takto:

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n &= d_1 \\ c_{21}y_1 + \dots + c_{2n}y_n &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{n-1,1}y_1 + \dots + c_{n-1,n}y_n &= d_{n-1} \\ c_{nn}y_n &= d_n \end{aligned}$$

a teda vyrátame z poslednej rovnice $y_n = d_n c_{nn}^{-1}$, dosadíme do predposlednej, z nej vyrátame $y_{n-1}, \dots$ atď, až napokon y_1 . Vtedy V má práve jedno riešenie. Spätným premenovaním dostaneme tú jedninú n -ticu v R , ktorá je riešením systému S .

Ak $k < n$, tak $y_1, \dots, y_k$ sú viazané rovnicami systému V , kým neznáme $y_{k+1}, \dots, y_n$ považujeme za tzv. voľné neznáme (parametre), nadobúdajú ľubovoľné hodnoty z R . Zo systému V potom postupne, počnúc od poslednej rovnice, vyrátame $y_k, y_{k-1}, \dots, y_1$ pomocou parametrov $y_{k+1}, \dots, y_n$. Takto dostaneme všeobecné vyjadrenie riešenia systému V pomocou parametrov $y_{k+1}, \dots, y_n$. Spätným premenovaním neznámych dostaneme z toho všeobecné vyjadrenie riešenia systému S pomocou $n-k$ parametrov.

V. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ VEKTOROV

Definícia 5.1. Nech V je vektorový priestor nad R a nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$ sú dané vektory. Hovoríme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú *lineárne závislé*, ak $\vec{0}$ sa dá vyjadriť ako netriviálna lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$. Vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sa nazývajú *lineárne nezávislé* ak nie sú lineárne závislé.

Veta 5.1. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú navzájom rôzne nenulové vektory vektorového priestoru V nad R , nech $k \geq 2$. Potom platí: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow$ niektorý z nich je lineárna kombinácia ostatných.

Dôkaz.

Predpokladajme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé. Teda existujú $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ nie všetky nulové, také, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$. Povedzme, že $\alpha_i \neq 0$, teda $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_i \vec{x}_i + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$. Z toho: $\alpha_i \vec{x}_i = -\alpha_1 \vec{x}_1 - \dots - \alpha_{i-1} \vec{x}_{i-1} - \alpha_{i+1} \vec{x}_{i+1} - \dots - \alpha_k \vec{x}_k$, teda: $\vec{x}_i = -\alpha_i^{-1} \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^k \alpha_j \vec{x}_j$.

Opačne: Predpokladajme, že napr. $\vec{x}_i$ je lineárnou kombináciou ostatných.

Teda $\vec{x}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^k \beta_j \vec{x}_j \Rightarrow \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_{i-1} \vec{x}_{i-1} - \beta_i \vec{x}_i + \beta_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \beta_k \vec{x}_k = \vec{0}$.

Teda $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé.

Veta 5.2. Nech V je vektorový priestor nad R , nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset V - \{\vec{0}\}$. Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z týchto vektorov je lineárnou kombináciou tých, čo sú napísané pred ním.

Dôkaz.

Predpokladajme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé. Teda existujú $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ nie všetky nulové také, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$. Nech j je najvyšší index taký, že $\alpha_j \neq 0$. Teda

$\vec{0} = \sum_{i=1}^j \alpha_i \vec{x}_i$, pričom $\alpha_j \neq 0$. Potom $j \geq 2$, lebo keby $j=1$, tak by sme mali $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$,

$\alpha_1 \neq 0$, teda $\vec{x}_1 = \vec{0}$ – spor.

Opačne: Nech niektorý z $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ je lineárnou kombináciou tých, čo sú napísané pred ním. Potom je lineárnou kombináciou aj ostatných, lebo stačí tie, čo sú za ním zobrať s koeficientom 0. Z Vety 5.1 sú lineárne závislé.

Dôsledok. Nech V je vektorový priestor nad R , nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset V - \{\vec{0}\}$. Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď existuje $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_k]$.

Dôkaz. Zrejmy.

Poznámka. Z dôsledku vyplýva návod na hľadanie najkratšieho zápisu lineárneho obalu. Ak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne nezávislé, tak zápis $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ je najkratší. Ak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé, tak niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných, ten vynecháme, pričom lineárny obal zvyšných: $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$, ak tie zvyšné

vektory sú lineárne nezávislé, tak sme skončili; ak sú lineárne závislé tak opakujeme predchádzajúci krok. Po konečnom počte krokov dostaneme vyjadrenie $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ pomocou lineárne nezávislej podmnožiny množiny $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$.

Steinitzova veta. *Nech vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$, $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. Nech $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_j\} \subset V$ je lineárne nezávislá podmnožina. Potom platia:*

1° $j \leq k$

2° Spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ existuje $k-j$ vektorov, ktoré spolu s $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_j$ generujú celý priestor V .

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na j .

1° Pre $j=1$: $\vec{y}_1$ je lineárne nezávislý práve vtedy, keď $\vec{y}_1 \neq \vec{0}$, pretože $V \neq \{\vec{0}\}$, máme $j=1 \leq k$. Teda 1° platí. Máme $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$, ale $\vec{y}_1 \in V$ t.j. $\vec{y}_1$ je lineárna kombinácia $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$, teda množina $\{\vec{y}_1, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ je lineárne závislá. Potom $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. Vektory $\vec{y}_1, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sú lineárne závislé, teda niektorý z nich je lineárna kombinácia tých, čo sú napísané pred ním. $\vec{y}_1$ to nemôže byť, teda je to niektorý spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$. Povedzme, že to je $\vec{x}_k$. Potom $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}]$. Tým sme overili, že platí 2°.

2° Predpokladajme, že veta platí pre $j=s-1$. Nech teraz $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s\}$ je ľubovoľná lineárne nezávislá podmnožina vo V . Chceme ukázať, že veta platí aj pre $j=s$. Aj množina $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}\}$ je lineárne nezávislá. Podľa indukčného predpokladu 1° platí: $s-1 \leq k$ a 2° $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$ sa dajú $k-(s-1)$ vektormi spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ doplniť tak, že spolu generujú celý priestor V . Povedzme, že tie "doplňujúce" vektory sú $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}$. Teda $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}]$. Chceme ukázať, že $s \leq k$. Ukážeme, že $s-1 < k$. Keby $s-1 = k$ tak by sme mali, že $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}]$. Ale $\vec{y}_s \in V$, teda by mal byť lineárnou kombináciou vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$, to je spor s tým, že $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$ sú lineárne nezávislé. Ďalej: $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}]$. Teraz $\vec{y}_s \in V$, teda $\vec{y}_s$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}$. Teda $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}$ sú lineárne závislé. Z vety vieme, že niektorý z nich je lineárna kombinácia tých, čo sú pred ním. Nemôže to byť žiadny spomedzi $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$, lebo sú lineárne nezávislé a teda je to niektorý spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s+1}$, povedzme, že to je posledný $\vec{x}_{k-s+1}$. Ten môžeme vynechať a podľa vety 5.2: $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-s}]$. Teda aj 2° je pre $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$ v poriadku.

Báza a dimenzia.

$V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. Dá sa každý vektorový priestor napísať ako lineárny obal konečnej množiny vektorov? (t.j. dá sa generovať konečnou množinou)
Odpoveď: NIE.

Príklad. $\mathbb{R}[t]$ všetky polynómy. $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ iba konečne veľa a_i je nenulový. $\mathbb{R}[t]$

je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Stupeň $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ je s , ak $s \neq 0$, ale $a_{s+1}, \dots$ sú nuly. Keby

existovali polynómy $q_1(t), \dots, q_k(t) \in \mathbb{R}[t]$ také, že $\mathbb{R}[t] = [q_1(t), \dots, q_k(t)]$, tak potom pre $n > \max\{\deg(q_1(t)), \dots, \deg(q_k(t))\}$ by polynóm $t^n \notin \mathbb{R}[t]$. Teda vektorový priestor $\mathbb{R}[t]$ sa nedá generovať konečnou množinou.

Definícia 5.2. Vektorový priestor V sa nazýva *konečne generovaný* ak existuje konečná množina $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset V$ taká, že $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. Ak V nie je konečne generovaný, hovoríme, že je nekonečne generovaný.

Definícia 5.3. Nech $V \neq \{\vec{0}\}$ je konečne generovaný vektorový priestor nad R . Potom usporiadaná množina $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ vektorov z V sa nazýva *báza* priestoru V , ak:

$$1^\circ: V = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k].$$

$2^\circ: \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ sú lineárne nezávislé.

Veta 5.3. Každý konečne generovaný vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$ nad R má bázu.

Dôkaz. Keďže V je konečne generovaný, existuje konečná množina $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$, pre ktorú $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p] = V$. Ak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ sú lineárne nezávislé, tak tvoria bázu. Ak nie, tak niektorý z nich je lineárna kombinácia zvyšných, potom lineárny obal zvyšných $= V$. Ak tie zvyšné sú lineárne nezávislé, tak tieto tvoria bázu priestoru V , ak sú lineárne závislé, tak zas zopakujeme predchádzajúcu úvahu. Po konečnom počte krokov dostaneme podmnožinu množiny $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$, ktorá už je lineárne nezávislá a jej lineárny obal je celé V . Tá je báza priestoru V .

Príklad.

$\mathbb{R}^n$ má bázu: $[(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$. To je tzv. štandardná báza v $\mathbb{R}^n$.

Veta 5.4. Všetky bázy nenulového konečne generovaného vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov.

Dôkaz. Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s), (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q)$ sú dve bázy takého vektorového priestoru. Potom zo *Steinitzovej vety*: $s \leq q$ a $q \leq s$ a teda $s = q$.

Definícia 5.4. Počet prvkov (ľubovoľnej) bázy konečne generovaného nenulového vektorového priestoru V nad R sa nazýva *dimenzia* priestoru V nad poľom R , ozn: $\dim_R(V)$ (alebo $\dim(V)$ ak je R jasné z kontextu).

Dimenzia nulového priestoru je 0. $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$

Dimenzia priestoru, ktorý je nekonečne generovaný je ∞ . $\dim(V) = \infty$.

Príklady.

1. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
3. $\dim \mathbb{R}^n = n$
4. $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$

Veta 5.5. Každú lineárne nezávislú množinu nenulového konečne generovaného vektorového priestoru môžeme doplniť na jeho bázu.

Dôkaz. Nech V je taký priestor, nech $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_j\} \subset V$ je lineárne nezávislá. Keďže V je konečne generovaný, existujú $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je báza vo V . Zo *Steinitzovej vety*: $j \leq k$, $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_j$ sa dajú doplniť $k-j$ vektormi spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ tak, že týchto k vektorov generuje celé V . Tieto vektory však musia byť aj lineárne nezávislé. (Keby boli lineárne závislé, tak by V mal bázu s nanajvyš $k-1$ prvkami. Spor s dimenziou.) Teda $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_j$ spolu s tými, dopĺňujúcimi vektormi tvoria bázu priestoru V .

Veta 5.6. Ak $\dim(V)=n$, tak $n+1$ vektorov z V je vždy lineárne závislých.

Dôkaz. $\dim(V)=n$, teda vo V existuje n -prvková báza $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Keby ľubovoľná $n+1$ -prvková množina lineárne nezávislá, tak podľa *Steinitzovej vety* by bolo $n+1 \leq n$, čo je spor.

Veta 5.7. Nech $\dim(V)=n$. Potom:

1. usporiadaná množina $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ n vektorov z V je bázou vo V práve vtedy, keď $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ je lineárne nezávislá.
2. $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je bázou vo V práve vtedy, keď $V=[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$.

Dôkaz.

1. $\Rightarrow$: jasné.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ je lineárne nezávislá. Podľa *vety 5.5* túto množinu môžeme doplniť $n-n=0$ vektormi z V na bázu vo V . tj.už $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza.

2. $\Rightarrow$: jasné

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $V=[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$. Chceme ukázať, že $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú aj lineárne nezávislé. Keby boli lineárne závislé, postupným vynechávaním tých, ktoré sú lineárnou kombináciou zvyšných by sme dostali bázu, ktorá by mala nanejvýš $n-1$ prvkov. Spor s tým, že $\dim(V)=n$. Teda všetky bázy majú n prvkov.

Veta 5.8 a Definícia 5.5. Nech $V \neq \{\vec{0}\}$ je konečne generovaný vektorový priestor nad R . Potom množina $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je bázou vo V práve vtedy, keď každý vektor z V sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Ak $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo V a pre $\vec{x} \in V$ máme $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Tak usporiadaná n -tica $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sa nazýva n -tica súradníc vektora $\vec{x}$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza v priestore V . Teda $V=[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ tj. pre ľubovoľný vektor $\vec{x} \in V$ $\exists x_1, \dots, x_n \in R$ také, že $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Keby $\vec{x} = x'_1\vec{a}_1 + \dots + x'_n\vec{a}_n$ bolo iné také vyjadrenie, tak $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = x'_1\vec{a}_1 + \dots + x'_n\vec{a}_n \Leftrightarrow (x_1 - x'_1)\vec{a}_1 + \dots + (x_n - x'_n)\vec{a}_n = \vec{0}$. Ale $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ tvoria bázu, sú aj lineárne nezávislé, preto $x_1 - x'_1 = 0, \dots, x_n - x'_n = 0 \Leftrightarrow x_i = x'_i$. čsmd.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že každý vektor z V sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Teda $V \subset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$. Ešte ukážeme, že $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé. Nech $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Tiež: $0\vec{a}_1 + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$, keďže vyjadrenie 0 ako lineárna kombinácia vektorov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ je podľa predpokladu jediné, tak máme: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

VI. LINEÁRNE A DIREKTNÉ SÚČTY VEKTOROVÝCH PRIESTOROV

Ak S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V , tak $S \cup T$ nemusí byť vektorový podpriestor vo V . Aký je najmenší podpriestor vo V , obsahujúci $S \cup T$?

Veta 6.1 a Definícia 6.1. *Nech $S, T \subset V$ sú vektorové podpriestory. Potom $\{\vec{s} + \vec{t} \in V, \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\}$ je vektorový podpriestor vo V , nazýva sa lineárny súčet S a T , ozn. $S + T$.*

Dôkaz. $\vec{0} \in \{\vec{s} + \vec{t} \in V, \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\} \neq \emptyset$, lebo $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Ak $\vec{x}, \vec{y} \in \{\vec{s} + \vec{t}, \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\}$, tak $\vec{x} = \vec{s}_1 + \vec{t}_1, \vec{y} = \vec{s}_2 + \vec{t}_2$, potom $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(\vec{s}_1 + \vec{t}_1) + \beta(\vec{s}_2 + \vec{t}_2) = \underbrace{(\alpha\vec{s}_1 + \beta\vec{s}_2)}_{\in S} + \underbrace{(\alpha\vec{t}_1 + \beta\vec{t}_2)}_{\in T}$,

teda $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \{\vec{s} + \vec{t}, \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\}$.

Tvrdenie. $S + T$ je najmenší podpriestor obsahujúci $S \cup T$.

Lema 6.1. *Ak P je vektorový podpriestor konečne generovaného vektorového priestoru V , tak aj P je konečne generovaný.*

Dôkaz. : dú.

Veta 6.2. *Predpokladajme, že V je konečne generovaný vektorový priestor nad R , nech S, T sú jeho podpriestory. Potom $\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.*

Dôkaz.

1. Predpokladajme, že $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s$ je báza v S , $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ je báza v T . Potom $S + T = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t]$. Navyše $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ je báza v $S + T$. Stačí ukázať ich lineárnu nezávislosť. Keby boli lineárne závislé, potom jeden z nich by bol lineárna kombináciou tých, čo sú pred ním. Nemôže byť žiadny z $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s$, lebo tie tvoria bázu v S . Teda musí to byť dajaké $\vec{y}_i$: $\vec{y}_i = \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_s\vec{x}_s + b_1\vec{y}_1 + \dots + b_{i-1}\vec{y}_{i-1}$, z toho $\underbrace{\vec{y}_i - b_1\vec{y}_1 - \dots - b_{i-1}\vec{y}_{i-1}}_{\neq \vec{0}, \in T \cap S = \{\vec{0}\}, \text{ spor}} = \alpha_1\vec{x}_1 +$

$+\dots + \alpha_s\vec{x}_s, \dim(S + T) = s + t = \dim(S) + \dim(T)$.

2. $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$: Nech $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r)$ je báza v $S \cap T$. $S \cap T$ je podpriestor v S aj v T . Podľa *Steinitzovej vety* doplníme $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r)$ na bázu $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s)$ v S resp. na bázu $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ v T . Teda $\dim(S) = r + s, \dim(T) = r + t$. Máme $S + T = [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t]$. Navyše $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t$ sú lineárne nezávislé, teda tvoria bázu v $S + T$. Nech by boli lineárne závislé. Teda niektorý je lineárna kombinácia tých, čo sú pred ním. Nemôže to byť žiadny spomedzi $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s$ lebo tvoria bázu v S . Teda existuje i :

$$(*) \quad \vec{y}_i = \gamma_1\vec{z}_1 + \dots + \gamma_r\vec{z}_r + \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_s\vec{x}_s + \beta_1\vec{y}_1 + \dots + \beta_{i-1}\vec{y}_{i-1}.$$

Z toho $\underbrace{\vec{y}_i - \beta_1\vec{y}_1 - \dots - \beta_{i-1}\vec{y}_{i-1}}_{\in T} = \underbrace{\gamma_1\vec{z}_1 + \dots + \gamma_r\vec{z}_r + \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_s\vec{x}_s}_{\in S} \in S \cap T \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_1\vec{z}_1 + \dots + \gamma_r\vec{z}_r + \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_s\vec{x}_s = \delta_1\vec{z}_1 + \dots + \delta_r\vec{z}_r \Leftrightarrow (\gamma_1 - \delta_1)\vec{z}_1 + \dots + (\gamma_r - \delta_r)\vec{z}_r + \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_s\vec{x}_s = \vec{0}$. Z toho, že $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s$ sú lineárne nezávislé máme, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$. Teda z (*): $\vec{y}_i = \gamma_1\vec{z}_1 + \dots + \gamma_r\vec{z}_r + \beta_1\vec{y}_1 + \dots + \beta_{i-1}\vec{y}_{i-1}$ spor s tým, že $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ je báza. Teda naozaj $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s)$ je báza v $S + T$. Teda $\dim(S + T) = r + s + t = \dim(S) + r + t - r = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.

Definícia 6.2. Ak S, T sú vektorové podpriestory priestoru V a $S \cap T = \{\vec{0}\}$, tak vektorový podpriestor $S+T$ sa nazýva *direktný súčet* vektorových podpriestorov S a T . ozn. $S \oplus T$.

Dôsledok formuly dimenzie: Ak S, T sú podpriestory konečne generovaného vektorového priestoru V a $S \cap T = \{\vec{0}\}$, tak $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$. Teraz vieme, že ak $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s)$ je báza v S , a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ je báza v T , tak $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t)$ je báza pre $(S \oplus T)$.

Veta 6.3. Nech S, T, P sú vektorové podpriestory priestoru V . Potom P je direktným súčtom S a T ($P = S \oplus T$) práve vtedy, keď každý vektor z P sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z T .

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $P = S \oplus T$. Potom je samozrejme pravda, že každý vektor z P je súčet vektora z S a vektora z T . Nech by existovali dve takéto vyjadrenia $\vec{x} \in P$: $\vec{x} = \vec{s}_1 + \vec{t}_1 = \vec{s}_2 + \vec{t}_2$, $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in S$, $\vec{t}_1, \vec{t}_2 \in T$. Potom $\vec{s}_2 - \vec{s}_1 = \vec{t}_1 - \vec{t}_2 \in (S \cap T) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{s}_1 = \vec{s}_2$ a $\vec{t}_1 = \vec{t}_2$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že každý vektor z P má jediné vyjadrenie v tvare "vektor z S + vektor z T ". Teda $P = S + T$. Teraz nech $\vec{a} \in S \cap T$. Potom $\vec{a} = \underbrace{\vec{a}}_{\in S} + \underbrace{\vec{0}}_{\in T} = \underbrace{\vec{0}}_{\in S} + \underbrace{\vec{a}}_{\in T}$, keďže takéto vyjadrenie je jediné, máme $\vec{a} = \vec{0}$. Dokázali sme, že $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Vcelku: $P = S \oplus T$.

VII. MATICE

Definícia 7.1. Matice typu $k \times s$ nad poľom R je tabuľka (obdĺžniková), v ktorej $k \cdot s$ prvkov z R rozmiestňujeme do k riadkov a s stĺpcov. Všeobecný zápis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ks} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in R$, i —riadkový index, j —stĺpcový index. Matice označujeme: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$. Stručnejší všeobecný zápis: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{k,s}$ alebo len $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ak k, s je jasné z kontextu. Ak $\mathbf{A} = (a_{ij})_{k,s}$ kde $k=s$, tak $\mathbf{A}$ sa volá štvorcová matice stupňa k .

Jednotková matice stupňa n :

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definícia 7.2. Dve matice toho istého typu nad tým istým poľom sa rovnajú, ak na všetkých zodpovedajúcich miestach majú rovnaké prvky. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{k,s}$, $\mathbf{B} = (b_{uv})_{m,n}$ obidve nad $\mathbb{R}$. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ znamená, že $k=m$, $s=n$, $a_{ij} = b_{ij}$ pre všetky $i=1, \dots, k$ a $j=1, \dots, s$.

Označenie. Množina všetkých matic typu $k \times s$ nad $\mathbb{R}$ označíme: $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$.

Definícia 7.3. Ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$, tak definujeme ich súčet ako maticu, ktorú ozn. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; je typu $k \times s$; jej prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca je súčet $a_{ij} + b_{ij}$.

Veta 7.1. $(\mathfrak{M}_{k,s}, +)$ je komutatívna grupa.

Dôkaz. Asociatívnosť operácie $+$ vyplýva z asociatívnosti operácie $+$ v poli $\mathbb{R}$. Neutrálny prvok je matica, ktorej všetky prvky sú $0 \in \mathbb{R}$ tj. tzv. nulová matica. Inverzný prvok k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$. Komutatívnosť vyplýva z komutatívnosti operácie $+$ v poli $\mathbb{R}$.

Definícia 7.4. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$ definujeme α -násobok matice $\mathbf{A}$ ako maticu, ktorú označíme $\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$

Veta 7.2. $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$ s vyššie definovaným sčítaním resp. násobením je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha((a_{ij}) + (b_{ij})) = (\alpha(a_{ij})) + (\alpha(b_{ij})) = \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij})$.

Tvrdenie 7.1. Ak definujeme $\mathbf{E}_{ij} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$ ako maticu, ktorá má v i -tom riadku a j -tom stĺpci 1 a všetky ostatné prvky nulové, tak $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$ je generovaný takýmito maticami $\mathbf{E}_{ij}$, $i=1, \dots, k$ $j=1, \dots, s$. Navyše $\mathbf{E}_{ij}$, $i=1, \dots, k$ $j=1, \dots, s$ sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu priestoru $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Z toho: $\dim(\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})) = k \cdot s$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Potom $\mathbf{A} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq s}} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}$. Teda $\mathbf{E}_{ij}$ nerujú $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Nech $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{ks} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq s}} \alpha_{ij} \mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ a teda $\alpha_{11} = \dots = \alpha_{ks} = 0$.

Definícia 7.5. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica typu $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Riadky matice $\mathbf{A}$ chápme teraz ako prvky z $\mathbb{R}^s$. Označíme S_A vektorový podpriestor $\mathbb{R}^s$ generovaný riadkami matice $\mathbf{A}$. $S_A = [(a_{11}, \dots, a_{1s}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{ks})]$.

Definícia 7.6. *Elementárna riadková operácia* na matici je každá z týchto úprav (ERO):

1. Vzájomná výmena dvoch riadkov v matici.
2. Vynásobenie ľubovoľného riadku nenulovým skalárom.
3. Prirátanie ľubovoľného násobku riadku k inému riadku.

Definícia 7.7. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Hovoríme, že matica $\mathbf{B}$ je *riadkovo ekvivalentná* s $\mathbf{A}$ (píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$) ak $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A}$ konečným počtom ERO.

Veta 7.3. Relácia riadkovej ekvivalentnosti $\approx$ je relácia ekvivalencie na $\mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$.

Dôkaz.

1. *Reflexívnosť:* $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$ triviálne.
2. *Symetrickosť:* Nech $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$. Každá ERO sa dá vrátiť naspäť (má inverznú). $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
3. *Tranzitívnosť:* $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}, \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \approx \mathbf{C}$ z definície jasné.

Veta 7.4. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Ak $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ tak $S_A = S_B$.

Dôkaz. Stačí dokázať pre prípad, že matica $\mathbf{B}$ vznikla z $\mathbf{A}$ vykonaním práve jednej ERO.

1. Nech $\mathbf{B}$ vznikla z $\mathbf{A}$ vzájomnou výmenou i -teho a j -teho riadku ($i \leq j$). Riadky v $\mathbf{A}$ označme $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

Teda $S_B = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_k]$. Je jasné, že je to to isté ako lineárny obal $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

2. Nech $\mathbf{B}$ vznikla z $\mathbf{A}$ tak, že sme i -tý riadok $\vec{x}_i$ vynásobili $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Teda $S_B = [\vec{x}_1, \dots, \alpha \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_k]$. To je to isté ako $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_k] = S_A$.

3. $\mathbf{B}$ vznikla z $\mathbf{A}$ pripočítaním α -násobok prvého riadku k druhému. tj. $\alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Teda $S_B = [\vec{x}_1, \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_k]$. Ale $[\vec{x}_1, \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = S_A$. Naozaj: inklúzia $\subset$ je zrejmá. Majme ľubovoľnú lineárnu kombináciu:

$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 (\vec{x}_2 + \alpha \vec{x}_1) - \alpha \alpha_2 \vec{x}_1 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = (\alpha_1 - \alpha \alpha_2) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\vec{x}_2 + \alpha \vec{x}_1) + \alpha_3 \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2 + \alpha \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

Otázka. Platí aj obrátené tvrdenie vo vete 7.4 ?

Odpoveď: Áno.

Definícia 7.8. Hovoríme, že matica $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$

je v *redukovanom trojuholníkovom tvare*, ak:

1. Prvý nenulový prvok (tzv. vedúci prvok) každého nenulového riadku je 1.
2. V stĺpci obsahujúcom vedúci prvok niektorého riadku sú ostatné prvky nulové.
3. Ak a_{ij} a a_{pq} sú vedúce prvky i -teho a p -teho riadku a pritom $i < p$, tak potom $j < q$.
4. Nulové riadky (ak existujú) sú pod všetkými nenulovými.

Príklad.

1. Matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nie je v RTM (redukovaná trojuholníková matica).
2. Matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je v RTM.

Poznámka. Ak $\mathbf{A}$ spĺňa len podmienky 3., 4. tak je to matica v tzv. trojuholníkovom tvare. Redukovaná trojuholníková matica typu $k \times k$ je buď nulová, alebo ak neobsahuje nulové riadky, tak je jednotková matica $\mathbf{I}_k$.

Veta 7.5. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$ je RTM. Potom jej nenulové riadky sú lineárne nezávislé. (platí to už o trojuholníkových maticiach).

Dôkaz. Nech $\mathbf{A}$ je RTM a nech jej nenulové riadky sú $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in \mathbb{R}^s$. Vedúce prvky týchto riadkov nech sú v stĺpcoch $t_1 < t_2 < \dots < t_r$. Nech by boli $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$ lineárne závislé. Teda existuje $i \in \{1, \dots, r\}$: $\vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \vec{x}_{i-1}$. Ale t_i -tá zložka v $\vec{x}_i$ je 1, kým $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}$ majú t_i -tú zložku nulovú. Teda má platiť $1 = 0$ spor.

Príklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -8 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{15} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

Veta 7.6. Každá matica je riadkovo ekvivalentná s nejakou RTM-ou.

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na počet riadkov v matici.

1° Ak $\mathbf{A}$ má jeden riadok, tak ak je nulový tak OK.

Keď nenulový: $(0, \dots, 0, c \neq 0, \dots) \approx (0, \dots, 0, 1, \dots)$ RTM.

2° Predpokladajme, že veta platí pre všetky matice, ktoré majú k riadkov. Nech $\mathbf{A}$ je matica, ktorá má $k+1$ riadkov. Ak $\mathbf{A}$ je nulová, tak OK. Nech $\mathbf{A} \neq 0$. Nech jej prvý

nenulový stĺpec je p -tý. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ip} \neq 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$. Je jasné, že $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & b_{1p} & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \approx$

$\approx \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & c_{1,p+1} & \dots & c_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & c_{2,p+1} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{k+1,p+1} & \dots & c_{k+1,s} \end{pmatrix} = \mathbf{C}$. Ozn. $\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c_{2,p+1} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k+1,p+1} & \dots & c_{k+1,s} \end{pmatrix}$. Matica $\mathbf{C}'$ má

iba k riadkov, konečným počtom ERO sa upraví na RTM ozn. ju $\mathbf{D}'$. Teda:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & d_{1,p+1} & d_{1,p+2} & \dots & d_{1,s-1} & d_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d'_{2,p+1} & d'_{2,p+2} & \dots & d'_{2,s-1} & d'_{2s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d'_{3,p+2} & \dots & d'_{3,s-1} & d'_{3s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d'_{k,s-1} & d'_{ks} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d'_{k+1,s} \end{pmatrix}.$$

Definícia 7.9. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(\mathbb{R})$. Potom číslo $\dim(S_A)$ sa nazýva *hodnota* matice $\mathbf{A}$, ozn. $h(\mathbf{A}) = \dim(S_A)$.

Platí: $h(\mathbf{A})$ = počet lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{A}$.

Tvrdenie 7.2. Ak $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, tak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Dôkaz. Keďže každú maticu $\mathbf{A}$ môžeme konečným počtom ERO upraviť na RTM $\mathbf{A}' \approx \mathbf{A}$, tak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}')$ = počet nenulových riadkov v $\mathbf{A}'$.

Príklad. Výpočet hodnoty:

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{A}) = 2.$$

$$2. \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{B}) = 1.$$

Veta 7.7. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ sú RTM. Ak $S_A = S_B$, tak $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Dôkaz. Máme $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = r$. Nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ resp. $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sú nenulové riadky v $\mathbf{A}$ resp. v $\mathbf{B}$. Nech teraz $s_1 < s_2 < \dots < s_r$ sú stĺpcové indexy vedúcich prvkov riadkov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$, podobne nech $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ sú stĺpcové indexy vedúcich prvkov riadkov $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$. Keďže $S_A = S_B$, máme $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r] = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r] \in \mathbb{R}^s$. Každé b_j má jediné vyjadrenie v tvare $\vec{b}_j = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_r \vec{a}_r$. Pre $\vec{b}_j$ nech q je najmenšie také, že $\alpha_q \neq 0$. Teda $\vec{b}_j = \alpha_q \vec{a}_q + \dots + \alpha_r \vec{a}_r$. b_j má prvú nenulovú zložku (t_j)-tú. Vektor vpravo má prvú nenulovú zložku ($=\alpha_q$) s_q -tú. Z rovnosti dostávame, že $1 = \alpha_q, t_j = s_q$. Pre $s_1 < s_2 < \dots < s_r, t_1 < t_2 < \dots < t_r$ máme, že každé s_i sa

rovná dákému t_v . To je možné iba tak, že $s_1=t_1, \dots, s_r=t_r$. Teda máme, že $\vec{b}_j = a_q + \alpha_{q+1}\vec{a}_{q+1} + \dots + \alpha_r\vec{a}_r$. V RTM sú v stĺpci obsahujúcom vedúci prvok riadku ostatné prvky 0, preto: $1 \cdot \alpha_{q+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{q+1} = 0$. Podobne pre ostatné, tj. $\alpha_{q+2} = \dots = \alpha_r = 0$. Teda pre $\forall q : \vec{b}_q = \vec{a}_q$. Záver $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Dôsledok. Každá matica je riadkovo ekvivalentná s jedinou RTM.

Dôkaz. Nech $\mathbf{A}$ je ľubovoľná matica. Vieme, že existuje RTM $\mathbf{A}'$: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$. Nech by aj $\mathbf{B}'$ bola RTM, $\mathbf{B}' \approx \mathbf{A}$. Potom $\mathbf{A}' \approx \mathbf{A} \approx \mathbf{B}'$, teda $\mathbf{A}' \approx \mathbf{B}'$, teda $S_{A'} = S_{B'}$. Z predchádzajúcej vety vieme, že $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$.

Veta 7.8. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ sú ľubovoľné. Potom platí: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \Leftrightarrow S_A = S_B$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Veta 7.7

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $S_A = S_B$. Nech $\mathbf{A}'$ je RTM taká, že $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$. Nech $\mathbf{B}'$ je RTM taká, že $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}'$. Potom $S_{A'} = S_A = S_B = S_{B'}$. Teda $S_{A'} = S_{B'}$. Ale $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ sú RTM, teda z Vety 7.7: $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$. $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}' = \mathbf{B}' \approx \mathbf{B}$, teda $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$.

Tvrdenie 7.4. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$. Potom $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$ sa dajú konečným počtom ERO upraviť na tú istú RTM.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$. Nech $\mathbf{A}'$ je RTM, $\mathbf{B}'$ je RTM, $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$ a $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}'$. Potom $S_{A'} = S_A = S_B = S_{B'}$. Keďže $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ sú RTM, máme že $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\mathbf{A}, \mathbf{B}$: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$, $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}'$ kde $\mathbf{A}'$ je RTM. Z toho: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}' \approx \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \approx \mathbf{B}$.

Príklad. Rozhodnite, či reálne matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sú riadkovo ekvivalentné. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sú riadkovo ekvivalentné.

VIII. LINEÁRNE ZOBRAZENIE

Definícia 8.1.

Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$. Potom *lineárne zobrazenie* z V do W je zobrazenie $f : V \rightarrow W$ také, že $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$ pre $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

Tvrdenie 8.1. Ak $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Dôkaz. $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$ z toho: $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Príklady.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(a, b) = (2a + b, a + b - 1, a + 2b)$ nie je lineárne zobrazenie, lebo $f(\vec{0}) = f(0, 0) = (0, -1, 0) \neq \vec{0}$.
2. $p_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ je lineárne zobrazenie. (Nazýva sa projekcia na prvú zložku). $p_1(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) = p_1(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha p_1(x_1, x_2, x_3) + \beta p_1(y_1, y_2, y_3)$.
3. $\mathcal{O} : V \rightarrow W$, $\mathcal{O}(\vec{v}) = \vec{0} \in W$ pre všetky $\vec{v} \in V$ je lineárne zobrazenie.
4. $id_V : V \rightarrow V$, $id_V(\vec{x}) = \vec{x}$ je lineárne zobrazenie.
5. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (2x, 3x - y)$ je lineárne zobrazenie.

Veta 8.1. *Nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.*

1. *Ak $S \subset V$ je vektorový podpriestor, tak $f(S) \subset W$ je vektorový podpriestor vo W . (Špeciálne: $\text{Im}(f) = f(V)$ je vektorový podpriestor vo W .)*
2. *Ak $P \subset W$ je vektorový podpriestor vo W , tak jeho vzor pri zobrazení f je vektorový podpriestor. tj.: $f^{-1}(P) = \{\vec{a} \in V, f(\vec{a}) \in P\} \subset V$. (Špec. $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V, f(\vec{x}) = \vec{0}\} = \text{Ker}(f)$, tj. jadro lineárneho zobrazenia je vektorový podpriestor vo V .)*

Dôkaz.

1. $f(\vec{0}) = \vec{0} \in f(S) \Rightarrow f(S) \neq \emptyset$. Kritérium vektorového podpriestoru: Nech $\vec{a}, \vec{b} \in f(S)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ chceme ukázať, že $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in f(S)$. Máme $\vec{a} = f(\vec{x})$, $\vec{b} = f(\vec{y})$ pre dáke $\vec{x}, \vec{y} \in S$. Potom $f(\underbrace{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}_{\in S}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. A teda $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in f(S)$. Ukázali sme, že

$f(S)$ je vektorový podpriestor.

2. $\vec{0} \in P$, pričom $f(\vec{0}) = \vec{0} \in P \Rightarrow \vec{0} \in f^{-1}(P)$, preto $f^{-1}(P) \neq \emptyset$. Použijeme kritérium vektorového podpriestoru: Nech $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(P)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Chceme ukázať, že $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in f^{-1}(P)$. Rátajme: $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \underbrace{\alpha f(\vec{x})}_{\in P} + \underbrace{\beta f(\vec{y})}_{\in P}$, preto $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in f^{-1}(P)$.

Veta 8.2. *Lineárne zobrazenie $f : V \rightarrow W$ je injektívne $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. f je surjektívne $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = W$.*

Dôkaz. Podobne ako pre grupy.

Definícia 8.2. Lineárne zobrazenie $f : V \rightarrow W$ sa nazýva *lineárny izomorfizmus* ak f je bijektívne. Ak pre dané vektorový priestory V, W existuje lineárny izomorfizmus $g : V \rightarrow W$, tak hovoríme, že vektorový priestor V je lineárne izomorfný s vektorovým priestorom W . Píšeme: $V \cong W$

Veta 8.3. *Ak $f : V \rightarrow W$ je lineárny izomorfizmus, tak aj $f^{-1} : W \rightarrow V$ je lineárny izomorfizmus.*

Dôkaz. Vieme, že $f^{-1} : W \rightarrow V$ existuje a je bijekcia. Chceme ukázať, že je aj lineárne. Nech $\vec{a}, \vec{b} \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nech $\vec{x} \in V$ je ten jediný, pre ktorý $f(\vec{x}) = \vec{a}$, podobne $\vec{y} \in V$ jediný, pre ktorý $f(\vec{y}) = \vec{b}$. Potom: $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Z toho: $f^{-1}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha f^{-1}(\vec{a}) + \beta f^{-1}(\vec{b})$.

Poznámka. Teda ak $V \cong W$, tak aj $W \cong V$.

Veta 8.4. *Ak $f : V \rightarrow W$, $g : W \rightarrow S$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f : V \rightarrow S$ je lineárne zobrazenie. Špeciálne zloženie dvoch lineárnych izomorfizmov je lineárny izomorfizmus.*

Dôkaz. $g \circ f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = g(\alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})) = \alpha \cdot g \circ f(\vec{x}) + \beta \cdot g \circ f(\vec{y})$.

Príklad. V = vektorový priestor orientovaných úsečiek v O_{xy} so začiatkom v O . $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$. $f(\text{orient. úsečky}) = (1.\text{súr. konc.bodu}, 2.\text{súr.konc. bodu})$. $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineárny izomorfizmus.

Nech S je vektorový podpriestor priestoru $V(\mathbb{R})$. Už vieme, že V/S je komutatívna grupa, s operáciou $+$: $[\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{x} + \vec{y}]$. Definujme zobrazenie $\mathbb{R} \times V/S \rightarrow V/S$, $(\alpha, [\vec{x}]) \mapsto \alpha[\vec{x}]$, kde $\alpha[\vec{x}] = [\alpha\vec{x}]$. Je to dobrá definícia, lebo ak $[\vec{x}] = [\vec{y}]$, tak vieme, že

$\vec{x}-\vec{y}\in S$. Potom, keďže S je vektorový podpriestor, máme pre $\forall \alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha(\vec{x}-\vec{y}) = \alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}\in S$. Teda $[\alpha\vec{x}] = [\alpha\vec{y}]$. Potom V/S je vektorový podpriestor nad $\mathbb{R}$. (napr. overme $\alpha([\vec{x}]+[\vec{y}])=\alpha[\vec{x}+\vec{y}]=[\alpha(\vec{x}+\vec{y})]=[\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}]=[\alpha\vec{x}]+[\alpha\vec{y}]=\alpha[\vec{x}]+\alpha[\vec{y}]$, podobne sa overia ostatné axiomy vektorový podpriestoru.)

Príklady.

1. $V/V=\{\vec{0}\}$
2. Nech $f : V\rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Vieme, že $\text{Ker}(f)$ je vektorový podpriestor vo V , máme priestor $V/\text{Ker}(f)$.

Definícia 8.3. Ak V je vektorový priestor nad R a $S\subset V$ je vektorový podpriestor, tak V/S sa nazýva *faktorový* vektorový priestor.

Veta 8.5. Nech V je konečne generovaný vektorový priestor nad R a nech $S\subset V$ je vektorový podpriestor. Potom $\dim(V/S)=\dim(V)-\dim(S)$.

Dôkaz.

Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$ je báza v S . Doplňme ju na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n)$ priestoru V . Potom vektorový priestor V/S je generovaný vektormi $[[\vec{b}_{r+1}], \dots, [\vec{b}_n]]$. Pre ľubovoľný $[\vec{x}]\in V/S$. Máme $\vec{x}\in V$, teda $\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_r\vec{a}_r+\beta_{r+1}\vec{b}_{r+1}+\dots+\beta_n\vec{b}_n$ pre $\alpha_i, \beta_i\in R$. Z toho: $[\vec{x}]=[\alpha_1\vec{a}_1]+\dots+[\alpha_r\vec{a}_r]+[\beta_{r+1}\vec{b}_{r+1}]+\dots+[\beta_n\vec{b}_n]=\alpha_1[\vec{a}_1]+\dots+\alpha_r[\vec{a}_r]+\beta_{r+1}[\vec{b}_{r+1}]+\dots+\beta_n[\vec{b}_n]$, teda $\vec{0}\in V/S$, $[\vec{x}]=\beta_{r+1}[\vec{b}_{r+1}]+\dots+\beta_n[\vec{b}_n]$. Teda $V/S\subset[[\vec{b}_{r+1}], \dots, [\vec{b}_n]]$, obrátená inklúzia je zrejma. Navyše $[\vec{b}_{r+1}], \dots, [\vec{b}_n]\in V/S$ sú lineárne nezávislé, lebo nech $\delta_{r+1}[\vec{b}_{r+1}]+\dots+\delta_n[\vec{b}_n]=\vec{0}\in V/S$. Potom $[\delta_{r+1}\vec{b}_{r+1}+\dots+\delta_n\vec{b}_n]=[\vec{0}]$, teda $\delta_{r+1}\vec{b}_{r+1}+\dots+\delta_n\vec{b}_n\in S$. Potom $\delta_{r+1}\vec{b}_{r+1}+\dots+\delta_n\vec{b}_n=\gamma_1\vec{a}_1+\dots+\gamma_r\vec{a}_r$, z toho: $\delta_{r+1}\vec{b}_{r+1}+\dots+\delta_n\vec{b}_n-\gamma_1\vec{a}_1-\dots-\gamma_r\vec{a}_r=\vec{0}\in V$. Ale $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n$ sú nezávislé, preto $\delta_{r+1}=\dots=\delta_n=0$. Ukázali sme, že $([\vec{b}_{r+1}], \dots, [\vec{b}_n])$ je báza vo V/S , teda $\dim(V/S)=n-r$.

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech $f : V\rightarrow W$ je surjektívne lineárne zobrazenie. Potom $V/\text{Ker}(f)\cong W$.

Dôkaz. Definujme $\varphi : V/\text{Ker}(f)\rightarrow W$, $\varphi([\vec{x}])=f(\vec{x})$. Z vety o faktorovom izomorfizme pre grupy vieme, že φ je dobre definovaný homomorfizmus abelovských grúp; tiež φ je bijekcia. Aby sme ukázali, že φ je aj lineárny izomorfizmus, stačí ukázať, že $\varphi(\alpha[\vec{x}])$ pre $\alpha\in R$, $[\vec{x}]\in V/\text{Ker}(f)$. Takto: $\varphi(\alpha[\vec{x}])=\varphi([\alpha\vec{x}])=f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})=\alpha\varphi([\vec{x}])$. Zistili sme, že φ je lineárny izomorfizmus medzi $V/\text{Ker}(f)\cong W$.

Príklad. $p_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$ je lineárne zobrazenie, je aj surjektívne. $\text{Ker}(p_1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Z vety: $\mathbb{R}^3/\{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$

Veta 8.6. (základná veta o lineárnych zobrazeniach) Nech V je konečne generovaný vektorový priestor nad poľom R a nech W je vektorový priestor nad R . Potom existuje jediné lineárne zobrazenie $f : V\rightarrow W$ také, že f zobrazí bazové vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ priestoru V na predpísané obrazy $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\in W$, teda také, že $f(\vec{a}_1)=\vec{b}_1, \dots, f(\vec{a}_n)=\vec{b}_n$. Zobrazenie f funguje takto: ak $\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$, tak $f(\vec{x})=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n$.

Dôkaz.

Jednoznačnosť: Ak také f existuje, tak jediné: nech by $f, g : V\rightarrow W$ boli dve

také lineárne zobrazenia. Teda $f(\vec{a}_1)=\vec{b}_1, \dots, f(\vec{a}_n)=\vec{b}_n, g(\vec{a}_1)=\vec{b}_1, \dots, g(\vec{a}_n)=\vec{b}_n$. Ľubovoľný $x \in V$ má jednoznačné vyjadrenie: $\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$. Z lineárnosti f a g : $f(\vec{x})=f(\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n)=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n$ a $g(\vec{x})=g(\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n)=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n$. Teda $f=g$.

Existencia: Videli sme, že ak také f existuje, tak pre $\forall x \in V, \vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ musí byť $f(\vec{x})=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n$. Teda definujeme $f: V \rightarrow W$ takto: $f(\vec{x})=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n$, ak $\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$. Potom $f(\vec{a}_1)=\vec{b}_1, \dots, f(\vec{a}_n)=\vec{b}_n$; treba už len overiť lineárnosť $f: \vec{x}, \vec{y} \in V, \alpha, \beta \in R, \vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n, \vec{y}=\beta_1\vec{a}_1+\dots+\beta_n\vec{a}_n \Rightarrow f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=f(\alpha(\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n)+\beta(\beta_1\vec{a}_1+\dots+\beta_n\vec{a}_n))=f((\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\vec{a}_1+\dots+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)\vec{a}_n)=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\vec{b}_1+\dots+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)\vec{b}_n=\alpha(\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n)+\beta(\beta_1\vec{b}_1+\dots+\beta_n\vec{b}_n)=\alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})$.

Lineárne zobrazenia $R^k \rightarrow R^s$, kde R je pole.

Definícia 8.4. Nech $f: R^k \rightarrow R^s$ je lineárne zobrazenie. Zo základnej vety o lineárnych zobrazeniach vieme, že f je úplne určené obrazmi básových vektorov. Špeciálne: obrazmi štandardných básových vektorov $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \in R^k$. Ak tieto obrazy (tj. $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k) \in R^s$) zapíšeme (poradie zachováme) do matice, tak dostaneme maticu typu $k \times s$ nad poľom R . Ozn.: $\mathbf{M}_f$. Matica $\mathbf{M}_f$ sa nazýva matica lineárneho zobrazenia f . $f(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{1s}) \in R^s, \dots, f(0, 0, \dots, 1) =$

$$= (a_{k1}, \dots, a_{ks}) \Rightarrow \mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R).$$

Príklad. $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2), \mathbf{M}_g = \begin{pmatrix} g(1,0) \\ g(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Definícia 8.5. Nech je daná matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$. Potom zo základnej vety o lineárnych zobrazeniach vieme, že existuje jediné zobrazenie $R^k \rightarrow R^s$, ktoré $\vec{e}_1 \in R^k$ zobrazí na prvý riadok matice $\mathbf{A}$, atď, $\vec{e}_k$ na k -tý riadok matice $\mathbf{A}$. Toto lineárne zobrazenie označíme $f_A: R^k \rightarrow R^s$; nazýva sa lineárne zobrazenie patriace k matici $\mathbf{A}$.

Príklad.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), g_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g_B(1, 0) = (1, -1, 2), g_B(0, 1) = (1, 1, 3).$$

$$g_B(x_1, x_2) = g_B((1, 0)x_1 + (0, 1)x_2) = x_1(1, -1, 2) + x_2(1, 1, 3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2). \text{ Je jasné: } \mathbf{M}_{g_B} = \mathbf{B}$$

Veta 8.7. Priradenie matice lineárnemu zobrazeniu $R^k \rightarrow R^s$ definuje bijektívnu korešpondenciu medzi množinou všetkých lineárnych zobrazení $R^k \rightarrow R^s$ a množinou matíc $\mathfrak{M}_{k,s}(R)$.

Dôkaz. Jasné!

Nech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sú lineárne zobrazenia. Potom $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je tiež lineárne zobrazenie. Nech $\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{M}_g = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$. Aký je vzťah medzi $\mathbf{M}_{g \circ f}$ na jednej strane a maticami $\mathbf{M}_g, \mathbf{M}_f$ na druhej strane?

$$\begin{aligned} \text{Rátame: } f(1, 0) &= (a_{11}, a_{12}), f(0, 1) = (a_{21}, a_{22}), g(1, 0) = (b_{11}, b_{12}, b_{13}), g(0, 1) = (b_{21}, b_{22}, b_{23}), \\ g \circ f(1, 0) &= g(a_{11}(1, 0) + a_{12}(0, 1)) = a_{11}(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + a_{12}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}, a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}), g \circ f(0, 1) = g(a_{21}(1, 0) + a_{22}(0, 1)) = \\ &= \dots = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}, a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}), \mathbf{M}_{g \circ f} = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_g. \end{aligned}$$

Tvrdenie 8.2. Ak $f: R^k \rightarrow R^s$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{M}_f = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ a $g: R^s \rightarrow R^t$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{M}_g = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{s,t}(R)$, tak lineárne zobrazenie $g \circ f: R^k \rightarrow R^t$ má maticu $\mathbf{M}_{g \circ f} \in \mathfrak{M}_{k,t}(R)$, ktorej prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca dostaneme ako skalárny súčin i -teho riadku z $\mathbf{M}_f$ a j -teho stĺpca z $\mathbf{M}_g$.

Definícia 8.6. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$, $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{s,t}(R)$; potom *súčin matic* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ ozn. $\mathbf{AB}$ sa definuje takto: $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,t}(R)$, kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{is}b_{sj}$.

Tvrdenie 8.3. Ak $f: R^k \rightarrow R^s$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{M}_f$ a $g: R^s \rightarrow R^t$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{M}_g$, tak $\mathbf{M}_{g \circ f} = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_g$

Príklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Niektoré vlastnosti súčinu matic.

1. $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,n}(R) \Rightarrow \mathbf{I}_k \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_s$ kde $\mathbf{I}_s = \mathbf{M}_{id(R^s)}$.
2. $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}$, $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{s,t}$, $\mathbf{C} \in \mathfrak{M}_{t,z}$ potom $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Dôkaz: $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{f_A}$, $\mathbf{B} = \mathbf{M}_{f_B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{M}_{f_C}$. Potom $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{M}_{f_A}(\mathbf{M}_{f_B}\mathbf{M}_{f_C}) = \mathbf{M}_{f_A}(\mathbf{M}_{f_C \circ f_B}) = \mathbf{M}_{(f_C \circ f_B) \circ f_A} = \mathbf{M}_{f_C(f_B \circ f_A)} = \mathbf{M}_{f_B \circ f_A} \mathbf{M}_{f_C} = (\mathbf{M}_{f_A} \mathbf{M}_{f_B}) \mathbf{M}_{f_C}$.
3. distributivita: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, keď to má zmysel, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
4. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ napr.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, ale $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. $(\mathfrak{M}_{n,n}(R), +, \bullet, 1 = \mathbf{I}_n)$ je okruh s 1.

Definícia 8.7. *Elementárna matica* stupňa k patriaca k danej ERO je matica, ktorú z $\mathbf{I}_k$ dostaneme tak, že na $\mathbf{I}_k$ urobíme túto ERO.

Príklad. ERO- prirátanie α -násobku druhého riadku k prvému. Príslušná elementárna matica stupňa 3 je: $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Veta 8.8. Nech $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ vznikne z $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ vykonaním práve jednej ERO. Potom ak $\mathbf{E}$ je elementárna matica stupňa k patriaca k tejto ERO, tak $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{C} \in \mathfrak{M}_{a,b}(R)$ je ľubovoľná matica, tak i -tý riadok matice $\mathbf{C}$ sa rovná

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mathbf{C} = \vec{e}_i \mathbf{C}, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} c_{i1} & \dots & c_{ib} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ib} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{a1} & \dots & c_{ab} \end{pmatrix} = (c_{i1}, \dots, c_{ib}).$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{k,s}$. Nech napr. ERO spočíva v tom, že α -násobok j -teho riadku prirátame

$$\text{k prvému. Teda: } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{j1} & \dots & a_{1s} + \alpha a_{js} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{pmatrix}. \text{ Elementárna matica } \mathbf{E} \text{ vznikne z } \mathbf{I}_k$$

vykonaním tej istej ERO. Teda riadky matice $\mathbf{E}$ budú $\vec{e}_1 + \alpha \vec{e}_j, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$. Prvý riadok v $\mathbf{EA}$ je $\vec{e}_1(\mathbf{EA}) = (\vec{e}_1 \mathbf{E})\mathbf{A} = (\vec{e}_1 + \alpha \vec{e}_j)\mathbf{A} = \vec{e}_1 \mathbf{A} + \alpha \vec{e}_j \mathbf{A} = (a_{11}, \dots, a_{1s}) + \alpha(a_{j1}, \dots, a_{js}) = (a_{11} + \alpha a_{j1}, \dots, a_{1s} + \alpha a_{js}) =$ prvý riadok v $\mathbf{B}$. Druhý riadok v $\mathbf{EA}$ je $\vec{e}_2(\mathbf{EA}) = (\vec{e}_2 \mathbf{E})\mathbf{A} = \vec{e}_2 \mathbf{A} = (a_{21}, \dots, a_{2s}) =$ druhý riadok v $\mathbf{B}$ podobne všetky ostatné. Teda $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$.

Príklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. K druhému riadku prirátame prvý.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{EA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Tvrdenie 8.4. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$, nech $f_A : R^k \rightarrow R^s$ je lineárne zobrazenie matricou $\mathbf{A}$. Potom $f_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{A}$ pre všetky $(x_1, \dots, x_k) \in R^k$. Pre lineárne zobrazenie $g : R^k \rightarrow R^s$ máme: $g(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_g$ pre všetky $(x_1, \dots, x_k) \in R^k$.

Dôkaz. Zo základnej vety o lineárnych zobrazeniach vieme, že g je úplne určené obrazmi: $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$. Predpis $h(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_g$ definuje lineárne zobrazenie z $R^k \rightarrow R^s$. $h(\alpha(x_1, \dots, x_k) + \beta(y_1, \dots, y_k)) \cdot \mathbf{M}_g = \alpha(x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_g + \beta(y_1, \dots, y_k) \cdot \mathbf{M}_g = \alpha h(x_1, \dots, x_k) + \beta h(y_1, \dots, y_k)$. $g(\vec{e}_1) = 1$. riadok matice $\mathbf{M}_g$. $h(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \cdot \mathbf{M}_g = 1$. riadok v $\mathbf{M}_g$.

Všeobecne: $g(\vec{e}_i) = i$ -tý riadok v $\mathbf{M}_g$. $h(\vec{e}_i) = \vec{e}_i \mathbf{M}_g$ pre $i = 1, \dots, k$. Z toho: $h = g$, a teda $g(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_g$.

Príklad. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, -x_1)$, $\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} f(1,0) \\ f(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-x_1 + x_2, -x_1).$$

Poznámka. Prvky z R^k chápme ako riadky. Ale niekedy sa prvky z R^k chápu aj ako stĺpce. Potom pri takom chápaní sa matica lineárneho zobrazenia $f : R^k \rightarrow R^s$

definuje ako matica $\widetilde{\mathbf{M}}_f$ je typu $s \times k$ nad R , ktorej i -tý stĺpec je $f \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$g : R^k \rightarrow R^s, \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = g(x_1, \dots, x_k) = \widetilde{\mathbf{M}}_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Definícia 8.8. $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ k nej *transponovaná* matica je matica

$\mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{s,k}(R)$ pričom $(a_{ij}^T) = a_{ji}$. Teda $\mathbf{A}^T$ dostaneme z $\mathbf{A}$ tak, že "vymeníme riadky za stĺpce".

$$\text{Príklad. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 8.5. Ak $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{s,t}(R)$, tak $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Dôkaz. Prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca v $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ je $\sum_{p=1}^s b_{ip}^T a_{pj}^T = \sum_{p=1}^s a_{jp} b_{pi}$.

Prvok z i -teho riadku a j -teho stĺpca v $(\mathbf{AB})^T$ = prvok j -teho riadku a i -teho stĺpca v $\mathbf{AB}$, teda $\sum_{p=1}^s a_{jp} b_{pi}$.

Poznámka. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Injektívnosť a surjektívnosť lineárnych zobrazení.

$f : V \rightarrow W$ vieme, že f je injektívne $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, f je surjektívne $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = f(V) = W$.

Veta 8.9. Nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ je báza vo V . Potom:

1. f je injektívne $\Leftrightarrow f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)$ sú lineárne nezávislé.
2. f je surjektívne $\Leftrightarrow [f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)] = W$.

Dôkaz.

1. $\Rightarrow$: f je injektívne. Nech $\alpha_1 f(\vec{a}_1) + \dots + \alpha_n f(\vec{a}_n) = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\alpha_i = 0$. Z toho: $f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) = f(\vec{0})$. Podľa predpokladu: $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$, z lineárnej nezávislosti $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \Rightarrow \forall \alpha_i = 0$.

$\Leftarrow$: Nech $\forall f(\vec{a}_i)$ sú lineárne nezávislé. Nech $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Teda $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Máme jednoznačne $\vec{x} = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$. Potom $f(\vec{x}) = \beta_1 f(\vec{a}_1) + \dots + \beta_n f(\vec{a}_n)$, keďže: $f(\vec{x}) = \vec{0} : f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)$ sú lineárne nezávislé máme, že $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ a teda $\vec{x} = \vec{0}$. Preto $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, teda f je injektívne.

2. $\Rightarrow$: Predpokladajme, že f je surjektívne. Nech $\vec{y} \in W$ je ľubovoľný. Zo surjektívnosti: existuje $\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{y}$. Máme, $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$, teda $f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) = \vec{y} \Rightarrow \alpha_1 f(\vec{a}_1) + \dots + \alpha_n f(\vec{a}_n) = \vec{y}$. Takže $\vec{y} \in [f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)]$ máme $W \subset [f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)]$. Obrátená inklúzia je zrejmá.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $W = [f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)]$. Nech $\vec{b} \in W$ je ľubovoľný, potom $\vec{b} = \beta_1 f(\vec{a}_1) + \dots + \beta_n f(\vec{a}_n) = f(\underbrace{\beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_n \vec{a}_n}_{\in V})$. $\vec{b}$ má vzor f je surjektívne.

Dôsledok. Ak V a W sú konečne generované vektorový priestory nad R , tak lineárne zobrazenie $f : V \rightarrow W$ je lineárny izomorfizmus $\Leftrightarrow f$ zobrazuje bázu priestoru V na bázu priestoru W .

Poznámka. Ak $V \cong W$, tak $\dim(V) = \dim(W)$.

Dôsledok.

Každý n -rozmerný ($n \geq 1$) vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ je lineárne izomorfný s $\mathbb{R}^n$.

Dôkaz. Nech $V \neq \{\vec{0}\}$ má nejakú bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. V $\mathbb{R}^n$ zoberme štandardnú bázu $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Zo základnej vety o lineárnych zobrazeniach vieme, že existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ také, že $f(\vec{a}_i) = \vec{e}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Podľa predchádzajúceho dôsledku f je lineárny izomorfizmus, teda $V \cong \mathbb{R}^n$.

Veta 8.10. Nech $f : R^k \rightarrow R^s$ je lineárne zobrazenie. Potom:

1. f je injektívne $\Leftrightarrow h(\mathbf{M}_f) = k$.
2. f je surjektívne $\Leftrightarrow h(\mathbf{M}_f) = s$.
3. f je lineárny izomorfizmus $\Leftrightarrow k = s$ a $h(\mathbf{M}_f) = k$.

Dôkaz. $\mathbf{M}_f \in \mathfrak{M}_{k,s}(R)$ má riadky $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k)$. To znamená, že $f : R^k \rightarrow \text{Im}(f)$ je surjekcia, teda z vety 8.9 vyplýva, že priestor $\text{Im}(f)$ je generovaný $\text{Im}(f) = [f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k)]$. Teda $\dim(\text{Im}(f)) = \dim[f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k)] = h(\mathbf{M}_f)$. Z vety o faktorovom izomorfizme: $R^k / \text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$. Teda $k - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Im}(f)) = h(\mathbf{M}_f)$.

1. f je injektívne $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim\{\text{Ker}(f)\} = 0 \Leftrightarrow h(\mathbf{M}_f) = k$.
2. f je surjektívne $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = R^s \Leftrightarrow [f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)] = R^s \Leftrightarrow \dim[f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k)] = s = h(\mathbf{M}_f)$.

Lema 8.1.

Nech S je vektorový podpriestor priestoru V . Potom $S=V \Leftrightarrow \dim(S)=\dim(V)$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Ak $S=V$, tak $\dim(S)=\dim(V)$

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\dim(S)=\dim(V)$. Nech teraz $S \neq V$. Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ je báza v S . Existuje $\vec{x} \in V-S$. Potom vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{x}$ sú lineárne nezávislé, a teda $\dim(V)$ je aspoň $p+1$, kým $\dim(S)=p$; spor s tým, že $\dim(S)=\dim(V)$.

Definícia 8.9. Lineárne zobrazenie $f : R^k \rightarrow R^k$ sa volá *transformácia* priestoru R^k . Lineárna transformácia $f : R^k \rightarrow R^k$ sa nazýva *regulárna*, ak f je lineárny izomorfizmus.

Veta 8.11. Lineárna transformácia $f : R^k \rightarrow R^k$ je regulárna $\Leftrightarrow h(\mathbf{M}_f)=k$.

Dôkaz. Vyplýva to z vety 8.10

Definícia 8.10. Matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$ sa nazýva *regulárna*, ak $h(\mathbf{A}) = k$.

Potom Veta 8.11 znie takto: Lineárna transformácia $f : R^k \rightarrow R^k$ je regulárna $\Leftrightarrow$ jej matica $\mathbf{M}_f$ je regulárna.

Definícia 8.11. Inverzná matica k danej matici $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$ je taká matica $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$, že platí $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}_k$. Pretože binárna operácia $\bullet$ na $\mathfrak{M}_{k,k}(R)$ je asociatívna a $\mathbf{I}_k$ je neutrálny prvok vieme, že ak taká matica $\mathbf{B}$ existuje, tak je jediný. Označíme ju $\mathbf{A}^{-1}$.

Pre aké matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$ existuje $\mathbf{A}^{-1}$?

Nutná podmienka: ak $\mathbf{A}^{-1}$ existuje, tak $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}_k$. Z toho potom vieme, že $f_{\mathbf{AA}^{-1}}: R^k \rightarrow R^k$, $f_{\mathbf{AA}^{-1}}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k)\mathbf{AA}^{-1} = ((x_1, \dots, x_k)\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} = f_{\mathbf{A}^{-1}}((x_1, \dots, x_k)\mathbf{A}) = f_{\mathbf{A}^{-1}}f_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_k) = f_{\mathbf{A}^{-1} \circ f_{\mathbf{A}}}(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow f_{\mathbf{AA}^{-1}} = f_{\mathbf{A}^{-1} \circ f_{\mathbf{A}}}$. Podobne $f_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{A}^{-1}}$, teda $f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{A}^{-1}} = f_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}} = f_{\mathbf{I}_k} = id_{R^k} = f_{\mathbf{A}^{-1} \circ f_{\mathbf{A}}}$. To znamená, že $(f_{\mathbf{A}})^{-1} = f_{\mathbf{A}^{-1}}$.

Veta 8.12. K matici $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$ existuje inverzná $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ je regulárna.

Dôkaz.

$\Rightarrow$ už máme.

$\Leftarrow$ Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je regulárna. Teda $f_{\mathbf{A}} : R^k \rightarrow R^k$ je regulárna lineárna transformácia, tj. $f_{\mathbf{A}}$ je lineárny izomorfizmus. Potom existuje k nemu inverzný lineárny izomorfizmus $g : R^k \rightarrow R^k$. Teda $g \circ f_{\mathbf{A}} = f_{\mathbf{A}} \circ g = id_{R^k}$. Pritom $g = f_{\mathbf{M}_g}$. To znamená, že $f_{\mathbf{M}_g} \circ f_{\mathbf{A}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{M}_g} = id_{R^k}$. To je to isté ako: $f_{\mathbf{AM}_g} = f_{\mathbf{M}_g\mathbf{A}} = f_{\mathbf{I}_k}$. Z korešpondencie: $\mathbf{AM}_g = \mathbf{M}_g\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$, teda $\mathbf{M}_g = \mathbf{A}^{-1}$. Zároveň máme: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}_{(f_{\mathbf{A}})^{-1}}$.

Definícia 8.12. Ak matica nie je regulárna, tak je *singulárna*.

$\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(R)$, $\mathbf{A}$ je singulárna $\Leftrightarrow h(\mathbf{A}) < k$.

Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ je regulárna matica. Ako vypočítať $\mathbf{A}^{-1}$? $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$. $f_{\mathbf{A}}(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{1k}), \dots, f_{\mathbf{A}}(0, 0, \dots, 1) = (a_{k1}, \dots, a_{kk})$. Treba nájsť inverzné zobrazenie $f_{\mathbf{A}}^{-1}$. Pretože $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je lineárny izomorfizmus $((a_{11}, \dots, a_{1k}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{kk}))$ je tiež báza v $\mathbb{R}^k$. Preto zobrazenie $(f_{\mathbf{A}}^{-1}) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je úplne určené tým, že $(f_{\mathbf{A}}^{-1})(a_{11}, \dots, a_{1k}) = (1, 0, \dots, 0)$ až $(f_{\mathbf{A}}^{-1})(a_{k1}, \dots, a_{kk}) =$

$= (0, \dots, 0, 1)$. Aby sme dostali maticu zobrazenia f_A^{-1} , potrebujeme vyrátať, na čo f_A^{-1} zobrazí $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix}$. Stručne: $(\mathbf{A} | \mathbf{I}_k) \sim (\mathbf{I}_k | \mathbf{A}^{-1})$.

Príklad. $\mathbf{A}^{-1} = ?$ ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{k,k}(\mathbb{R})$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

IX. SYSTÉMY LINEÁRNYCH ROVNÍČ

Majme systém S s rovníc s n neznámymi nad R : $(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$.

Matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s,n}(\mathbb{R})$ sa nazýva matica systému (S) . Matica

$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s,n+1}(\mathbb{R})$ sa nazýva rozšírená matica systému (S) . Oz-

načme ďalej $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$, to je tzv. matica pravých strán. Potom systém (S) môžeme

napísať takto: $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$. tj. ak označíme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ máme: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Toto

je maticový zápis systému (S) . Riešením systému $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ je každé $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_n)$ také, že $\mathbf{AK}^T = \mathbf{B}$. Ak matica $\mathbf{A}''$ vznikla z rozšírenej matice $\mathbf{A}'$ systému (S) konečným počtom ERO, tak systém, ktorého rozšírená matica je $\mathbf{A}''$ je ekvivalentná so systémom (S) . $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{AX})^T = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow f_{\mathbf{A}^T}(\mathbf{X}^T) = \mathbf{B}^T$, kde $f_{\mathbf{A}^T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{A}^T$. Teda systém $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ je riešiteľný $\Leftrightarrow$ keď $\mathbf{B}^T \in \text{Im}(f_{\mathbf{A}^T})$. Množina riešení systému $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ je vlastne $(f_{\mathbf{A}^T})^{-1}(\{\mathbf{B}^T\})$.

Napríklad: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Riešenia sú také $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pre ktoré $f_{\mathbf{A}} \cdot (x_1, x_2) = (1, 0)$.

Riešenie je napr. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Iné riešenie nemôže mať, lebo matica $\mathbf{A}$ je regulárna, teda lineárna transformácia $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineárny izomorfizmus.

Homogénne lineárne systémy.

Definícia 9.1. Systém $(H) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$ sa volá *homogénny*, jeho maticový zápis je $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{A}$ je matica toho systému.

Veta 9.1. Množina všetkých riešení homogénneho lineárneho systému (H) je vektorový priestor v $\mathbb{R}^n$.

Dôkaz. Označme S =množinu riešení (H) . Potom $S \neq \emptyset$, lebo $(0, \dots, 0) \in S$. Použijeme kritérium vektorového podpriestoru. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $K, L \in S$ sú ľubovoľné. Chceme ukázať, že $\alpha K + \beta L \in S$. Vieme, že $\mathbf{A}\mathbf{K}^T = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{L}^T = \mathbf{0}$. Potom $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{K}^T + \beta\mathbf{L}^T) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{K}^T + \beta\mathbf{A}\mathbf{L}^T = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Teda naozaj $\alpha\mathbf{K}^T + \beta\mathbf{L}^T \in S$.

Iný dôkaz: $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{0}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow f_{\mathbf{A}^T}(\mathbf{X}^T) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \in \text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T})$. Teda $S = \text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T})$, $f_{\mathbf{A}^T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. Vieme, že $[\text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T})]$ jadro lineárneho zobrazenia je vektorový podpriestor.

Nech $h(\mathbf{A}) = r$. Vieme, že konečným počtom ERO sa tá matica $\mathbf{A}$ upraví na RTM, ktorá má r nenulových riadkov. Povedzme, že tá RTM má vedúce prvky v stĺpcoch $t_1 < t_2 < \dots < t_r$. Premenovaním neznámych $y_1 = x_{t_1}, \dots, y_r = x_{t_r}, y_i = x_i$ v ostatných

prípadoch, dostaneme lineárny systém (H')
$$\begin{cases} y_1 + c_{1,r+1}y_{r+1} + \dots + c_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ y_r + c_{r,r+1}y_{r+1} + \dots + c_{rn}y_n = 0 \end{cases}.$$

Spätným preznačením neznámych sa od (H') dostaneme k systému s neznámymi $x_1, \dots, x_n$, ktorého vektorový priestor riešení je priestor riešení systému (H) . Vektorový priestor riešení systému (H') je lineárne izomorfný s vektorovým priestorom riešení systému (H) . (Lineárny izomorfizmus $g : S' \rightarrow S$, $g(y_1, \dots, y_n) = (x_{t_1}, \dots, x_{t_r}, x_{r+1}, \dots, x_n)$.) Teda $\dim(S') = \dim(S)$. Teda stačí určiť $\dim(S)$. V (H') máme viazané neznáme $y_1, \dots, y_r$, kým $y_{r+1}, \dots, y_n$ sú voľné (nadobúdajú ľubovoľné hodnoty z $\mathbb{R}$). Pre $y_{r+1} = 1, y_{r+2} = \dots = y_n = 0$ dostaneme riešenie systému (H') . $d_{r+1} = (-c_{1,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0)$ atď. Pre $y_{r+1} = \dots = y_{n-1} = 0, y_n = 1$ dostaneme riešenie $d_n = (-c_{1n}, \dots, -c_{rn}, 0, \dots, 0, 1)$. Takto sme dostali $n-r$ riešení systému (H') .

Tvrdenie 9.1. $(d_{r+1}, \dots, d_n)$ je báza priestoru (S') , ktorý je priestorom riešení systému (H') . Teda $\dim(S') = \dim(S) = n-r$.

Dôkaz. $d_{r+1}, \dots, d_n$ sú zrejme lineárne nezávislé. Zostáva ukázať, že $d_{r+1}, \dots, d_n$ generujú priestor (S') . Nech $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S'$ je ľubovoľné riešenie systému (H') . Chceme ukázať, že $\mathbf{s}$ je lineárnou kombináciou $d_{r+1}, \dots, d_n$. Takto: $(s_1, \dots, s_n) = s_{r+1}d_{r+1} + \dots + s_nd_n$. $s_1 = (-c_{1,r+1}s_{r+1} - \dots - c_{1n}s_n)$. 1.zložka vpravo: $-s_{r+1}c_{1,r+1} - \dots - s_nc_{1n}$. 1.zložka vľavo: $-c_{1,r+1}s_{r+1} - \dots - c_{1n}s_n$. Podobne pre ostatné zložky.

Dimenzia priestoru riešení homogénneho lineárneho systému = počet neznámych – hodnosť matice systému.

Príklad. Nad $\mathbb{R}$ vyriešte:
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. RTM ekvivalentná s $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Teda daný systém je ekvivalentný s týmto:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 15x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 12x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

x_3, x_5 sú voľné. $x_3 = s \in \mathbb{R}$, $x_5 = t \in \mathbb{R}$. Pomocou nich vyjadríme x_1, x_2, x_4 : $x_4 = t$, $x_2 = -2s - 12t$, $x_1 = s + 15t$. Teda vektorový priestor všetkých riešení je $S = \{(s + 15t, -2s - 12t, s, t, t)\} s, t \in \mathbb{R}$. Báza priestoru S pre $s=1, t=0$: $(1, -2, 1, 0, 0)$, pre $s=0, t=1$: $(15, -12, 0, 1, 1)$.

Báza priestoru S je $((1, -2, 1, 0, 0), (15, -12, 0, 1, 1))$.

Veta 9.2. Pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{k,t}(\mathbb{R})$: $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$.

Dôkaz. Nech $h(\mathbf{A}) = r$. Uvažujme o lineárnom systéme $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Vektorový priestor riešení je $\text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T})$. $f_{\mathbf{A}^T} : \mathbb{R}^t \rightarrow \text{Im}(f_{\mathbf{A}^T})$, $\mathbb{R}^t / \text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T}) \cong \text{Im}(f_{\mathbf{A}^T})$.

$t - \dim(\text{Ker}(f_{\mathbf{A}^T})) = \dim(\text{Im}(f_{\mathbf{A}^T}))$. $t - (t - h(\mathbf{A})) = h(\mathbf{A}^T) \Leftrightarrow h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Nehomogénny systém lineárnych rovníc.

$$(N) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

Aspoň jedno $b_i \neq 0$, tak nehomogénny systém s lineárnych rovníc s n neznámymi.

Veta 9.3. (Frobeniova, Kroneckerova – Capelliho)

Nehomogénny systém lineárnych rovníc je riešiteľný $\Leftrightarrow$ hodnota matice systému sa rovná hodnosti rozšírenej matice systému.

Dôkaz. Maticový zápis: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_s \end{pmatrix}$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow$

$\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow f_{\mathbf{A}^T}(\mathbf{X}^T) = \mathbf{B}^T$. Z toho je jasné, že systém (N) je riešiteľný $\Leftrightarrow$ keď $\mathbf{B}^T \in \text{Im}(f_{\mathbf{A}^T})$. Označme a_i i -tý stĺpec matice $\mathbf{A}$. Potom $\mathbf{A}^T$ má riadky $a_1^T, \dots, a_n^T$. Systém (N) je riešiteľný $\Leftrightarrow \mathbf{B}^T \in \text{Im}(f_{\mathbf{A}^T}) \Leftrightarrow \mathbf{B}^T \in [a_1^T, \dots, a_n^T] = [a_1^T, \dots, a_n^T, \mathbf{B}^T] \Leftrightarrow \dim[a_1^T, \dots, a_n^T] = \dim[a_1^T, \dots, a_n^T, \mathbf{B}^T] \Leftrightarrow$ dimenzia priestoru generovaného riadkami matice $\mathbf{A}^T =$ dimenzia priestoru generovaného riadkami matice $(\mathbf{A}|\mathbf{B})^T \Leftrightarrow h(\mathbf{A}^T) = h((\mathbf{A}|\mathbf{B})^T) \Leftrightarrow h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Príklad. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ nad $\mathbb{R}$ nie je riešiteľný, lebo $h\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ ale $h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$

Veta 9.4. Uvažujme o nehomogénnom systéme (N). Nech P je množina všetkých jeho riešení. Potom: ak $d \in P$ je nejaké riešenie systému (N), tak každé riešenie systému (N) je tvaru $d + c$ pre vhodné c z vektorového priestoru riešení príslušného homogénneho systému $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Obrátene, $d + c$ kde c je riešením príslušného homogénneho systému – je riešením systému (N). Teda ak S je vektorový priestor riešení príslušného homogénneho systému, tak $P = d + S$

Dôkaz. Ak $p \in P$ je ľubovoľné, tak $p = d + (p - d)$. $(p - d) \in S$. $[\mathbf{A}p^T = \mathbf{B}, \mathbf{A}d^T = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}(p - d)^T = \mathbf{A}(p^T - d^T) = \mathbf{A}p^T - \mathbf{A}d^T = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}]$. Teda $P \subset d + S$. Ľubovoľné $d + S$, kde $s \in S$, tak $d + s \in P$, lebo $\mathbf{A}(d + s)^T = \mathbf{A}d^T + \mathbf{A}s^T = \mathbf{B} + \mathbf{0} = \mathbf{B}$. Teda tiež $d + S \subset P$.

Vcelku: $P = d + S$.

Príklad. Systém nad $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{11} & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Viazané: x_1, x_2 , voľné: $x_3=u, x_4=v$.

$$P = \left\{ \left(\frac{1}{11} - \frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v, \frac{2}{11} - \frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v, u, v \right) \in \mathbb{R}^4, u, v \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0 \right) + \left\{ \left(-\frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v, -\frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v, u, v \right) \in \mathbb{R}^4, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

kde $\left\{ \left(-\frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v, -\frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v, u, v \right) \in \mathbb{R}^4, u, v \in \mathbb{R} \right\}$ je vektorový priestor riešení príslušného homogénneho systému.

Poznámka. Po úprave rozšírenej matice nehomogénneho systému na trojuholníkový tvar považujeme za viazané tie neznáme, ktoré zodpovedá vedúcim prvkom nenulových riadkov rozšírenej matice (v trojuholníkovom tvare). Ostatné sú voľné.

Determinanty.

$\{1, 2, \dots, n\}$ permutácia tejto množiny je každá bijekcia $\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

Napr.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ je permutácia množiny $\{1, 2, 3\}$.

Definícia 9.2. $S_{\{1,2,\dots,n\}}$ = množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ak $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} \in S_{\{1,2,\dots,n\}}$, tak hovoríme, že dvojica $(\varphi(i), \varphi(j))$ tvorí inverziu vo φ , ak $i < j$, ale $\varphi(i) > \varphi(j)$.

Príklad. V permutácii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sú 2 a 1 v inverzii.

Definícia 9.3. Počet inverzií v permutácii $\varphi \in S_{\{1,\dots,n\}}$ označíme $s(\varphi)$. Permutácia φ je *párna*, ak $(-1)^{s(\varphi)} = 1$ a φ je *nepárna*, ak $(-1)^{s(\varphi)} = -1$.

Definícia 9.4. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, kde R je hocijaké pole. *Determinant* matice $\mathbf{A}$ je prvok poľa R , definovaný takto: $\det(\mathbf{A}) = \sum_{\varphi \in \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(1)} \cdots a_{n\varphi(n)}$.

Príklady.

1. $\mathbf{A} = (a_{11}) \in \mathfrak{M}_{11}(R) : \det(\mathbf{A}) = a_{11}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{s\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} a_{11}a_{22} + (-1)^{s\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, potom $\det(\mathbf{A}) = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Definícia 9.5. Vyňatím prvkov i -teho riadku ($i=1, 2, \dots, n$) dostaneme

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1} \cdot \underbrace{(\text{súčty súčínov bez } a_{i1})}_{\mathbf{A}_{i1}} + \dots + a_{in} \cdot \underbrace{(\text{súčty súčínov bez } a_{in})}_{\mathbf{A}_{in}}$$

$\mathbf{A}_{ij}$ sa nazýva *algebraický doplnok* k prvku a_{ij} .

Uvidíme, že $\mathbf{A}_{ij}$ sa dá vyjadriť pomocou determinantu vhodnej matice stupňa $n-1$ odvodennej z $\mathbf{A}$.

Lema 9.1. Ak $\varphi, \psi \in S_{\{1, \dots, n\}}$ tak platí, že $(-1)^{s(\varphi \circ \psi)} = (-1)^{s(\varphi) + s(\psi)}$. Z toho máme, že: $(-1)^{s(\varphi)} = (-1)^{s(\varphi^{-1})}$.

Dôkaz. Pevne zvoľme $x_1, \dots, x_n \in R$ navzájom rôzne. Označme $P = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$.

Pre $\varphi \in S_{\{1, \dots, n\}}$ a ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$ definujme $((-1)^k P)_\varphi = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(j)})$

Je jasné, že $(-1)^k (-1)^{s(\varphi)} P = ((-1)^k P)_\varphi$. Pre $\varphi, \psi \in S_{\{1, \dots, n\}} : P_{\varphi \circ \psi} = (P_\varphi)_\psi = ((-1)^{s(\varphi)} P)_\psi = (-1)^{s(\varphi)} (-1)^{s(\psi)} P = (-1)^{s(\varphi) + s(\psi)} P \Rightarrow (-1)^{s(\varphi \circ \psi)} = (-1)^{s(\varphi) + s(\psi)}$.

Vlastnosť 1. Pre každú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ máme $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Dôkaz. Prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca v $\mathbf{A}^T$ bude $a_{ij}^T = a_{ji}$. Podľa definície determinantu vieme, že $\det(\mathbf{A}) = \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{\varphi^{-1}(1)\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(1))} \dots a_{\varphi^{-1}(n)\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(n))} = \\ &= \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{\varphi^{-1}(1)} \dots a_{\varphi^{-1}(n)} = \sum_{\varphi^{-1} \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi^{-1}(1)}^T \dots a_{n\varphi^{-1}(n)}^T = \\ &= \sum_{\varphi^{-1} \in S} (-1)^{s(\varphi^{-1})} a_{1\varphi^{-1}(1)}^T \dots a_{n\varphi^{-1}(n)}^T = \det(\mathbf{A}^T). \end{aligned}$$

Vlastnosť 2. Ak matica $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ vznikne z matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ jednou vzájomnou výmenou ľubovoľných dvoch riadkov, tak $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Dôkaz. Napr. nech $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A}$ vzájomnou výmenou prvého a druhého riadku.

$$\text{Teda, ak } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ tak } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \text{ Označme}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(2) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

$$(-1)^{s(\psi)} = (-1)^{s(\varphi)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(2) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} (-1)^{s(\varphi)} = -(-1)^{s(\varphi)}. \text{ Z definície determinantu:}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} b_{1\varphi(1)} b_{2\varphi(2)} \dots b_{n\varphi(n)} = \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{2\varphi(1)} a_{1\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} = \\ &= \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(2)} a_{2\varphi(1)} \dots a_{n\varphi(n)} = \sum_{\psi \in S} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \dots a_{n\psi(n)} = \\ &= - \sum_{\psi \in S} (-1)^{s(\psi)} a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \dots a_{n\psi(n)} = -\det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

$$\textit{Príkklad. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D\hat{o}kaz. \text{ Z definície determinantu: } \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\varphi \in S} (-1)^{s(\varphi)} \prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} = \\ &= \sum_{\varphi \in S}^{\varphi(1)=1} (-1)^{s(\varphi)} a_{11} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)} + \sum_{\varphi \in S}^{\varphi(1) \neq 1} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \\ \text{Z toho: } \mathbf{A}_{11} &= \sum_{\varphi \in S}^{\varphi(1)=1} (-1)^{s(\varphi)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)} = \sum_{\psi \in S'} (-1)^{s(\psi)} a_{2\psi(2)} \cdots a_{n\psi(n)} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{M}_{11}) = (-1)^{1+1} \det(\mathbf{M}_{11}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-11} & \cdots & a_{r-1s-1} & a_{r-1s} & a_{r-1s+1} & \cdots & a_{r-1n} \\ a_{r1} & \cdots & a_{rs-1} & a_{rs} & a_{rs+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+11} & \cdots & a_{r+1s-1} & a_{r+1s} & a_{r+1s+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{r1} & \cdots & a_{rs-1} & a_{rs} & a_{rs+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-11} & \cdots & a_{r-1s-1} & a_{r-1s} & a_{r-1s+1} & \cdots & a_{r-1n} \\ a_{r+11} & \cdots & a_{r+1s-1} & a_{r+1s} & a_{r+1s+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{rs} & a_{r1} & \cdots & a_{rs-1} & a_{rs+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{1s} & a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1s} & a_{r-11} & \cdots & a_{r-1s-1} & a_{r-1s+1} & \cdots & a_{r-1n} \\ a_{r+1s} & a_{r+11} & \cdots & a_{r+1s-1} & a_{r+1s+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns} & a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Z toho čo sme dokázali vieme, že $\det(\mathbf{C}) = a_{rs} \det(\mathbf{M}_{rs}) + \text{členy bez } a_{rs}$. Z 1. a 2. vlastnosti: $(-1)^{s-1} \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}) = (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{r-1} \det(\mathbf{A}) = (-1)^{r+s} \det(\mathbf{A})$.
 $\det(\mathbf{A}) = a_{rs} (-1)^{r+s} \det(\mathbf{M}_{rs}) + (-1)^{r+s} \cdot \text{členy bez } a_{rs} \Rightarrow \mathbf{A}_{rs} = (-1)^{r+s} \det(\mathbf{M}_{rs})$.

Veta 9.5. (Laplaceova o rozvoji determinantoch)

Pre $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ máme: $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}(-1)^{i+1} \det(\mathbf{M}_{i1}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det(\mathbf{M}_{in})$. Toto vyjadrenie sa nazýva Laplaceov rozvoj determinantu matice $\mathbf{A}$ podľa i -teho riadku. Tiež: $\det(\mathbf{A}) = a_{1j}(-1)^{j+1} \det(\mathbf{M}_{1j}) + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \det(\mathbf{M}_{nj})$ pre všetky $j \in \{1, \dots, n\}$ tzv. rozvoj podľa j -teho stĺpca.

Dôkaz. Dôsledok vlastnosti 3. Máme $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + \dots + a_{in}\mathbf{A}_{in}$. Z vlastnosti 3 dosadíme vyjadrenia $\mathbf{A}_{ik} = (-1)^{i+k} \det(\mathbf{M}_{ik})$. S využitím vlastnosti 1 stĺpcový rozvoj. (tj. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$.)

Príklad. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 = -4$.

Vlastnosť 4. Ak sú v matici $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ dva riadky rovnaké (príp. dva stĺpce), tak $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na n . Pre $n=2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$.

Indukčný predpoklad: Predpokladajme, že tvrdenie platí pre také matice typu $n-1 \times n-1$. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Nech r -tý a s -tý riadok ($r < s$) v $\mathbf{A}$ sú rovnaké. Rozviňme determinant matice $\mathbf{A}$ podľa i -teho riadku, kde $i \neq r, i \neq s$. Potom $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}(-1)^{i+1} \det(\mathbf{M}_{i1}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det(\mathbf{M}_{in})$. $\mathbf{M}_{ij}$ sú matice stupňa $n-1$, ktoré majú dva rovnaké riadky. Potom z indukčného predpokladu: $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Vlastnosť 5. Nech $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ vznikne z $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ prirátaním ľubovoľného násobku ľubovoľného riadku v $\mathbf{A}$ k inému riadku v $\mathbf{A}$. Potom $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$.

Dôkaz. Nech napríklad $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A}$ tak, že k 1.riadku prirátame α -násobok 2.riadku. Rozviňme determinant $\mathbf{B}$ podľa prvého riadku:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= (a_{11} + \alpha a_{21})(-1)^{1+1} \det(\mathbf{M}_{11}) + \dots + (a_{1n} + \alpha a_{2n})(-1)^{1+n} \det(\mathbf{M}_{1n}) = \\ &= a_{11}(-1)^2 \det(\mathbf{M}_{11}) + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \det(\mathbf{M}_{1n}) + \alpha(a_{21}(-1)^2 \det(\mathbf{M}_{11}) + \dots + \\ &+ a_{2n}(-1)^{1+n} \det(\mathbf{M}_{1n})) = \det(\mathbf{A}) + \alpha \det(\text{matice, ktorá má rovnaký 1. a 2.riadok}) \\ &= \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Vlastnosť 6. Nech $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ tak, že i -tý riadok (iba tento) vynásobíme $\alpha \in R - \{0\}$. Potom $\det(\mathbf{B}) = \alpha \det(\mathbf{A})$.

Dôkaz. Rozviňme determinant matice $\mathbf{B}$ podľa i -teho riadku:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \alpha a_{i1}(-1)^{i+1} \det(\mathbf{M}_{i1}) + \dots + \alpha a_{in}(-1)^{i+n} \det(\mathbf{M}_{in}) = \\ &= \alpha [a_{i1}(-1)^{i+1} \det(\mathbf{M}_{i1}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det(\mathbf{M}_{in})] = \alpha \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Vlastnosť 7.

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \dots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i + \vec{b}_i \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \dots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \dots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{b}_i \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

Dôkaz. Rozvoj podľa i -teho riadku.

Vlastnosť 8. Ak matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ má nulový riadok, tak $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Dôkaz. Priamo z definície.

Ak maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ upravíme pomocou ERO na trojuholníkovú maticu:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

tak buď niektorý z prvkov $t_{11}, \dots, t_{nn}$ je 0 (to je vtedy, keď $h(\mathbf{T}) < n$ tj. ak $\mathbf{T}$ je singulárna), alebo všetky $t_{11}, \dots, t_{nn}$ sú nenulové (to je vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = n$). Z Laplaceovej vety o rozvoji determinantu (ale aj priamo z definície) je jasné, že $\det(\mathbf{T}) = t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}$.

Príklad. Jedna z metód výpočtu $\det(\mathbf{A})$: $\mathbf{A}$ postupne upravujeme na trojuholníkovú maticu, ak zohľadníme vplyv jednotlivých ERO na determinant a fakt, že determinant trojuholníkovej matice je súčin prvkov hlavnej diagonály, tak ľahko vyrátame $\det(\mathbf{A})$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4.$$

Tvrdenie 9.2. Matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je regulárna $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dôkaz. Vieme, že $\mathbf{A}$ je regulárna $\Leftrightarrow$ je riadkovo ekvivalentná s nejakou trojuholníkovou maticou $\mathbf{T}$, pričom $t_{ii} \neq 0$ čiže $\prod_{k=1}^n t_{kk} \neq 0$. Z toho aký vplyv majú jednotlivé

ERO na determinant vieme, že musí existovať $\alpha \in R - \{0\}$ také, že $\det(\mathbf{A}) = \alpha \cdot \det(\mathbf{T})$. Vcelku máme, že $\mathbf{A}$ je regulárna $\Leftrightarrow \det(\mathbf{T}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Príklad. Reálna matica $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ je regulárna, lebo jej determinant je nenulový.

Príklad.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Príklad. **Vandermondov determinant**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ b^3-a^2b & c^3-a^2c & d^3-a^2d \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2+ab & c^2+ac & d^2+ad \end{pmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{pmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \det \begin{pmatrix} c-b & d-b \\ c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \end{aligned}$$

Veta 9.6. Pre ľubovoľné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{A}$, alebo $\mathbf{B}$ je singulárna, tak veta zrejme platí. $f_{\mathbf{AB}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárny izomorfizmus s maticou $\mathbf{AB}$. Vieme, že $f_{\mathbf{AB}} = f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}}$. Ak $\mathbf{A}$ je singulárna, tak $f_{\mathbf{A}}$ zobrazí nejaký vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ na nulový. Teda $f_{\mathbf{A}}(\vec{a}) = \vec{0}$. Potom $f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}}(\vec{a}) = \vec{0} = f_{\mathbf{AB}}(\vec{a})$ a teda $\mathbf{AB}$ je singulárna, teda $\det(\mathbf{AB}) = 0$. Podobne ak $\mathbf{B}$ je singulárna a $\mathbf{A}$ je regulárna. Ak $\mathbf{A}$ aj $\mathbf{B}$ sú singulárne, tak tiež platí.

Ďalej: Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ aj $\mathbf{B}$ sú regulárne. Keďže $\mathbf{A}$ je regulárna, dá sa konečným počtom ERO upraviť na trojuholníkovú maticu $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & t_{ii} & t_{in} \\ 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$, pričom

$t_{ii} \neq 0$. Každá ERO sa dá realizovať tak, že danú maticu zľava vynásobíme takzvanou elementárnou maticou, ktorá prislúcha k tej ERO. Teda: $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}$, kde $\mathbf{E}_i$ sú elementárne matice prislúchajúce k použitým ERO. Pretože $\mathbf{A}$ je regulárna, na jej úpravu na $\mathbf{T}$ stačí použiť iba prirátavanie násobkov riadkov k iným riadkom. Teda $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{E}_k \mathbf{A}) = \det(\mathbf{E}_{k-1} \mathbf{E}_k \mathbf{A}) = \cdots = \det(\mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_k \mathbf{A}) = \det(\mathbf{T})$. Analogicky ako ERO sa definujú aj ESO, k nim prislúchajú elementárne matice (taká matica vznikne z jednotkovej tak, že na nej urobíme tú ESO). Matica $\mathbf{B}$ sa konečným počtom ESO (zas vystačíme iba s prirátavaním násobkov stĺpcov k iným

stĺpcom, keďže $\mathbf{B}$ je regulárna) upraví na trojuholníkovú maticu $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} t'_{11} & \cdots & t'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t'_{nn} \end{pmatrix}$

príčom $\prod t'_{ii} \neq 0$. Urobiť nejaké ESO je to isté, ako danú maticu sprava vynásobiť príslušnou elementárnou maticou. Teda: $\mathbf{B} \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_p = \mathbf{T}'$, kde $\mathbf{F}_i$ sú príslušné elementárne matice. Pritom $\mathbf{F}_1, \cdots \mathbf{F}_p$ zodpovedajú iba prirátavaním násobku stĺpca k inému stĺpcu. Potom: $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \mathbf{F}_1) = \cdots = \det(\mathbf{B} \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_p) = \det(\mathbf{T}')$. Teraz

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{TT}') &= \det \left(\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{21} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & \cdots & t'_{1n} \\ 0 & t'_{22} & \cdots & t'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t'_{nn} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} t_{11}t'_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & t_{22}t'_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn}t'_{nn} \end{pmatrix} = t_{11}t'_{11} \cdots t_{nn}t'_{nn} = t_{11} \cdots t_{nn} t'_{11} \cdots t'_{nn} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{T}'). \text{ Potom } \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \\ &= \det(\mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_p) = \det(\mathbf{TT}') = \det(\mathbf{T}) \det(\mathbf{T}') = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Inverzná matica pomocou determinantu.

Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je regulárna. Vieme, že existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$. Definujme tzv. *adjungovanú* maticu k $\mathbf{A}$ ako maticu:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Nech A_{ij} je algebraický doplnok k prvku a_{ij} . Teda $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij})$.

Veta 9.7. Ak $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathfrak{M}_{nn}(R)$ je regulárna, tak $\mathbf{A}^{-1}=\frac{adj(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$.

Dôkaz. Rátajme $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\frac{adj(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}\stackrel{?}{=}\mathbf{I}_n$. Matica $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\cdot\mathbf{A}\cdot adj(\mathbf{A})$ má na hlavnej diagonále prvky: $c_{ii}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\cdot\underbrace{(a_{i1}A_{i1}+\dots+a_{in}A_{in})}_{\det(\mathbf{A})}=1$ a mimo hlavnej diagonály

prvky (tj. pre $i\neq j$) $c_{ij}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}(a_{i1}A_{j1}+\dots+a_{in}A_{jn})=0$. Teda $\mathbf{C}=\mathbf{I}_n$.

Príklad. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $adj(\mathbf{A})=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Systémy n rovníc s n neznámymi.

Fredholmova alternatíva.

Nech $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ je systém n lineárnych rovníc s n neznámymi. Potom sú dve možnosti:

1. Systém $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ má jediné riešenie bez ohľadu na to, aká je pravá strana $\mathbf{B}$ (to nastane vtedy, keď $h(\mathbf{A})=n$, tj. vtedy, keď $\det(\mathbf{A})\neq 0$) a zároveň príslušný homogénny systém $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ má iba triviálne riešenie.
2. Nehomogénny systém $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ je riešiteľný už nie pre všetky $\mathbf{B}$, ale iba pre také, pre ktoré $h(\mathbf{A}|\mathbf{B})=h(\mathbf{A})$, to sa stane vtedy, keď $h(\mathbf{A})<n$ tj. $\det(\mathbf{A})=0$, a zároveň príslušný homogénny lineárny systém má aspoň jedno triviálne riešenie.

Cramerovo pravidlo. Majme nehomogénny lineárny systém n rovníc s n neznámymi nad R : $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je regulárna. Potom systém $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ má jediné riešenie: $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ teda } x_i=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}(A_{1i}b_1+\dots+A_{ni}b_n)=$$

$$=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\det(\text{matice, ktorá vznikne tak, že } i\text{-tý stĺpec nahradíme } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}).$$

Označme $\mathbf{A}_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, tak potom jediné riešenie systému

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B} \text{ je } \left(\frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})}; \dots; \frac{\det(\mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}\right).$$

Príklad. Lineárny systém nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A})=4$, $\det(\mathbf{A}_1)=4$, $\det(\mathbf{A}_2)=3$, $\det(\mathbf{A}_3)=1$. Jediné riešenie systému daného je: $(4\cdot 4^{-1}, 3\cdot 4^{-1}, 1\cdot 4^{-1})=(1, 2, 4)\in\mathbb{Z}_5$.

Príklad. Využitím Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -11 \neq 0$$

Rovnice sú lineárne nezávislé, x_1, x_2 budú viazané x_3, x_4 budú voľné neznáme.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4u - 3v \\ 2x_1 - x_2 = -2u + v \end{cases} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1-4u-3v & 5 \\ -2u+v & -1 \end{pmatrix} = -1+14u-2v$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1-4u-3v \\ 2 & -2u+v \end{pmatrix} = -2+6u+7v$$

Potom všeobecné riešenie daného systému je:

$$\left(\frac{1}{11} - \frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v; \frac{2}{11} - \frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v; u; v \right)$$

X. EUKLIDOVSKÝ VEKTOROVÝ PRIESTOR

Definícia 10.1. Nech V je vektorový priestor nad R . Potom skalárny súčin na V je zobrazenie $g : V \times V \rightarrow R$ pre ktoré platia tieto podmienky:

1. $g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = g(\vec{x}, \vec{z}) + g(\vec{y}, \vec{z})$ pre $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.
2. $g(\vec{y}, \vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{y})$ pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.
3. $g(\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y})$ pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \alpha \in R$.
4. Ak $\vec{x} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Ak g je nejaký skalárny súčin na V , tak V sa nazýva *euklidovský* vektorový priestor (presnejšie je to euklidovský vektorový priestor (V, g)).

Poznámka. Ak g je skalárny súčin na V , tak namiesto $g(\vec{x}, \vec{y})$ sa často píše $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.
 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$. Potom vlastnosti skalárneho súčinu sa prepíšu takto:

1. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
2. $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.
3. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.
4. Ak $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$, tak $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$.

Príklad. Pre $\mathbb{R}^n$ zoberme zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

1. $\langle (x_1, \dots, x_n) + (z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle (x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = (x_1 + z_1)y_1 + \dots + (x_n + z_n)y_n = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle + \langle (z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$. Zistili sme, že vyššie definované zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ je tzv. štandardný skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. (Existujú aj iné skalárne súčiny.)

Príklad. Euklidovský priestor nemusí byť konečne generovaný. $V = C(\langle 0, 1 \rangle) =$ priestor spojitých funkcií na $\langle 0, 1 \rangle$. Definujme zobrazenie: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. $(C\langle 0, 1 \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor nie konečne generovaný.

Poznámka. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$. Skalárny súčin na V je zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, ktoré spĺňa:

1. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
2. $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$. (komplexne združené)
3. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.
4. Ak $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$, tak $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$.

Príklad. $V = \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$). Definujeme: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
 $\langle (x_1, \dots, x_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$. Ak V je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$ a
 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ je skalárny súčin, tak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sa volá *unitárny* (alebo hermitovský)
priestor.

V ďalšom už iba reálne euklidovské priestory uvažujeme!

Definícia 10.2. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Potom *dĺžka*
ľubovoľného vektora $\vec{x} \in V$ sa definuje ako reálne číslo: $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

Príklad. V $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom: $|(1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Veta 10.1. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský priestor. Potom:

1. $|\alpha \cdot \vec{x}| = |\alpha| \cdot |\vec{x}|$ pre $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V$.
2. $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$. (*Cauchyho-Schwarzova-Bunjakovského nerovnosť*).
4. $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (*trojuholníková nerovnosť*).

Dôkaz.

1. $|\alpha \vec{x}| = \sqrt{\langle \alpha \vec{x}, \alpha \vec{x} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\alpha| |\vec{x}|$.
2. Ak $\vec{x} = \vec{0}$, tak $|\vec{x}| = |0 \cdot \vec{x}| = 0 \cdot |\vec{x}| = 0$; ak by $\vec{x} \neq \vec{0}$, tak by sme mali $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} > 0$
–spor s predpokladom.
3. $\vec{x}, \vec{y}$ ľubovoľné pevne zvolené. Pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$ utvoríme vektor $\alpha \vec{x} - \vec{y}$. Potom
 $\langle \alpha \vec{x} - \vec{y}, \alpha \vec{x} - \vec{y} \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \alpha \vec{x}, \alpha \vec{x} \rangle - \langle \vec{y}, \alpha \vec{x} \rangle - \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \alpha \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle +$
 $+ \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0$.
Zistili sme, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \alpha^2 - 2\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0$ kvadratický člen v pre-
mennej α . Graf tohto trojčlena leží v nezápornej polrovine ($x_2 \geq 0$) pričom nepretína
os x_1 . Teda tento trojčlen nemá dva rôzne reálne korene. Preto diskriminant
 $D = 4 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - 4 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq 0$. Z toho: $4 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq 4 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ tj. $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$.
4. $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$
 $= |\vec{x}|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$. Z toho $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Z 3. vlastnosti z vety 10.1. máme: ak $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$, tak $-1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1$.

Definícia 10.3. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a $\vec{x}, \vec{y} \in V - \{\vec{0}\}$, tak
uhol vektorov $\vec{x}, \vec{y}$ definujeme ako také $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ pre ktoré $\cos \alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$. Ak $\vec{x} = \vec{0}$,
alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tak definujeme uhol vektorov $\vec{x}, \vec{y}$ ako $\frac{\pi}{2}$.

Definícia 10.4. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Hovoríme, že
 $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sú na seba *kolmé*, ak $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$. (*ortogonálne*).

Tvrdenie 10.1. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor, tak $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Dôkaz. $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$ alebo $\vec{x}, \vec{y} \in V - \vec{0}$ a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Príklady.

1. Nech $\mathbb{R}^3$ je euklidovský vektorový priestor so štandardným skalárnym súčinom. Potom $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ sú navzájom ortogonálne.
2. V $\mathbb{R}^2$ so štandardným skalárnym súčinom. Na $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je vektor $(-b, a)$ kolmý.

Veta 10.2. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a nech vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú nenulové a navzájom kolmé vektory. Potom sú aj lineárne nezávislé.

Dôkaz. Nech $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
 $\langle \vec{a}_1, \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}_{>0} + \alpha_2 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_n \rangle}_{=0} = 0 = \langle \vec{0}, \vec{a}_1 \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. Podobne všeobecne $0 = \langle \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \vec{a}_i \rangle = \alpha_i |\vec{a}_i|^2 \Rightarrow \alpha_i = 0$.

Dôsledok. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je n -rozmerný euklidovský vektorový priestor a vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V - \{\vec{0}\}$ sú navzájom kolmé, tak $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza priestoru V .

Definícia 10.5. Ak $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza euklidovského vektorového priestoru V taká, že $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$ pre $\forall i \neq j$, tak tá báza sa nazýva *ortogonálna báza*. Ak navyše $|\vec{a}_i| = 1$ pre $i = 1, \dots, n$, tak tá báza sa nazýva *ortonormálna*.

Príklad. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je ortogonálna a ortonormálna báza euklidovského vektorového priestoru $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Veta 10.3. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je ľubovoľný euklidovský vektorový priestor a nech S je ľubovoľný jeho vektorový podpriestor (nenulový). Ak V je konečne generovaný, tak v S existuje ortonormálna báza.

Dôkaz. Nech $\dim(V) = n$, nech $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ ($k \leq n$) je dajaká báza v S . Veta bude dokázaná, ak dokážeme, že existujú nenulové vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k \in S$ také, že pre ne platí: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \beta_{21} \vec{x}_1$, $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_{31} \vec{x}_1 + \beta_{32} \vec{x}_2$, $\dots$, $\vec{y}_k = \vec{x}_k + \beta_{k1} \vec{x}_1 + \dots + \beta_{kk-1} \vec{x}_{k-1}$, pričom $\vec{y}_i \perp \vec{y}_j$ pre $i \neq j$. Je jasné, že potom $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ sú v S sú lineárne nezávislé. Keďže $\dim(S) = k$, tak $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ je báza, a je ortogonálna.

Potom ortonormálna báza v S bude takáto: $\left(\frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}, \dots, \frac{\vec{y}_k}{|\vec{y}_k|} \right)$.

$\left\langle \frac{\vec{y}_i}{|\vec{y}_i|}, \frac{\vec{y}_j}{|\vec{y}_j|} \right\rangle = \frac{1}{|\vec{y}_i| |\vec{y}_j|} \cdot \langle \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle = 0$. Existenciu vektorov $\vec{y}_i$ dokážeme indukciou:

Ak $k=1$: S má bázu $(\vec{x}_1)$, ortonormálna bude: $\left(\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} \right)$. Predpokladajme, že veta

platí pre $k=s-1$. A teraz nech S má bázu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s)$. Teda máme systém $\vec{y}_1 = \vec{x}_1, \dots, \vec{y}_{s-1} = \vec{x}_s + \dots + \beta_{s-1,s-2} \vec{x}_{s-2}$. Podľa indukčného predpokladu máme vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$ potrebného tvaru. Treba už len ukázať, ako vyrátať vektor $\vec{y}_s \neq \vec{0}$ potrebného tvaru a taký, že $\langle \vec{y}_s, \vec{y}_i \rangle = 0$ pre všetky $i \leq s-1$. Hľadáme $\vec{y}_s$ v tvare: $\vec{y}_s = \vec{x}_s + \delta_{s1} \vec{y}_1 + \dots + \delta_{ss-1} \vec{y}_{s-1}$. Má byť: $0 = \langle \vec{y}_s, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_s, \vec{x}_1 \rangle + \delta_{s1} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle +$

$$+ \underbrace{\delta_{s2} \langle \vec{y}_2, \vec{x}_1 \rangle}_{=0} + \dots + \delta_{ss-1} \underbrace{\langle \vec{y}_{s-1}, \vec{x}_1 \rangle}_{=0} \Rightarrow \langle \vec{x}_s, \vec{x}_1 \rangle + \delta_{s1} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \delta_{s1} = - \frac{\langle \vec{x}_s, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle}.$$

Z toho, že $\langle \vec{y}_s, \vec{y}_2 \rangle = 0$ vyrátame δ_{s2} atď.

Poznámka. Metóda dôkazu je konštruktívna; ukazuje indukčný postup na hľadanie ortogonálnej, ortonormálnej bázy. Je to tzv. *Gramov – Schmidtov* ortogonalizačný proces.

Príklad. Nech S je podpriestor v $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom. Treba nájsť ortonormálnu bázu podpriestoru S .

$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3] = [(1, -1, 0, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -2)]$. Najskôr ortogonálnu bázu: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, -1, 0, -1)$, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha \vec{y}_1$; $\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 1$, $\vec{y}_2 = (1, 0, 0, 1)$; $\vec{y}_3 = (0, 0, 1, 2) + \delta_1(1, -1, 0, -1) + \delta_2(1, 0, 0, 1)$. Potom: $\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = 0 \wedge \langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle (\delta_1 + \delta_2, -\delta_1, 1, -2 - \delta_1 + \delta_2), (1, -1, 0, -1) \rangle = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + 2 + \delta_1 - \delta_2 = 0 \cdots \Rightarrow \Rightarrow \delta_1 = -\frac{2}{3}$, $\delta_2 = 1 \Rightarrow \vec{y}_3 = (0, 0, 1, 2) - \frac{2}{3}(1, -1, 0, -1) + (1, 0, 0, 1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})$.

Ortonormálna báza: $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3} \right) \right)$.

Definícia 10.6. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a nech $M \subset V$, $M \neq \emptyset$. (M nemusí byť podpriestor). Potom *ortogonálny doplnok* (komplement) množiny M vo V je množina $M^\perp := \{ \vec{x} \in V; \langle \vec{x}, \vec{m} \rangle = 0 \forall \vec{m} \in M \}$

Veta 10.4. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Potom:

1. $M \neq \emptyset$, $M \subset V \Rightarrow M^\perp$ je vektorový podpriestor priestoru V .
2. Ak $M, N \neq \emptyset$, $M, N \subset V$ a $M \subset N$ tak $N^\perp \subset M^\perp$.
3. Ak S, T sú vektorové podpriestory vo V , tak $(S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$.

Dôkaz.

1. $M^\perp \neq \emptyset$, lebo $\vec{0} \in M^\perp$. Kritérium vektorového podpriestoru: pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in M^\perp$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom pre ľubovoľné $\vec{m} \in M$: $\langle \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{m} \rangle = \underbrace{\alpha \langle \vec{x}, \vec{m} \rangle}_{=0} + \underbrace{\beta \langle \vec{y}, \vec{m} \rangle}_{=0} = 0$. Teda

$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in M^\perp$. Z toho $M^\perp$ je vektorový podpriestor vo V .

2. $M \subset N$. Ak $\vec{x} \in N^\perp$, tak $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{n} \in N$ a teda tiež $\langle \vec{x}, \vec{m} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{m} \in M$. Teda $\vec{x} \in M^\perp$.

3. Nech $\vec{x} \in (S+T)^\perp$. Teda $\langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S, \vec{t} \in T$. Špeciálne $\langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{0} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0$ pre ľubovoľný $\vec{s} \in S$. Takisto $\langle \vec{x}, \vec{t} \rangle = 0$ pre $\forall \vec{t} \in T$. To znamená, že $\vec{x} \in S^\perp \cap T^\perp$. Teda máme: $(S+T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$.

Obrátene: nech $\vec{x} \in S^\perp \cap T^\perp$. Potom $\langle \vec{x}, \vec{s} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S$; $\langle \vec{x}, \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{t} \in T$; potom $\langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S, \vec{t} \in T$. Teda $\vec{x} \in (S+T)^\perp$ tj. $S^\perp \cap T^\perp \subset (S+T)^\perp$. Vcelku: $S^\perp \cap T^\perp = (S+T)^\perp$.

Veta 10.5. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor, nech $S \subset V$ je vektorový podpriestor. (V je konečne generovaný). Potom každý vektor z V sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z $S^\perp$. To znamená, že $V = S \oplus S^\perp$.

Dôkaz.

Existencia vyjadrenia: Pre $S = \{\vec{0}\}$ jasné. Predpokladajme, že $S \neq \{\vec{0}\}$. Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ je ortonormálna báza v S (taká existuje – proces Gramov-Schmidtov). Doplníme ju na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n)$ priestoru V . Gramovým-Schmidtovým procesom prejdeme k ortonormálnej báze $(\underbrace{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k}_{\in S}, \underbrace{\vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n}_{\in S^\perp})$ priestoru

V. Potom ľubovoľný vektor $\vec{x} \in V$ má jediné vyjadrenie v tvare:

$$\vec{x} = \underbrace{x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_k \vec{a}_k}_{\in S} + \underbrace{x_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + x_n \vec{a}_n}_{\in S^\perp}. \text{ Označme } x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{x}_S,$$

$$x_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{x}_{S^\perp}. \text{ Máme } \vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}.$$

Jednoznačnosť vyjadrenia: Nech by tiež $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, pričom $\vec{a} \in S, \vec{b} \in S^\perp$. Chceme ukázať, že $\vec{a} = \vec{x}_S$ a $\vec{b} = \vec{x}_{S^\perp}$. Máme $\vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp} = \vec{a} + \vec{b}$, z čoho $\underbrace{\vec{x}_S - \vec{a}}_{\in S} = \underbrace{\vec{b} - \vec{x}_{S^\perp}}_{\in S^\perp}$. Rátajme:

$$0 \leq \langle \vec{x}_S - \vec{a}, \vec{b} - \vec{x}_{S^\perp} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x}_S, \vec{b} \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \vec{x}_S, \vec{x}_{S^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{x}_{S^\perp} \rangle}_{=0}. \text{ Teda } 0 = \langle \vec{x}_S - \vec{a},$$

$$\vec{b} - \vec{x}_{S^\perp} \rangle = \langle \vec{x}_S - \vec{a}, \vec{x}_S - \vec{a} \rangle = \langle \vec{b} - \vec{x}_{S^\perp}, \vec{b} - \vec{x}_{S^\perp} \rangle. \text{ Potom } \vec{x}_S - \vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{b} - \vec{x}_{S^\perp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_S = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{x}_{S^\perp}.$$

Veta 10.6. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je konečne generovaný euklidovský vektorový priestor.

Potom:

1. Ak $S \subset V$ je vektorový podpriestor, tak $(S^\perp)^\perp = S$.
2. Ak $S, T \subset V$ sú vektorové podpriestory, tak $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.

Dôkaz.

1. Pre ľubovoľné $\vec{x} \in S$ máme $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ pre ľubovoľný $\vec{y} \in S^\perp$. Teda $\vec{x} \in (S^\perp)^\perp$. Zistili sme, že $S \subset (S^\perp)^\perp$. Z vety 8.24. vieme, že $V = S \oplus S^\perp$ a $V = (S^\perp) \oplus (S^\perp)^\perp$. Z toho: $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(S^\perp) + \dim((S^\perp)^\perp)$. Teda $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$. Keďže aj $S \subset ((S^\perp)^\perp)$, máme $S = (S^\perp)^\perp$.
2. $((S^\perp + T^\perp)^\perp)^\perp = (S^\perp + T^\perp) = ((S^\perp)^\perp \cap (T^\perp)^\perp)^\perp = (S \cap T)^\perp$.

Definícia 10.7. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a $\{\vec{0}\} \neq S \subset V$ je vektorový podpriestor. Potom každý vektor $\vec{x} \in V$ má jediné vyjadrenie v tvare $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$, kde $\vec{x}_S \in S$ a $\vec{x}_{S^\perp} \in S^\perp$. Teda predpis, ktorý každému $\vec{x} \in V$ priradí $\vec{x}_S$ definuje zobrazenie $p: V \rightarrow V, p(\vec{x}) = \vec{x}_S$. Potom p sa nazýva *zobrazenie ortogonálnej projekcie* na podpriestor S .

Tvrdenie 10.3. Ak $\vec{x} \in S$, tak $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Dôkaz. Jediné také vyjadrenie je: $\vec{x} = \underbrace{\vec{x}}_{\in S} + \underbrace{\vec{0}}_{\in S^\perp}$. Teda $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Tvrdenie 10.4. $p(V) = S$.

Tvrdenie 10.5. $p \circ p = p$.

Dôkaz. Pre ľubovoľný $\vec{x} \in S$: $p \circ p(\vec{x}) = p(\underbrace{p(\vec{x})}_{\in S}) = p(\vec{x})$.

Tvrdenie 10.6. $p: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie.

Dôkaz. Ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom vieme, že $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$ a $\vec{y} = \vec{y}_S + \vec{y}_{S^\perp}$ sú jediné vyjadrenia svojho druhu. Potom $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \underbrace{\alpha(\vec{x}_S + \vec{y}_S)}_{\in S} + \underbrace{\beta(\vec{x}_{S^\perp} + \vec{y}_{S^\perp})}_{\in S^\perp}$ je jediné

vyjadrenie vektora $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$ ako súčet vektora z S a vektora z $S^\perp$. Podľa definície 8.24.: $p(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha(\vec{x}_S + \vec{y}_S) = \alpha \vec{x}_S + \beta \vec{y}_S = \alpha p(\vec{x}) + \beta p(\vec{y})$.

Príklad. Treba nájsť zobrazenie ortogonálnej projekcie na podpriestor S .

$S = [(1, 1, -1), (1, -1, 0)] \subset \mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom. Doplňme ortogonálnu bázu $((1, 1, -1), (1, -1, 0))$ podpriestoru S na ortogonálnu bázu priestoru $\mathbb{R}^3$. Nájdeme vektor $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ taký, že $\langle (k_1, k_2, k_3), (1, 1, -1) \rangle = 0$ a tiež:

$\langle (k_1, k_2, k_3), (1, -1, 0) \rangle = 0$. Z toho: $k_1 + k_2 - k_3 = 0$ a $k_1 - k_2 = 0$. Vyriešime, zoberieme napríklad $(-1, -1, -2)$. Teda $\underbrace{((1, 1, -1), (1, -1, 0))}_{\in S}, \underbrace{(-1, -1, -2)}_{\in S^\perp}$ je ortogonálna

báza v $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) = \underbrace{a(1, 1, -1) + b(1, -1, 0)}_{\in S} + \underbrace{c(-1, -1, -2)}_{\in S^\perp} \Rightarrow \begin{cases} a+b-c=x_1 \\ a-b-c=x_2 \\ -a-2c=x_3 \end{cases}$$

Vyriešime: $c = -\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + 2x_3)$, $b = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, $a = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - x_3)$. Teda pre ľubovoľný $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ platí:

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\frac{x_1 + x_2 - x_3}{3} \cdot (1, 1, -1) + \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot (1, -1, 0)}_{\in S} - \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{6} \cdot (-1, -1, -2)}_{\in S^\perp}$$

Teda $p(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{3} \cdot (1, 1, -1) + \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot (1, -1, 0)$;

$p(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5x_1 - x_2 - 2x_3}{6}, \frac{-x_1 + 5x_2 - 2x_3}{6}, \frac{-x_1 - x_2 + x_3}{3})$. Matica zobrazenia p :

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_p \text{ je symetrická. Súčet na diagonále: } \dim(S).$$

Definícia 10.8. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sú euklidovské vektorové priestory. Euklidovský izomorfizmus z V na W je lineárny izomorfizmus $f : V \rightarrow W$ taký, že $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Veta 10.7. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je n -rozmerný euklidovský vektorový priestor. Potom existuje euklidovský izomorfizmus z V na $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom.

Dôkaz. Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je nejaká ortonormálna báza vo V . Nech $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je štandardná báza v $\mathbb{R}^n$ (tá je tiež ortonormálna). Zo základnej vety o lineárnych zobrazeniach vieme, že existuje jediné lineárne zobrazenie $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ také, že $f(\vec{v}_i) = \vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Z inej vety vieme, že f je lineárny izomorfizmus. f je aj euklidovský izomorfizmus, lebo: $\langle f(x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n), f(y_1\vec{v}_1 + \dots + y_n\vec{v}_n) \rangle = \langle x_1f(\vec{v}_1) + \dots + x_nf(\vec{v}_n), y_1f(\vec{v}_1) + \dots + y_nf(\vec{v}_n) \rangle = \langle x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Ale aj $\langle x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n, y_1\vec{v}_1 + \dots + y_n\vec{v}_n \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Príklad. $\mathbb{R}^n$, euklidovský izomorfizmus: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je napr. $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ a $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$.

XI. AFINNÝ PRIESTOR (NAD $\mathbb{R}$)

Poznámka. afinita = spriaznenosť

Definícia 11.1. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina, ktorej prvky budeme označovať $A, B, \dots, X$ a budeme ich nazývať *bodmi*, a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ sa nazýva *afinný priestor*, ak body z $\mathcal{B}$ a vektory z V sú "spriaznené" podľa nasledujúcich pravidiel:

1° Pre každú usporiadanú dvojicu $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor z V , ktorý potom označíme $\overrightarrow{XY}$ (nazýva sa vektor prislúchajúci k dvojici $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$).

2° Pre každý $X \in \mathcal{B}$ a každý $\vec{x} \in V$ existuje jediný bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$.

3° Pre každé $X, Y, Z \in \mathcal{B}$: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Ak $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor a $\dim(V)=n$, tak hovoríme, že $\dim(\mathcal{A})=n$. (Ináč: $\mathcal{A}$ je n -rozmerný afinný priestor.)

Príklady.

1. $\mathcal{B}=\{B\}$, $V=\{\vec{0}\}$. $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je nulorozmerný afinný priestor.

2. $\mathcal{B}$ = množina bodov O_{xy} , V = vektorový priestor orientovaných úsečiek so začiatkom v O . $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ priradíme jediný vektor $\vec{x} \in V$, ktorý dostaneme tak, že orientovanú úsečku $\overrightarrow{XY}$ posunieme do bodu O . Axiómy afinného priestoru:

1° $\checkmark$ 2° $\checkmark$ 3° $\checkmark$.

$\mathcal{B}$ je bodová, V je vektorová zložka afinného priestoru.

3. Nech $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$, $V=\mathbb{R}^n$. 1°: Usporiadanej dvojici $(A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, kde $A=(a_1, \dots, a_n)$, $B=(b_1, \dots, b_n)$ priradíme vektor $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, \dots, b_n-a_n)$. 2°: Pre ľubovoľný bod $X=(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$ a ľubovoľný $\vec{a}=(a_1, \dots, a_n) \in V$ je $Y=(x_1+a_1, \dots, x_n+a_n) \in \mathcal{B}$ ten jediný bod, pre ktorý platí $\vec{a}=\overrightarrow{XY}$. 3°: $X=(x_1, \dots, x_n)$, $Y=(y_1, \dots, y_n)$, $Z=(z_1, \dots, z_n)$. $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y_1-x_1, \dots, y_n-x_n) + (z_1-y_1, \dots, z_n-y_n) = (z_1-x_1, \dots, z_n-x_n) = \overrightarrow{XZ}$ $\checkmark$. Teda $\mathcal{A}=(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je n -rozmerný afinný priestor.

4.

$$\text{Nech } (N) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \text{ je riešiteľný nehomogénny systém lineárnych}$$

rovníc nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ = množina všetkých riešení systému (N) . V = vektorový priestor všetkých riešení príslušného homogénneho systému. 1°: pre $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ definujeme $\overrightarrow{XY} = Y - X \in V$ je to riešenie príslušného homogénneho systému. 2°: pre ľubovoľný $A \in \mathcal{B}$ a ľubovoľný $\vec{a} \in V$ bude $A + \vec{a} = B \in \mathcal{B}$ jediný bod taký, že $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

3°: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = Y - X + Z - Y = Z - X = \overrightarrow{XZ}$.

Teda $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor dimenzie $n-h$ (matice systému).

Veta 11.1. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Potom:

1. $\overrightarrow{XX} = \vec{0} \in V$ pre $\forall X \in \mathcal{B}$.

2. Ak $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ST}$, tak $\overrightarrow{XS} = \overrightarrow{YT}$.

3. $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$ pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$.

Dôkaz.

1. $\overrightarrow{XX} + \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XX}$, preto $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$.

2. Predpokladajme, že $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ST}$. Potom $\overrightarrow{XS} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YS} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{YS} = \overrightarrow{YS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{YT}$.
 3. $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$. Preto $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.

Iná definícia afinného priestoru:

Definícia 11.1*. Afinným priestorom rozumieme trojicu: $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$, kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina (jej prvky sú body) a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (jeho prvky sú vektory) a $+$ je zobrazenie z $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, ktoré každej usporiadanej dvojici $(X, \vec{a}) \in \mathcal{B} \times V$ priradí jediný prvok z $\mathcal{B}$, ktorý potom označíme $X + \vec{a}$, pričom musia byť splnené podmienky:

- 1*: $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$ pre každé $X \in \mathcal{B}$ a každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$.
 2*: $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
 3*: pre ľubovoľné $Y, X \in \mathcal{B}$ existuje jediný $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$.

Obidve definície afinného priestoru sú ekvivalentné. tj. $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1 $\Leftrightarrow$ keď $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ (s vhodne definovaným $+$) je afinný priestor podľa *def* 11.1*.

Dôkaz. Predpokladajme, že $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor podľa *def* 11.1. Potom pre $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{a} \in V$ podľa podmienky 2° z *def* 11.1(*) existuje jediný $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\overrightarrow{XY} = \vec{a}$. Položíme: $Y = X + \vec{a}$. Tým sme definovali $+: \mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$. Overíme 1* 2* 3*.

1*: $(X + \vec{a}) + \vec{b} = Y + \vec{b} = Z$ podľa *def*: $\vec{a} = \overrightarrow{XY}$, $\vec{b} = \overrightarrow{YZ}$. Potom $X + (\vec{a} + \vec{b}) = X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = X + \overrightarrow{XZ} = Z$. Teda naozaj $X + (\vec{a} + \vec{b}) = X + (\vec{a} + \vec{b})$ 2*: $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$ (použili sme *vetu* 11.1). 3*: pre ľubovoľný $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{a} \in V$ je $Y = X + \vec{a}$ ten jediný bod. Teda $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1.

Predpokladajme, že $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle *def* 11.1*. Chceme ukázať, že $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ spĺňa 1°, 2° a 3° z *def* 11.1.

1°: Pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$ definujeme $\overrightarrow{XY} \in V$ ako ten jediný vektor z V (podľa 3*), pre ktorý $X + \overrightarrow{XY} = Y$.

2°: Pre každý bod $X \in \mathcal{B}$ a každé $\vec{a} \in V$ existuje jediný vektor $Y = X + \vec{a}$ taký, že $\overrightarrow{XY} = \vec{a}$.

3°: $X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) \stackrel{1*}{=} (X + \overrightarrow{XY}) + \overrightarrow{YZ} = Y + \overrightarrow{YZ} = Z = X + \overrightarrow{XZ} \Rightarrow \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ pre ľubovoľné $X, Y, Z \in \mathcal{B}$.

Pevne zvolíme bod $O \in \mathcal{B}$ v afinnom priestore $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$. Potom môžeme definovať zobrazenie $h: \mathcal{B} \rightarrow V$, $h(x) = \overrightarrow{OX}$.

Tvrdenie 11.1. Zobrazenie h je bijekcia.

Dôkaz. Definujme $g: V \rightarrow \mathcal{B}$, $g(\vec{a}) =$ len jediný $A \in \mathcal{B}$, pre ktorý $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Potom $g \circ h = id_{\mathcal{B}}$, $h \circ g = id_V$, $g \circ h(X) = g(\overrightarrow{OX}) = X$ a $h \circ g(\vec{a}) = h(A) = \vec{a}$.

Definícia 11.2. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Afinný podpriestor priestoru $\mathcal{A}$ je afinný priestor $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$, taký, že $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, V' je vektorový podpriestor priestoru V , a body z $\mathcal{B}'$ sú s vektormi z V' spriaznené podľa tých istých pravidiel, ako sú spriaznené body s vektormi v $\mathcal{A}$.

Príklad.

1. $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný podpriestor samého seba.
2. Ak $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$, $\mathcal{A}'' = (\mathcal{B}'', V'')$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$, tak $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = (\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'', V' \cap V'')$ je afinný podpriestor v $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ aj $\mathcal{A}$.

Definícia 11.3. Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$, $n \in \mathbb{N}$ je n -rozmerný afinný priestor. Potom 1-rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa nazýva *priamka* v $\mathcal{A}_n$, 2-rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa nazýva *rovina* v $\mathcal{A}_n$ a $(n-1)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$ sa volá *nadrovina* v $\mathcal{A}_n$.

Súradnice v afinnom priestore.

Definícia 11.4.

Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ je afinný priestor. Potom $(n+1)$ -tica $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}_n$ je pevne zvolený bod a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je pevne zvolená báza priestoru V_n ; sa nazýva *súradnicový systém* v $\mathcal{A}_n$.

Príklad.

V $\mathcal{A}_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(n+1)$ -tica $((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ je súradnicový systém.

Priradenie súradníc.

Nech $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je súradnicový systém v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Pre ľubovoľný bod $X \in \mathcal{B}_n$ existuje jediný vektor $\vec{OX} \in V_n$. Potom existuje jediná n -tica $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ taká, že $\vec{OX} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$. Potom usporiadaná n -tica $(x_1, \dots, x_n)$ je n -tica *súradníc* bodu X vzhľadom na súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. $\vec{OX}$ sa nazýva aj *polohový vektor* bodu X . Teda vlastne súradnice bodu sú súradnice jeho polohového vektora vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Stručne píšeme $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$. Pre vektor $\vec{b} \in V_n$ jeho súradnice vzhľadom na súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ sú jeho súradnice vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. $\vec{b} = b_1 \vec{a}_1 + \dots + b_n \vec{a}_n$, $\vec{b} \equiv (b_1, \dots, b_n)$.

Tvrdenie 11.2. Nech $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je súradnicový systém v afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Ak $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $Y \equiv (y_1, \dots, y_n)$ tak vektor $\vec{XY}$ má súradnice: $\vec{XY} \equiv (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Dôkaz. Máme $\vec{OX} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$, $\vec{OY} = y_1 \vec{a}_1 + \dots + y_n \vec{a}_n$. $\vec{XY} = \vec{XO} + \vec{OY} = -\vec{OX} + \vec{OY} = (y_1 - x_1) \vec{a}_1 + \dots + (y_n - x_n) \vec{a}_n$.

Príklad. Pre $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ súradnicový systém $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$. $X = (x_1, x_2)$. $\vec{OX} = (x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$. $X \equiv (x_1, x_2)$.

Afinné zobrazenie.

Definícia 11.5.

Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ a $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$ sú afinné priestory. Potom *afinné zobrazenie* z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$ je dvojica (f, φ) , kde $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ a $\varphi : V \rightarrow V'$ sú lineárne zobrazenia a okrem toho $\varphi(\vec{XY}) = \vec{f(X)f(Y)}$. f je tzv. bodová zložka, φ je tzv. lineárna zložka afinného zobrazenia $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Poznámka. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor v zmysle def 11.1*. Potom vieme, že pre ľubovoľnú $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný $\vec{x} \in V$ taký, že $X + \vec{x} = Y$. Potom označme $\vec{x} = Y - X = \vec{XY}$. Potom podmienku $\varphi(\vec{XY}) = \vec{f(X)f(Y)}$ z def 11.5 môžeme napísať $\varphi(Y - X) = f(Y) - f(X)$.

Príklad. V afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ zvolíme pevne súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Definujeme $f : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(X) = (x_1, \dots, x_n)$, kde $(x_1, \dots, x_n)$ sú súradnice bodu X . Podobne definujeme $\varphi : V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\vec{b}) = (b_1, \dots, b_n)$, kde $(b_1, \dots, b_n)$ sú súradnice vektora $\vec{b}$. Potom $(f, \varphi) : (\mathcal{B}_n, V_n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je afinné zobrazenie.

Definícia 11.6. Afinné zobrazenie $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je *afinný izomorfizmus*, ak f je lineárny izomorfizmus.

Veta 11.2. Afinné zobrazenie $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je *afinný izomorfizmus* $\Leftrightarrow$ keď φ je lineárny izomorfizmus.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Pevne zvolíme bod $P \in \mathcal{B}$. Označme $P' = f(P)$. Predpokladajme, že (f, φ) je afinný izomorfizmus. Chceme ukázať, že $\varphi : V \rightarrow V'$ je lineárny izomorfizmus. Stačí ukázať, že φ je bijektívne. *Surjektívnosť:* Nech $\vec{b} \in V$. Potom $\vec{b} = \overrightarrow{P'B}$ pre jednoznačne určený bod B . Keďže f je bijekcia, existuje jediný bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $f(Y) = B$, teda $\vec{b} = \overrightarrow{f(P)f(Y)} = \varphi(\overrightarrow{PY})$. Teda $\vec{b}$ má vzor $\overrightarrow{PY} \in V$. *Injektívnosť:* Nech $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b})$. Chceme ukázať, že $\vec{a} = \vec{b}$. Máme $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ pre jednoznačne určené $P \in \mathcal{B}$. Teda $\varphi(\overrightarrow{PA}) = \varphi(\overrightarrow{PB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(P)f(A)} = \overrightarrow{f(P)f(B)}$. Z toho $f(A) = f(B)$ je bijekcia, preto $A = B$. Vcelku: $\vec{a} = \vec{b}$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\varphi : V \rightarrow V'$ je lineárny izomorfizmus. Chceme ukázať, že f je bijekcia. *Surjektívnosť:* Nech $Y \in \mathcal{B}'$ je ľubovoľný. Potom $\overrightarrow{PY}$ má jediný vzor, povedzme $\varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{PY}$. Pritom: $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ pre jediné $A \in \mathcal{B}$. $\overrightarrow{P'f(A)} = \overrightarrow{f(P)f(A)} = \varphi(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{PY}$ z toho: $Y = f(A)$. *Injektívnosť:* Predpokladajme, že $f(A) = f(B)$. Chceme ukázať, že $A = B$. $\varphi(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{f(P)f(A)} = \overrightarrow{P'f(A)} = \overrightarrow{P'f(B)} = \overrightarrow{f(P)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{PB})$ a preto $A = B$.

Poznámka. Afinné zobrazenie (f, φ) určené zavedením súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ má bijektívne f , a preto je to aj afinný izomorfizmus z $\mathcal{A}_n$ na $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Definícia 11.7. Ak existuje afinný izomorfizmus $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tak hovoríme, že afinný priestor $\mathcal{A}$ je afinne izomorfný s afinným priestorom $\mathcal{A}'$. Ak $\mathcal{A}$ je afinne izomorfný s $\mathcal{A}'$, tak tiež je $\mathcal{A}'$ afinne izomorfný s $\mathcal{A}$. V takom prípade môžeme povedať, že $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ sú navzájom izomorfné.

Príklad.

Zavedením súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ vlastne definujeme afinný izomorfizmus z $(\mathcal{B}_n, V_n)$ na $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Teda každý n -rozmerný afinný priestor je afinne izomorfný s afinným priestorom $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Veta 11.3. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je afinné zobrazenie. Potom pre $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ máme $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi + f(0, \dots, 0)$. Pritom v $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ máme súradnicový systém $((0, \dots, 0), \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ v $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ súradnicový systém: $((0, \dots, 0), \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Dôkaz. Vieme, že $\varphi(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi$ pre každé $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$:
 $(x_1, \dots, x_k) = \overrightarrow{(0, \dots, 0)(x_1, \dots, x_k)}, (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi = \varphi(\overrightarrow{(0, \dots, 0)(x_1, \dots, x_k)}) =$

$\overrightarrow{f(0, \dots, 0)f(x_1, \dots, x_k)} \cdot f(x_1, \dots, x_k) - f(0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi$.
Teda $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k) \cdot \mathbf{M}_\varphi + f(0, \dots, 0)$.

Barycentrický súradnicový systém.

Budeme používať *def* 11.1*.

Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Vieme, že pre ľubovoľné $X, Y \in \mathcal{B}$ existuje jediný vektor $\vec{x} \in V$ taký, že $X + \vec{x} = Y$. Označili sme $\vec{x} = Y - X$. Platí:

1. $(A - B) + (B - C) = A - C \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} = A - C$.
2. $X - X = \vec{0} \quad \forall X \in \mathcal{B}$.
3. $(X + \vec{x}) - (A + \vec{y}) = (X - A) + \vec{x} - \vec{y}$.

Definícia 11.8. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$ je afinný priestor, nech $A_0, A_1, \dots, A_s \in \mathcal{B}$ sú ľubovoľné body a nech $x_0, x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{i=0}^s x_i = 1$. Potom definujeme bod

z $\mathcal{B}$: $\sum_{i=0}^s x_i A_i := A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A)$, kde $A \in \mathcal{B}$ je ľubovoľný bod. Bod $\sum_{i=0}^s x_i A_i$ sa nazýva *barycentrická kombinácia* bodov $A_0, \dots, A_s$ s koeficientmi $x_0, \dots, x_s$.

Ukážeme, že *def* 11.8 barycentrickej kombinácie bodov je dobrá, tj. že nezávisí od voľby A . Takto: Nech $B \in \mathcal{B}$ je ľubovoľný bod. Potom vieme, že existuje jediný

$$\begin{aligned} \vec{x} \in V \text{ taký, že } B &= A + \vec{x}. \text{ Potom } B + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - B) = A + \vec{x} + \sum_{i=0}^s x_i ((A_i - A) - \vec{x}) = \\ &= A + \vec{x} + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A) - \sum_{i=0}^s x_i \vec{x} = A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A) + \vec{x} - \left(\sum_{i=0}^s x_i \right) \vec{x} = \\ &= A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A). \end{aligned}$$

Veta 11.4 a Definícia 11.9. Nech $A_0, A_1, \dots, A_n$ sú body n -rozmerného afinného priestoru $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Potom: $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém afinného priestoru $\mathcal{A}_n$ (v zmysle definície) práve vtedy, keď každý bod $X \in \mathcal{B}_n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako barycentrická kombinácia $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Ak je toto splnené, potom $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ sa volá *barycentrický súradnicový systém* priestoru $\mathcal{A}_n$; $(x_0, \dots, x_n)$ sú barycentrické súradnice bodu X .

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém. Nech $X \in \mathcal{B}_n$ je ľubovoľný bod. Potom existuje jediný vektor $\vec{x} \in V_n$ taký, že $X = A_0 + \vec{x}$. Keďže $(A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je báza vo V_n , preto existujú jednoznačne určené

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}: \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0). \text{ Z toho: } X = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0). \text{ Zoberme}$$

$$x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i. \text{ Potom } X = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i A_i. \text{ Jednoznačnosť: Nech by}$$

$$X = \sum_{i=0}^n x_i A_i = \sum_{i=0}^n x'_i A'_i. \text{ Máme vlastne: } A_0 + \sum_{i=1}^n x_i (A_i - A_0) = A_0 + \sum_{i=1}^n x'_i (A_i - A_0).$$

Z toho: $\sum_{i=0,1}^n x_i(A_i - A_0) = \sum_{i=0,1}^n x'_i(A_i - A_0)$. Pretože $(A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je báza,

musí platiť $x_i = x'_i$ pre $i=1, \dots, n$. Potom tiež $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i = 1 - \sum_{i=1}^n x'_i = x'_0$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že každý bod $z \in \mathcal{B}_n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako barycentrická kombinácia bodov $A_0, \dots, A_n$. Chceme ukázať, že $(A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je súradnicový systém v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Stačí ukázať, že $(A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je báza vo V_n . Pretože vieme, že $\dim(V_n) = n$, stačí ukázať, že $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ generujú celé V_n . Nech $\vec{b} \in V_n$ je ľubovoľný vektor. Z axióm afinného priestoru vieme, že k bodu A_0 a vektoru $\vec{b}$ existuje jediný bod $B \in \mathcal{B}_n$ taký, že $\vec{b} = B - A_0$. Z nášho predpokladu vyplýva, že existuje jediné vyjadrenie B v tvare $B = \sum_{i=0}^n y_i A_i$ (kde $\sum_{i=0}^n y_i = 1$.) Z toho: $\vec{b} = \left(\sum_{i=0}^n y_i A_i \right) - A_0 = A_0 + \sum_{i=0}^n y_i (A_i - A_0) - A_0 = \sum_{i=1}^n y_i (A_i - A_0)$. Teda naozaj $[A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0] = V_n$.

Veta 11.5. Nech $(f, \varphi) : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}', V')$ je afinné zobrazenie. Potom pre ľubovoľnú barycentrickú kombináciu $\sum_{i=0}^n x_i A_i$ ľubovoľných bodov $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ máme

$$f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i).$$

Dôkaz. Označme $B = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Body A_0, B určujú jediný vektor $\vec{x} \in V$ taký, že $B = A_0 + \vec{x}$, teda $\vec{x} = B - A_0$. Potom $\varphi(B - A_0) = f(B) - f(A_0)$. Pritom $B - A_0 = A_0 + \sum_{i=0}^n y_i (A_i - A_0) - A_0 = \sum_{i=0}^n x_i (A_i - A_0)$.
 $f(B) - f(A_0) = \varphi(B - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i \varphi(A_i - A_0) = \sum_{i=0}^n x_i (f(A_i) - f(A_0)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = f(B) = f(A_0) + \sum_{i=0}^n x_i (f(A_i) - f(A_0)) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i).$

Veta 11.6. (o afinných zobrazeniach):

Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ je n -rozmerný afinný priestor a nech $(A_0, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém v ňom. Nech $B_0, \dots, B_n$ sú ľubovoľné body afinného priestoru $\mathcal{A}'_n = (\mathcal{B}'_n, V'_n)$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'_n$ také, že $f(A_i) = B_i$ pre $i=0, \dots, n$.

Dôkaz. Vieme, že každý bod $X \in \mathcal{B}_n$ má jediné vyjadrenie v tvare $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$. Ak existuje afinné zobrazenie $(f, \varphi) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ také, že $f(A_i) = B_i$, $i=0, \dots, n$ tak musí byť $f(X) = f\left(\sum_{i=0}^n x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^n x_i f(A_i) = \sum_{i=0}^n x_i B_i$. Teraz definujme zobrazenie

$(f, \varphi) : (\mathcal{B}_n, V_n) \rightarrow \mathcal{A}'$ práve takto: $f(\sum_{i=0}^n x_i A_i) = \sum_{i=0}^n x_i B_i$. Treba ešte ukázať, že f

(a ním určené $\varphi : V \rightarrow V'$) je afinné zobrazenie. Pre $X = \sum_{i=0}^n x_i A_i$, $Y = \sum_{i=0}^n b_i A_i$ je

$$\begin{aligned} \varphi(Y-X) &:= f(X) - f(Y) = \sum_{i=0}^n (x_i - b_i) B_i. \text{ Stačí ukázať, že } \varphi \text{ je lineárne. Ľubovoľné} \\ &\text{dva vektory } \vec{a}, \vec{c} \in V_n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{a} = A - A_0, \vec{c} = C - A_0. \text{ Potom } \varphi(\alpha A + \beta C) = \\ &= \varphi(\alpha(A - A_0) + \beta(C - A_0)) = \varphi(\alpha(\sum_{i=0}^n a_i A_i - A_0) + \beta(\sum_{i=0}^n c_i A_i - A_0)) = \\ &= \varphi(\alpha(\sum_{i=0}^n a_i (A_i - A_0)) + \beta(\sum_{i=0}^n c_i (A_i - A_0))) = \alpha \varphi(\vec{a}) + \beta \varphi(\vec{c}). \end{aligned}$$

Poznámka. barycenter = ťažisko.

V n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ body $A_0, \dots, A_n$; pričom každý z nich má jednotlivú hmotnosť, predpokladjme, že $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ nech sú lineárne nezávislé. Teda $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém. Bod, ktorého barycentrické súradnice sú $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ je ťažisko sústavy hmotných bodov $A_0, \dots, A_n$. Napríklad pre $n=2$: $\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1 = A_0 + \frac{1}{2}(A_1 - A_0)$.

Definícia 11.10. V afinnom priestore $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ majme body $A_0 = (1, 0, \dots, 0)$ až $A_{n-1} = (0, \dots, 0, 1)$. Potom množina $\Delta^n = \{\sum_{i=0}^{n-1} x_i A_i; \sum x_i = 1; x_i \geq 0\}$ sa nazýva n -rozmerný *simplex*. Simplexy sa používajú v topológii, geometrii, v optimalizačných metódach.

Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru.

Veta 11.7. V n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ majme pevne zvolený súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech $\tilde{\mathcal{A}}_k = (\tilde{\mathcal{B}}_k, \tilde{V}_k)$ je k -rozmerný afinný podpriestor v $\mathcal{A}_n$. Nech $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ je dajaký bod z $\tilde{\mathcal{A}}_k$, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báza vo $\tilde{V}_k$ pričom $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1)$, $\dots$, $\vec{b}_k \equiv (b_1^k, \dots, b_n^k)$. Potom pre ľubovoľný bod $X \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ platí $\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{b}_1 t_1 + \dots + \vec{b}_k t_k$ pre vhodné $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Obrátene, ak pre dajaký vektor $\vec{x} \in V_n$ platí $\vec{x} = \vec{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$ pre dajaké $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$, tak $\vec{x}$ je polohový vektor dajakého bodu z $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Z toho: bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ patrí do $\tilde{\mathcal{A}}_k$

$$\text{práve vtedy, keď } (R) \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k \\ \dots \\ x_n = a_n + b_n^1 + \dots + b_n^k t_k \end{cases}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}. \text{ Čísla } t_1, \dots, t_k$$

sa volajú *parametre*. Systém R je tzv. *parametrické vyjadrenie* $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Dôkaz. Nech $X \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Máme $A \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. K dvojici $(A, X) \in \tilde{\mathcal{B}}_k \times \tilde{\mathcal{B}}_k$ patrí jediný vektor $\vec{AX} \in \tilde{V}_k$. Vo $\tilde{V}_k$ máme bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ preto $\vec{AX} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$ pre jednoznačne určené $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. $\vec{AX} = \vec{AO} + \vec{OX} = \vec{OX} - \vec{OA} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$. Z toho $\vec{OX} = \vec{OA} + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_k \vec{b}_k$.

Obrátene: nech $\vec{x} = \vec{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$. Chceme ukázať, že $\vec{x} = \vec{OY}$ pre dajaké $Y \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Pretože $\vec{OA} \in \tilde{V}_k$ ale aj $s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k \in \tilde{V}_k$ máme: $\vec{x} \in \tilde{V}_k$. Zároveň $A \in \tilde{\mathcal{B}}_k$.

Z axióm afinného priestoru existuje jediný bod $Y' \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ taký, že $\overrightarrow{AY'} = \overrightarrow{OA} + s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$. tj. $\overrightarrow{AY'} - \overrightarrow{OA} = s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k$. K bodu $A \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ a vektoru $s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k \in \tilde{V}_k$ existuje jediný bod $Y \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ taký, že $s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_k \vec{b}_k = \overrightarrow{AY}$. Z toho $\overrightarrow{AY'} = \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{OY}$.

Poznámka. V situácii ako vo vete sa $\tilde{V}_k$ nazýva *smerový priestor* afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_k$, a bázové vektory $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ sú *smerové vektory* afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Z vety je jasné, že afinný podpriestor $\tilde{\mathcal{A}}_k$ je úplne jednoznačne určený jedným bodom A a smerovými vektormi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$.

Všeobecné (analytické) vyjadrenie afinného podpriestoru.

Nech je daný k -rozmerný afinný podpriestor $\tilde{\mathcal{A}}_k = (\tilde{\mathcal{B}}_k, \tilde{V}_k)$ n -rozmerného afinného podpriestoru $\tilde{\mathcal{A}}_n = (\tilde{\mathcal{B}}_n, \tilde{V}_n)$ s pevne zvoleným súradnicovým systémom. Nech $\tilde{\mathcal{A}}_k$ je určený bodom $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ a smerovými vektormi $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, \vec{b}_k \equiv (b_1^k, \dots, b_n^k)$. Teda parametrické vyjadrenie je:

$$\tilde{\mathcal{A}}_k \equiv \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k \\ \dots \\ x_n = a_n + b_n^1 t_1 + \dots + b_n^k t_k \end{cases} \quad t_i \in \mathbb{R}$$

Matica $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^k \end{pmatrix}$ má k lineárne nezávislých stĺpcov (lebo $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ sú lineárne nezávislé.) Teda $h(\mathbf{B}) = k$ z toho $\mathbf{B}$ má k lineárne nezávislých riadkov, nech sú to riadky s indexmi $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

$$(P) = \begin{cases} b_1^1 t_1 + \dots + b_1^k t_k = x_1 - a_1 \\ \dots \\ b_n^1 t_1 + \dots + b_n^k t_k = x_n - a_n \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} b_{i_1}^1 t_1 + \dots + b_{i_1}^k t_k = x_{i_1} - a_{i_1} \\ \dots \\ b_{i_k}^1 t_1 + \dots + b_{i_k}^k t_k = x_{i_k} - a_{i_k} \end{cases}$$

Máme $h \begin{pmatrix} b_{i_1}^1 & \dots & b_{i_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k}^1 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix} = k \Rightarrow$. Systém $(*)$ má jediné riešenie, vyrátame ho z Cramerovho pravidla:

$$t_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} & b_{i_1}^2 & \dots & b_{i_1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_k} - a_{i_k} & b_{i_k}^2 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_{i_1}^1 & \dots & b_{i_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k}^1 & \dots & b_{i_k}^k \end{pmatrix}} = \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \dots t_k = \frac{\det(\dots)}{\det(\dots)} = \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

$\ell_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ sú lineárne funkcie. Teraz dosadíme $t_1, \dots, t_k$ do zvyšných $n-k$ rovníc parametrického vyjadrenia. $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ nech je doplnok ku $\{i_1, \dots, i_k\}$ v $\{1, \dots, n\}$. Dostaneme: $b_{j_1}^1 \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) + \dots + b_{j_1}^k \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = x_{j_1} - a_{j_1} \dots b_{j_{n-k}}^1 \ell_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) + \dots + b_{j_{n-k}}^k \ell_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = x_{j_{n-k}} - a_{j_{n-k}}$. tj. systém $n-k$

lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, \dots, x_n$. Matica tohto systému má hodnotu $n-k$. Teda ľubovoľný bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ z $\tilde{\mathcal{A}}_k$ spĺňa (svojimi súradnicami) lineárny systém tvaru:

$$(V) \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \dots \\ c_{n-k1}x_1 + \dots + c_{n-kn}x_n = d_{n-k} \end{cases} \quad \text{kde } c_{ij}, d_j \in \mathbb{R} \text{ a } h \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-k1} & \dots & c_{n-kn} \end{pmatrix} = n-k$$

Jedno riešenie je: $(a_1, \dots, a_n)$. Potom sú riešeniami aj n -tice: $(a_1 + b_1^1, \dots, a_n + b_n^1), \dots, (a_1 + b_k^1, \dots, a_n + b_n^k)$. Báza je k lineárne nezávislých riešení homogénneho systému patriaceho k (V) : $((b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_k^1, \dots, b_n^k))$.

$(x_1, \dots, x_k) = (a_1, \dots, a_n) + s_1(b_1^1, \dots, b_n^1) + \dots + s_k(b_k^1, \dots, b_n^k) =$ množina bodov vyhovujúcich (P) tj. súradnice bodov z $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Veta 11.8. (o všeobecnej rovnici nadroviny)

Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ je nadrovina v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$ (s pevne zvoleným súradnicovým systémom v $\mathcal{A}_n$.) Ak $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ je bod z α a $\vec{b}_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, \vec{b}_{n-1} \equiv (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$ sú smerové vektory (teda tvoria bázu) priestoru $\mathcal{V}(\alpha)$. Potom všeobecná rovnica nadroviny α je:

$$\alpha \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Dôkaz. Nech $X = (x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľný bod z α . Potom $(P, X) \in \mathcal{B}(\alpha) \times \mathcal{B}(\alpha)$ jednoznačne určuje vektor $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$. Vieme, že $\overrightarrow{PX} \equiv (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je lineárna kombinácia $(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$.

$$\text{Preto: } \det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Obrátene:

Nech $X \in \mathcal{B}_n$, $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ je taký bod, že $\det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$. Chceme ukázať, že $X \in \mathcal{B}(\alpha)$. Ekvivalentne máme: $\det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$. Z toho

$(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je lineárna kombinácia $(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, (b_1^{n-1}, \dots, b_n^{n-1})$.

Teda vektor $\overrightarrow{PX}$ je lineárnou kombináciou $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}$, teda $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$. K bodu $P \in \mathcal{B}(\alpha)$ a vektoru $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{V}(\alpha)$ existuje jediný bod $X' \in \mathcal{B}(\alpha)$ taký, že $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX'}$. Z toho: $X = X'$. Teda $X \in \mathcal{B}(\alpha)$.

Vzájomné polohy afinných podpriestorov.

Definícia 11.11. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ a $\beta = (\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$, $\dim(\mathcal{A}_n) = n$. Potom hovoríme, že:

1. α a β sú *rovnobežné* ($\alpha \parallel \beta$), ak $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$ alebo $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$.
2. α a β sú *rôznobežné*, ak $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$ a $\mathcal{B}(\alpha) \not\subset \mathcal{B}(\beta)$, $\mathcal{B}(\beta) \not\subset \mathcal{B}(\alpha)$.
3. α a β sú *mimobežné*, ak $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$ a $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) = \{\vec{0}\}$.

Poznámka. V aspoň 4-rozmernom afinnom priestore uvedené tri nie sú všetky možné vzájomné polohy afinných podpriestorov α, β .

Príklad. $\mathcal{A}_4 = (\mathcal{B}_4, \mathcal{V}_4)$, nech $\mathcal{V}_4$ má bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. Zvoľme bod $A \in \mathcal{B}_4$. Vieme, že k bodu A a vektoru $\vec{a}_1$ $\exists! B \in \mathcal{B}_4 : \vec{a}_1 = \overrightarrow{AB}$. Zoberme dve roviny α, β v $\mathcal{A}_4$ taketo: α je určené bodom A a smerovými vektormi $\vec{a}_2, \vec{a}_3$; β je určené bodom B a smerovými vektormi $\vec{a}_3, \vec{a}_4$. Potom α a β nie sú rovnobežné, lebo $\mathcal{V}(\alpha) \not\subset \mathcal{V}(\beta)$ ani $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$; nie sú ani mimobežné, lebo $\{\vec{a}_3\} \subset \mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) \neq \{\vec{0}\}$. Nie sú ani rôznobežné, lebo $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Nech by $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Teda existuje $X \in \alpha \cap \beta$. Potom $\overrightarrow{AX} \in \mathcal{V}(\alpha)$ tj. $\overrightarrow{AX} = \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$; $\overrightarrow{XB} \in \mathcal{V}(\beta)$ tj. $\overrightarrow{XB} = \beta_3 \vec{a}_3 + \beta_4 \vec{a}_4$. Z toho: $\vec{a}_1 = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = \alpha_2 \vec{a}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{a}_3 + \beta_4 \vec{a}_4$ – nemožné, lebo $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_1$ sú lineárne nezávislé.

V $\mathcal{A}_n$ pre $n \geq 4$ sú možné javy, ktoré si nevieme predstaviť. Napr. v $\mathcal{A}_4$ sú $\alpha \equiv \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$ roviny, ktoré sa pretínajú v jedinom bode: $(0, 0, 0, 0)$.

Veta 11.9. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$ a $\beta = (\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$.

1. Ak $\dim(\alpha) = \dim(\beta)$, tak v prípade, že $\alpha \parallel \beta$ máme $\alpha = \beta$ alebo $\alpha \cap \beta = \emptyset$.
2. Ak $\dim(\alpha) \neq \dim(\beta)$, tak v prípade, že $\alpha \parallel \beta$ máme buď $\alpha \cap \beta = \emptyset$ alebo $\alpha \subset \beta$ alebo $\beta \subset \alpha$.

Dôkaz.

1. Nech $\dim(\alpha) = \dim(\beta)$, $\alpha \parallel \beta$. Predpokladajme, že $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Teda existuje bod $A \in \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Máme $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$ alebo $\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{V}(\alpha)$. Z rovnosti dimenzie $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$. Teda α a β sú určené bodom A a tým istým smerovým priestorom $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$ preto $\alpha = \beta$.
2. Povedzme, že $\dim(\alpha) < \dim(\beta)$. $\alpha \parallel \beta$; ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, tak existuje $A \in \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Z toho, že $\alpha \parallel \beta$ a $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Jasný, že $\alpha \subset \beta$.

Veta 11.10. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{V}(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), \mathcal{V}(\beta))$ sú afinné podpriestory v $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$ nech $2 \leq \dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Potom: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow$ každá priamka v α je rovnobežná s β .

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\alpha \parallel \beta$. Teda $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Nech $p = (\mathcal{B}(p), \mathcal{V}(p))$ je ľubovoľná priamka v α . Teda $\mathcal{B}(p) \subset \mathcal{B}(\alpha)$, $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{V}(\alpha)$ potom $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{V}(\beta)$. Z definície rovnobežnosti: $p \parallel \beta$.

$\Leftarrow$: Zoberme ľubovoľný vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}(\alpha)$. Chceme ukázať, že $\vec{a} \in \mathcal{V}(\beta)$. Nech $A \in \mathcal{B}(\alpha)$ je ľubovoľný bod. Potom A a $\vec{a}$ určia priamku $q = (\mathcal{B}(q), \mathcal{V}(q))$ v α ; $A \in \mathcal{B}(q)$, $\mathcal{V}(q) = [\vec{a}]$. Podľa terajšieho predpokladu každá priamka v α je rovnobežná s β . Teda $q \parallel \beta$ tj. $\vec{a} \in \mathcal{V}(q) \subset \mathcal{V}(\beta)$ a teda $\vec{a} \in \mathcal{V}(\beta)$. Zistili sme, že $\mathcal{V}(\alpha) \subset \mathcal{V}(\beta)$, teda $\alpha \parallel \beta$.

Zmena súradníc pri zmene súradnicového systému.*Vo vektorovom priestore :*

Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve bázy daného vektorového priestoru V . Máme jednoznačné vyjadrenie: $\vec{a}_1 = p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n$ až $\vec{a}_n = p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n$.

Potom $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$ sa nazýva *matica prechodu* od bázy $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Obrátene máme jednoznačné vyjadrenie: $\vec{a}'_1 = p'_{11}\vec{a}_1 + \dots + p'_{1n}\vec{a}_n$ až $\vec{a}'_n = p'_{n1}\vec{a}_1 + \dots + p'_{nn}\vec{a}_n$. $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} p'_{11} & \dots & p'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{n1} & \dots & p'_{nn} \end{pmatrix}$ je matica prechodu od bázy $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k báze $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$.

Máme: $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j$, $\vec{a}'_j = \sum_{s=1}^n p'_{js} \vec{a}_s$. Z toho: $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n p'_{js} \vec{a}_s = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} p'_{js} \vec{a}_s$. Z jednoznačnosti vyjadrenia $\vec{a}_i$ v tvare lineárnej kombinácie $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dostávame, že $\sum_{j=1}^n p_{ij} p'_{js} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i=s \\ 0, & \text{ak } i \neq s \end{cases}$ Teda $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}_n$.

Zistili sme, že $\mathbf{P}$ je regulárna a $\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1}$.

Veta 11.11. Matica prechodu od jednej bázy k druhej je regulárna, pričom matica opačného prechodu je k nej inverzná.

Veta 11.12. Nech $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je báza priestoru V a matica $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulárna. Definujme vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ takto: $\vec{a}_1 = p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n$ až $\vec{a}_n = p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n$. Potom $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza priestoru V .

Dôkaz. Vzhľadom na to, že vieme $\dim(V) = n$, stačí dokázať, že $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé. Nech $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\forall i : \alpha_i = 0$. Máme: $\alpha_1(p_{11}\vec{a}'_1 + \dots + p_{1n}\vec{a}'_n) + \dots + \alpha_n(p_{n1}\vec{a}'_1 + \dots + p_{nn}\vec{a}'_n) = \vec{0}$. $(\alpha_1 p_{11} + \dots + \alpha_n p_{n1})\vec{a}'_1 + \dots + (\alpha_1 p_{1n} + \dots + \alpha_n p_{nn})\vec{a}'_n = \vec{0}$. Ale $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je báza, preto:

$$(*) \begin{cases} \alpha_1 p_{11} + \dots + \alpha_n p_{n1} = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 p_{1n} + \dots + \alpha_n p_{nn} = 0 \end{cases} \quad \text{Matica systému je: } \mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Pretože $h(\mathbf{P}^T) = h(\mathbf{P})$ a $\mathbf{P}$ je podľa predpokladu regulárna, je aj $\mathbf{P}^T$ regulárna. Preto $(*)$ má iba nulové riešenie, tj. $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Zmena súradníc vektora.

Vo V majme dve bázy $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Nech $\vec{x} \in V$ je ľubovoľný vektor, nech $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $\vec{x} \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Aký je vzťah medzi $(x_1, \dots, x_n)$ a $(x'_1, \dots, x'_n)$?

Nech $\mathbf{P} = (p_{ij})$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Máme vlastne:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}'_i. \quad \text{Vieme, že } \vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j. \quad \text{Z toho: } \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i p_{ij} \right) \vec{a}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \vec{a}'_j. \text{ Z jednoznačnosti vyjadrenia vyplýva,}$$

že $x'_j = \sum_{i=1}^n x_i p_{ij} \Rightarrow (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{P}$. Stručnejšie: $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ a

$$\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n) \Rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}'\mathbf{P}'.$$

V afinnom priestore: Súradnicový systém $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ v n -rozmernom afinnom priestore $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{V}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}_n$ a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo $\mathcal{V}_n$. Iný súradnicový systém v $\mathcal{A}_n$: $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Aký je vzťah medzi súradnicami vektora resp. bodu vzhľadom na prvý a druhý súradnicový systém v $\mathcal{A}_n$. Pre vektory je to jasné: súradnice sú v takom vzťahu, ako sme to opísali vyššie vo vektorovom priestore. tj. ak $\vec{x} \in \mathcal{V}_n$, $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$; $\vec{x} \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, tak $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Pre body: 1.krok: $O = O'$. (Zmenia sa len bázy vo $\mathcal{V}_n$). Súradnice bodu X sa rovnajú súradnice polohového vektora $\vec{OX}_i$. Vzťah medzi súradnicami v $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a v systéme $(O, \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ je určený vzťahom $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je matica prechodu od "čiarkovanej" k "nečiarkovanej".

2.krok: Zmeníme len začiatok, tj. od súradnicového systému $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ prejdeme k $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech O má v "novom" súradnicovom systéme $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(b_1, \dots, b_n)$. Teda $\vec{O'O} = b_1 \vec{a}_1 + \dots + b_n \vec{a}_n$. Bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $X \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$ v "novom"

$$(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \Rightarrow \vec{OX} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i; \quad \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \vec{O'X}.$$

Aký je vzťah medzi $(x_1, \dots, x_n)$ a $(x'_1, \dots, x'_n)$?

$$\text{Máme } \vec{O'X} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \vec{O'O} + \vec{OX} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x'_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n b_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (x_i + b_i) \vec{a}_i.$$

$$\text{Teda: } (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n) + (b_1, \dots, b_n). \quad \mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{B}.$$

Všeobecne: spojením týchto dvoch krokov dostaneme prechod od $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Zmena súradníc potom je zložením dvoch čiastkových zmien. Nech $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ súradnice bodu z $\mathcal{B}_n$ v súradnicovom systéme $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$; a nech $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sú jeho súradnice v súradnicovom systéme $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Nech $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ sú súradnice bodu O v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Potom platí: $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P} + \mathbf{B}$.

Orientácia reálneho vektorového resp. afinného priestoru.

Orientácia reálneho vektorového priestoru:

Definícia 11.12. Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých báz n -rozmerného reálneho vektorového priestoru V . Potom povieme, že dve bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ a $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ sú v relácii $\sim$ zapíšeme $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, ak matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ má kladný determinant.

Tvrdenie 11.3. $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathcal{U}$.

Dôkaz. Reflexivita: $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ pre ľubovoľnú $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathcal{U}$, lebo matica prechodu je $\mathbf{I}_n$ a $\det(\mathbf{I}_n) = 1$. *Symetrickosť*: nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$. Matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ nech je $\mathbf{P}$. Vieme, že $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$

je regulárna, z tohto $\det(\mathbf{P}) > 0$. Matica prechodu od $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ k $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je $\mathbf{P}^{-1}$. Ale $\det(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^{-1}) \Rightarrow \det(\mathbf{P}^{-1}) > 0$. Teda $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \sim (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. *Tranzitívnosť:* Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \stackrel{\mathbf{P}}{\sim} (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \stackrel{\mathbf{Q}}{\sim} (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$. Chceme ukázať, že $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \sim (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$. Nech $\mathbf{P} = (p_{ij})$,

$\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Máme $\vec{w}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{v}_j$ pre $i=1, \dots, n$ a $\vec{z}_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} \vec{w}_i$

pre $k=1, \dots, n$. Z toho: $\vec{z}_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{v}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q_{ki} p_{ij} \right) \vec{v}_j$. V zátvorke

je prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca matice $\mathbf{QP}$. Teda matica prechodu od $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ je $\mathbf{QP}$. Potom $\det(\mathbf{QP}) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{P}) > 0$.

$\mathcal{U}$ sa rozloží na triedy ekvivalencie vzhľadom na $\sim$. Budú dve triedy ekvivalencie.

Definícia 11.13. Vektorový priestor V orientujeme tým, že jednu z dvoch tried ekvivalencie $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ vyhlásime za kladnú (privilegovanú). Urobíme to tak, že jednu bázu priestoru V vyhlásime za kladnú. Potom kladnú triedu báz tvoria práve tie, ktoré sú v $\sim$ s touto kladnou bázou.

Príklad. $\mathbb{R}^n$ štandardne orientujeme tak, že za kladnú vyhlásime štandardnú bázu: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Veta 11.13. Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je báza reálneho vektorového priestoru V , nech $\pi \in S_{\{1, \dots, n\}}$. Potom báza $(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ je ekvivalentná s pôvodnou bázou práve vtedy, keď je permutácia párna.

Dôkaz. Nech napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Potom $(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ je $(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Máme: $\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$; $\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$ až $\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + \dots + 1\vec{v}_n$. Potom matica prechodu je:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matica prechodu od $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ k $(\vec{v}_{\pi(1)}, \vec{v}_{\pi(2)}, \dots, \vec{v}_{\pi(n)})$ vznikne z $\mathbf{I}_n$ tak, že jej riadky permutujeme podľa π . Potom determinant matice prechodu je $(-1)^{s(\pi)}$, kde $s(\pi)$ je počet inverzií v π . Teda je kladný práve vtedy, keď π má párny počet inverzií.

Orientácia afinného priestoru:

Definícia 11.14. Nech $\mathcal{A}_n = (\mathcal{B}_n, V_n)$ je (reálny) afinný priestor. $\mathcal{A}_n$ orientujeme tak, že orientujeme vektorový priestor V_n .

Afinno-euklidovské priestory.

Definícia 11.15. Afinný priestor $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ sa nazýva *afinno-euklidovský priestor*, ak V (s pevne zvoleným skalárnym súčinom) je euklidovský priestor.

Príklad.

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ so štandardným skalárnym súčinom je afinno-euklidovský priestor.

Definícia 11.16. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinno-euklidovský priestor, pričom nech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalárny súčin na V . Ak $A, B \in \mathcal{B}_n$ sú dva body, tak ich *vzdialenosť* (označíme ju $\rho(A, B)$) definujeme ako $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$.

Veta 11.14. Nech $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ je afinno-euklidovský priestor, potom $\rho(A, B) \geq 0$ pre všetky $A, B \in \mathcal{B}$.

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$.
2. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$. (*trojuholníková nerovnosť*)

Dôkaz. $\rho(A, B) \geq 0$ jasné.

1. $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BA}| = \rho(B, A)$.
2. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. $\rho(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Poznámka. Definovaním vzdialenosti medzi bodmi v afinno-euklidovskom priestore $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, V)$ sme vlastne definovali zobrazenie $\rho : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťami z predchádzajúcej vety. ρ je tzv. *metrika* na $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ je teda *metrický priestor*.

V ďalšom budeme uvažovať o n -rozmernom afinno-euklidovskom priestore s pevne zvoleným súradnicovým systémom: $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, kde O je bod toho priestoru a $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je pevne zvolená ortonormálna báza vektorovej zložky tohto priestoru. Tento afinno-euklidovský priestor budeme označovať $\mathbb{E}^n$. Súradnicový systém $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ taký, že $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormálna báza sa nazýva *karteziánsky*. Pretože báza vo V_n je ortonormálna, pre vektory $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ a $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$ ich skalárny súčin je $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ a $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_n)$. $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Veta 11.15. Nech A, B sú dva body v $\mathbb{E}^n$ pričom A má súradnice $(a_1, \dots, a_n)$, B má súradnice $(b_1, \dots, b_n)$. Potom $\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$.

Dôkaz. $\overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + \dots + (b_n - a_n)\vec{e}_n$, kde $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormálna báza. $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = (b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} = \rho(A, B)$.

Kolmosť vektora na afinný podpriestor.

Definícia 11.17. Nech $\mathbb{E}^n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Hovoríme, že vektor $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ je *kolmý* na afinný podpriestor $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ priestoru $\mathbb{E}^n$ ak $\vec{a} \perp \vec{x}$ pre všetky $\vec{x} \in V(\alpha)$. (teda $\vec{a} \in V(\alpha)^\perp$).

Veta 11.16 a Definícia 11.18. Nech $\alpha \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ je nadrovina v $\mathbb{E}^n$. Potom vektor $\vec{n} \equiv (a_1, \dots, a_n)$ je kolmý na α . Vektor $\vec{n}$ sa nazýva *normálový vektor* nadroviny α .

Dôkaz. Nech $\vec{x} \in V(\alpha)$ je ľubovoľný vektor. Nech $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľný bod z α . Vieme, že existuje jediný bod $Y \equiv (y_1, \dots, y_n) \in \alpha$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$. Pritom súradnice $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$. Máme, keďže $X, Y \in \alpha$: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ a $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0$. Potom $a_1(y_1 - x_1) + \dots + a_n(y_n - x_n) = 0$. Teda $\langle \vec{n}, \overrightarrow{XY} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0$ tj. $\vec{n}$ je kolmý na ľubovoľný vektor z $V(\alpha)$. Pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ máme $\langle c\vec{n}, \vec{x} \rangle = c\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0$.

Veta 11.17. Rovnica nadroviny $\alpha \in \mathbb{E}^n$ obsahujúcej bod $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$ a majúcej normálový vektor $\vec{n} \equiv (c_1, \dots, c_n)$ je $\alpha \equiv c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$.

Dôkaz. Nech $X \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ je ľubovoľný bod z α . Potom $\overrightarrow{BX} \in V(\alpha)$. Pritom: $\vec{n} \perp \overrightarrow{BX}$ teda $\langle \vec{n}, \overrightarrow{BX} \rangle = 0$. $\vec{n} \equiv (c_1, \dots, c_n)$, $\overrightarrow{BX} \equiv (x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n)$. Teda musí platiť $c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$. Vieme, že nadrovina je určená jednou lineárnou rovnicou, teda $c_1(x_1 - b_1) + \dots + c_n(x_n - b_n) = 0$ je rovnica nadroviny α .

Kolmosť afinných podpriestorov.

Definícia 11.19. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Hovoríme, že podpriestor α je kolmý na β , ak $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. (teda každý smerový vektor podpriestoru α je kolmý na každý smerový vektor podpriestoru β .) Ak je táto podmienka splnená, napíšeme $\alpha \perp \beta$.

Tvrdenie 11.4. Ak $\alpha \perp \beta$, tak $\beta \perp \alpha$. (môžeme povedať, že α a β sú navzájom kolmé.)

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$. Teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. Ale potom $(V(\beta)^\perp)^\perp \subset V(\alpha)^\perp \Leftrightarrow V(\beta) \subset V(\alpha)^\perp \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$. Roviny O_{xy}, O_{yz} v $\mathbb{E}^3$ nie sú na seba kolmé v zmysle našej definície. Lebo $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$, lebo $\dim(V(\alpha)) = 2$, $\dim(V(\beta)^\perp) = 1$. Teda podľa našej definície: O_{xy} nie je kolmý na O_{yz} .

Veta 11.18. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Ak $\alpha \perp \beta$, tak $\dim(\alpha) + \dim(\beta) \leq n$.

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$, teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. $V(\beta) \oplus V(\beta)^\perp = V(n)$; kde $\mathbb{E}^n = (\mathcal{B}_n, V_n)$. Môžeme predpokladať, že $\dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. $V(\alpha) \oplus V(\beta) \subset V(\beta) \oplus V(\beta)^\perp = V(n) \Rightarrow \dim(V(\alpha) \oplus V(\beta)) = \dim(\alpha) + \dim(\beta) \leq \dim(V(n)) = n$.

Tvrdenie 11.5. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $\alpha \perp \beta$, tak $\alpha \cap \beta$ pozostáva z jediného bodu.

Dôkaz. Nech $\alpha \perp \beta$. Teda $V(\alpha) \subset V(\beta)^\perp$. Nech $\alpha \cap \beta = \mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$. Nech P, Q sú dva body z $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta)$. Potom $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha) \cap V(\beta) \subset V(\beta) \cap V(\beta)^\perp = \{\vec{0}\}$. Z čoho: $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ a preto $P = Q$.

Veta 11.19. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je k -rozmerný ($k \leq n$). Afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom pre ľubovoľný daný bod $A \in \mathbb{E}^n$ existuje jediný $(n-k)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$ obsahujúci bod A . Tento podpriestor označíme $\Pi_\alpha^\perp(A)$, a nazýva sa kolmopremietací afinný podpriestor bodu A do α .

Dôkaz. Nech $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ a vo $V(\alpha)^\perp$ zvolíme bázu $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k})$, kde $\vec{w}_1 = (w_1^1, \dots, w_n^1)$ až $\vec{w}_{n-k} = (w_1^{n-k}, \dots, w_n^{n-k})$. Potom podpriestor

$$\gamma = \begin{cases} x_1 = a_1 + w_1^1 t_1 + \dots + w_1^{n-k} t_{n-k} \\ \dots \\ x_n = a_n + w_n^1 t_1 + \dots + w_n^{n-k} t_{n-k} \end{cases} \quad \text{má dimenziu } n-k \text{ a je kolmý na } \alpha.$$

$(V(\gamma) = [\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}] = V(\alpha)^\perp)$. Tým sme ukázali existenciu takého podpriestoru ako sa tvrdí vo vete. *Jednoznačnosť:* Nech $\delta = (\mathcal{B}(\delta), V(\delta))$ je (iný) $(n-k)$ -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$, kolmý na α obsahujúci bod A . Potom $V(\delta) \subset V(\alpha)^\perp$. Ale $\dim(V(\delta)) = n-k$, $\dim(V(\alpha)^\perp) = n-k$. Teda musí: $V(\delta) = V(\alpha)^\perp$. Tj. $V(\delta) = V(\gamma)$. Pretože $A \in \mathcal{B}(\delta)$, $A \in \mathcal{B}(\gamma)$ musí byť $\delta = \gamma$.

Veta 11.20. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je k -rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom $\Pi_\alpha^\perp(A) \cap \alpha$ pozostáva z jediného bodu, označíme ho $A^\perp$ a nazývame ho kolmý priemet bodu A do afinného podpriestoru α .

Dôkaz. $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$; nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ je ortonormálna báza priestoru $V(\alpha)$, pričom $\vec{v}_1 = (v_1^1, \dots, v_n^1)$ až $\vec{v}_k = (v_1^k, \dots, v_n^k)$. Vieme, že $V(\Pi_\alpha^\perp(A)) = V(\alpha)^\perp$. Nech $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{n-k})$ je ortonormálna báza priestoru $V(\alpha)^\perp$, pričom $\vec{z}_1 = (z_1^1, \dots, z_n^1)$ až $\vec{z}_{n-k} = (z_1^{n-k}, \dots, z_n^{n-k})$. Nech $B \in \Pi_\alpha^\perp(A)$, $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$. Potom

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = a_1 + v_1^1 t_1 + \dots + v_n^1 t_1 \\ \dots \\ x_n = a_n + v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k \end{cases} \quad \Pi_\alpha^\perp(A) \equiv \begin{cases} x_1 = b_1 + z_1^1 s_1 + \dots + z_1^{n-k} s_{n-k} \\ \dots \\ x_n = b_n + z_n^1 s_1 + \dots + z_n^{n-k} s_{n-k} \end{cases}$$

Bod $X \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \Pi_\alpha^\perp(A) \cap \alpha$ spĺňa:

$$\begin{cases} a_1 + v_1^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k = b_1 + z_1^1 s_1 + \dots + z_1^{n-k} s_{n-k} \\ \dots \\ a_n + v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k = b_n + z_n^1 s_1 + \dots + z_n^{n-k} s_{n-k} \end{cases}$$

pre dajaké $t_i, s_i \in \mathbb{R}$. Teda $(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_{n-k})$ spĺňa:

$$(*) \begin{cases} v_1^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k - z_1^1 s_1 - \dots - z_1^{n-k} s_{n-k} = b_1 - a_1 \\ \dots \\ v_n^1 t_1 + \dots + v_n^k t_k - z_n^1 s_1 - \dots - z_n^{n-k} s_{n-k} = b_n - a_n \end{cases}$$

Teda $X \in \alpha \cap \Pi_\alpha^\perp(A) \Leftrightarrow$ systém $(*)$ je riešiteľný. Matica systému má n lineárne nezávislých riadkov, teda jej hodnosť je n . Teda $(*)$ má práve jedno riešenie.

Vzdialenosť afinných podpriestorov.

Definícia 11.20. Nech α, β sú dva afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. *Vzdialenosť* α od β definujeme ako nezáporné reálne číslo $\rho(\alpha, \beta) := \inf\{\rho(X, Y); X \in \alpha, Y \in \beta\}$.

Veta 11.21. Nech $A \in \mathbb{E}^n$ je bod a nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$ je afinný podpriestor v $\mathbb{E}^n$. Potom $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A^\perp)$.

Dôkaz. $\rho(A, \alpha) = \inf\{\rho(A, X), X \in \alpha\}$ a $\rho(A, A^\perp) \in \{\rho(A, X), X \in \alpha\}$, teda $\rho(A, \alpha) \leq \rho(A, A^\perp)$. Ukážeme, že $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraňením množiny $\{\rho(A, X); X \in \alpha\}$. Z toho: $\rho(A, A^\perp) \leq \rho(A, \alpha) = \inf\{\rho(A, X), X \in \alpha\}$ keďže $\inf$ je najväčšie dolné ohraňenie. Rátajme: $\rho(A, A^\perp)^2 = |\overrightarrow{AA^\perp}|^2$; $\rho(A, X)^2 = |\overrightarrow{AX}|^2 = |\overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X}|^2 = \langle \overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X}, \overrightarrow{AA^\perp} + \overrightarrow{A^\perp X} \rangle = \langle \overrightarrow{AA^\perp}, \overrightarrow{AA^\perp} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AA^\perp}, \overrightarrow{A^\perp X} \rangle + \langle \overrightarrow{A^\perp X}, \overrightarrow{A^\perp X} \rangle = \rho(AA^\perp)^2 + 2 \cdot 0 + \rho(A^\perp X)^2$. Z toho: $\rho(A, X)^2 \geq \rho(A, A^\perp)^2$ preto $\rho(A, X) \geq \rho(A, A^\perp)$. Teda naozaj $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraňením.

Vzdialenosť rovnobežných afinných podpriestorov.

Veta 11.22. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú rovnobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Nech $\dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Potom $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta) = \rho(A, A^\perp)$.

Dôkaz. Z definície $\rho(\alpha, \beta) = \inf\{\rho(X, Y); X \in \alpha, Y \in \beta\}$. $\rho(A, A^\perp) \in \{\rho(X, Y), X \in \alpha, Y \in \beta\}$, a preto $\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(A, A^\perp)$. Aby sme dokázali obrátenú nerovnosť ukážeme, že $\rho(A, A^\perp)$ je tiež dolným ohraničením množiny $\{\rho(X, Y)\}$. Z toho potom dostaneme $\rho(A, A^\perp) \leq \rho(\alpha, \beta)$. Pre ľubovoľný $X \in \alpha$ existuje jediný vektor $\overrightarrow{AX} \in V(\alpha)$. Ale $\alpha \parallel \beta$ a preto $\overrightarrow{AX} \in V(\beta)$. Pretože $A^\perp$ a $\overrightarrow{AX} \in V(\beta)$ existuje jediný bod $Z \in \beta$: $\overrightarrow{AX} = A^\perp \overrightarrow{Z}$. $AA^\perp = \overrightarrow{AX} + XA^\perp$. Ale $\overrightarrow{AX} = A^\perp \overrightarrow{Z}$. Z toho: $AA^\perp = A^\perp \overrightarrow{Z} + XA^\perp = XA^\perp + A^\perp \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{XZ} \in V(\beta)^\perp = \Pi_\beta^\perp(X)$. Máme $Z \in \beta \cap \Pi_\beta^\perp(X) = \{X^\perp\}$. Preto $Z = X^\perp$ a teda $AA^\perp = \overrightarrow{XX^\perp}$ pre ľubovoľný bod $X \in \alpha$. Pre ľubovoľný $X \in \alpha$, $Y \in \beta$ máme $\rho(X, Y) = |\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{XA^\perp} + A^\perp \overrightarrow{Y}|$. $\rho(A, A^\perp) = \rho(X, X^\perp)$ pre ľubovoľný bod $X \in \alpha$. Pre ľubovoľné $X \in \alpha$, $Y \in \beta$ máme $\rho(X, Y) = |\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{XA^\perp} + A^\perp \overrightarrow{Y}|$. $\rho(A, A^\perp) = \rho(X, X^\perp) = \rho(X, \beta) \leq \rho(X, Y)$ pre ľubovoľné $Y \in \beta$, $X \in \alpha$. $\rho(A, A^\perp) \leq \rho(X, Y)$, teda $\rho(A, A^\perp)$ je dolným ohraničením množiny $\{\rho(X, Y), X \in \alpha, Y \in \beta\}$.

Príklad. Určte vzdialenosť bodu $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ v $\mathbb{E}^n$ od nadroviny $\alpha \equiv \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + a_0 = 0$.

Riešenie: $\Pi_\alpha^\perp(P)$ je priamka, jej smerový vektor je vlastne normálový vektor nadro-

$$\text{viny } \alpha, \text{ tj. } \vec{n} \equiv (a_1, \dots, a_n). \quad \Pi_\alpha^\perp(P) = \begin{cases} x_1 = p_1 + a_1 t \\ \dots \\ x_n = p_n + a_n t \end{cases}$$

$$\text{Určíme jediný bod } P^\perp = \Pi_\alpha^\perp(P) \cap \alpha. \quad a_1(p_1 + a_1 t) + \dots + a_n(p_n + a_n t) + a_0 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + t(a_1^2 + \dots + a_n^2) = 0. \text{ Z toho: } t = -\frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

$$\rho(P, \alpha) = |PP^\perp| = \left| \left(-a_1 \frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \dots, -a_n \frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right) \right| = \\ = \sqrt{\frac{(a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0)^2}{(a_1^2 + \dots + a_n^2)^2} \cdot (a_1^2 + \dots + a_n^2)} = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

$$\text{Teda: } \rho(P, \alpha) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Vzdialenosť rovnobežných afinných podpriestorov.

Veta 11.23. Nech $\alpha \equiv a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + x_0 = 0$ a $\beta \equiv b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_0 = 0$ sú dve rovnobežné nadroviny v $\mathbb{E}^n$. Potom $\rho(\alpha, \beta) = \frac{|b_0 - a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$.

Dôkaz. Z vety 11.22 máme: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, \beta)$, kde $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ je ľubovoľný bod z α . Z príkladu vieme, že $\rho(P, \beta) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{|-a_0 + b_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$.

Vzdialenosť dvoch mimobežných afinných podpriestorov.

Veta 11.24. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha))$, $\beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú mimobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Teda $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$ a $V(\alpha) \cap V(\beta) = \{\vec{0}\}$. Potom existuje bod $P \in \alpha$

a $Q \in \beta$ také, že $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$ a platí: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$. (Priamka určená bodmi P, Q je tzv. stredná priečka afinných podpriestorov α, β .)

Dôkaz. Nech $X \in \alpha, Y \in \beta$ sú ľubovoľné. Potom $\overrightarrow{XY} \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Keby áno, tak by $\overrightarrow{XY} = \vec{a} + \vec{b}$ pre jednoznačne určené $\vec{a} \in V(\alpha), \vec{b} \in V(\beta)$. Potom existuje jediný bod $Z \in \alpha$: $\vec{a} = \overrightarrow{XZ}$ a jediný bod $W \in \beta$: $\vec{b} = \overrightarrow{WY}$. Teda: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{WY}$, ale zároveň $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZW} + \overrightarrow{WY}$, teda $\overrightarrow{ZW} = \vec{0}$, čo je ekvivalentný s tým, že $Z = W$. Teda $Z = W \in \alpha \cap \beta = \emptyset$ (keďže α, β sú mimobežné). Spor.

Nech γ je afinný podpriestor určený bodom X , pričom $V(\gamma) = V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Nech γ' je afinný podpriestor určený bodom X a taký, že $V(\gamma') = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus [\overrightarrow{XY}]$. Keďže $[\overrightarrow{XY}] \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$, $\dim(\gamma') - \dim(\gamma) = 1$, a teda (máme $\gamma \subset \gamma'$) γ je nadrovinou v γ' . Nech $\vec{n}$ nenulový je normálový vektor nadroviny γ v γ' . Teda $\vec{n} \in V(\gamma)^\perp = (V(\alpha) \oplus V(\beta))^\perp = V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$. Nech teraz $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ je dajaká ortogonálna báza vo $V(\alpha)$, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j)$ je ortogonálna báza vo $V(\beta)$. Potom vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j, \vec{n}$ sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu vo $V(\gamma')$. Pretože $\overrightarrow{XY} \in V(\gamma')$, máme $\overrightarrow{XY} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k + \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_j \vec{b}_j + \delta \vec{n}$ pre jednoznačne určené $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_j, \delta \in \mathbb{R}$. Potom $\delta \neq 0$, lebo $\overrightarrow{XY} \notin V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Označme P ten jediný bod z α , pre ktorý $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \overrightarrow{XP}$, označme Q ten jediný bod z β , pre ktorý $\beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_j \vec{b}_j = \overrightarrow{QY}$. Teda máme, že $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY}$. Teda $\overrightarrow{PQ} = \gamma \vec{n}$. Keďže $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp$, tak priamka, ktorá prechádza bodmi P, Q je kolmá na α aj β a pretína α v P a β v Q . Ešte treba ukázať, že $\rho(P, Q) = \rho(\alpha, \beta)$. Vieme, že $\rho(\alpha, \beta) = \inf\{\rho(A, B); A \in \alpha; B \in \beta\}$. Nech $A \in \alpha, B \in \beta$ sú ľubovoľné. Potom $A = P + s_1 \vec{a}_1 + \dots + s_k \vec{a}_k$ zároveň $B = Q + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j$ pre vhodné $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_j \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB} = B - A = \overrightarrow{PQ} + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j - s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k$. Potom $\rho(A, B)^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ} - s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j, \overrightarrow{PQ} - s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle + 2 \underbrace{\langle \overrightarrow{PQ}, -s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j \rangle}_{=0} + \langle -s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j; -s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j \rangle = \rho(P, Q)^2 + | -s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j |^2$. Z toho vidno, že $\rho(A, B)$ sa minimalizuje vtedy, keď $| -s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j | = 0$ tj. práve vtedy, keď $-s_1 \vec{a}_1 - \dots - s_k \vec{a}_k + t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_j \vec{b}_j = \vec{0} \Leftrightarrow s_1 = \dots = s_k = t_1 = \dots = t_j = 0$, lebo $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j)$ je báza vo $V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Teda $\rho(A, B)$ sa minimalizuje vtedy, keď sa rovná $\rho(P, Q)$. To znamená, že naozaj $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$.

Dôsledok. Nech $\alpha = (\mathcal{B}(\alpha), V(\alpha)), \beta = (\mathcal{B}(\beta), V(\beta))$ sú mimobežné afinné podpriestory v $\mathbb{E}^n$. Potom existuje afinný podpriestor β_1 taký, že $\beta \subset \beta_1, \alpha \parallel \beta_1$ a $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta_1)$. ($= \rho(A, A^\perp)$, pre ľubovoľný bod $A \in \alpha, A^\perp$ je kolmý priemet bodu A do β_1 .)

Dôkaz. Zoberme β_1 , ako afinný podpriestor určený ľubovoľným bodom z β a taký, že $V(\beta_1) = V(\alpha) \oplus V(\beta)$. Potom je pravda, že $\beta \subset \beta_1$ aj to, že $\alpha \parallel \beta_1$ (lebo $V(\alpha) \subset V(\beta_1)$). Z predchádzajúcej vety vieme, že existujú $P \in \alpha, Q \in \beta$ také, že $\overrightarrow{PQ} \in V(\alpha)^\perp \cap V(\beta)^\perp = (V(\alpha) \oplus V(\beta))^\perp = V(\beta_1)^\perp$ pričom $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q)$. Máme $Q \in \beta$, a teda tiež $Q \in \beta_1$ a zároveň $\overrightarrow{PQ} \in V(\Pi_{\beta_1}^\perp(P))$. Z toho: $Q \in \Pi_{\beta_1}^\perp(P) \cap \beta_1 = \{P^\perp\}$, a preto $P^\perp = Q$. Teda $\rho(\alpha, \beta) = \rho(P, Q) = \rho(P, P^\perp) = \rho(\alpha, \beta_1)$.

Uhly medzi afinnými podpriestormi v $\mathbb{E}^n$.

1. Uhol dvoch orientovaných priamok:

Nech $p, q \subset \mathbb{E}^n$ sú dve orientované priamky ($p \neq q$). Teda $V(p), V(q)$ sú dve orientované vektorové priestory. Z toho ak $\vec{a} \neq \vec{0}$ je smerový vektor orientovanej priamky p a $\vec{a}' \neq \vec{0}$ je iný smerový vektor, tak $\vec{a}' = k \cdot \vec{a}$ pre dajaké $k > 0$. Podobne, ak $\vec{b}', \vec{b}$ sú dva smerové vektory orientovanej priamky q , tak $\vec{b}' = l \cdot \vec{b}$.

$$\frac{\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle}{|\vec{a}'| \cdot |\vec{b}'|} = \frac{\langle k\vec{a}, l\vec{b} \rangle}{|k\vec{a}| \cdot |l\vec{b}|} = \frac{kl\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{kl|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Tento výraz nezávisí od výberu smerových vektorov orientovaných priamok p, q .

Zo *Schwarzovej* nerovnosti vieme, že $\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow \exists! \varphi \in \langle 0, \pi \rangle : \cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

φ definujeme ako uhol zovretý orientovanou priamkou p a orientovanou priamkou q .

2. Uhol dvoch neorientovaných priamok:

Nech $p, q \subset \mathbb{E}^n$ sú dve neorientované priamky. Potom, ak $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a}' \neq \vec{0}$ sú dva smerové vektory priamky p , tak $\vec{a}' = k \cdot \vec{a}$, kde $k \neq 0$. Podobne, ak $\vec{b}, \vec{b}' (\neq \vec{0})$ sú dva smerové vektory priamky q , tak $\vec{b}' = l \vec{b}$ pre $l \neq 0$. Potom výraz

$$\frac{\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle}{|\vec{a}'| \cdot |\vec{b}'|} = \frac{\langle k\vec{a}, l\vec{b} \rangle}{|k\vec{a}| \cdot |l\vec{b}|} = \frac{kl\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|kl||\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \neq \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

vo všeobecnosti závisí od výberu smerového vektora priamky p resp. q . Ale už výraz

$$\left| \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| \text{ už od výberu nezávisí. Existuje jediné } \psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \text{ také, že } \cos \psi = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

ψ potom nazveme uhlom zovretý neorientovaných priamok p a q .

3. Uhol dvoch nadrovín

Nech α, β sú dve nadroviny v $\mathbb{E}^n$, nech $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ sú ich normálové vektory. Potom uhol medzi α a β sa definuje ako uhol neorientovaných priamok so smerovými vektormi $\vec{n}_\alpha$ resp. $\vec{n}_\beta$. Teda: ak $\alpha \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$, $\beta \equiv b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0 = 0$, tak $\vec{n}_\alpha = (a_1, \dots, a_n); \vec{n}_\beta = (b_1, \dots, b_n)$ a $\angle(\alpha, \beta)$ je to číslo z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pre ktoré

$$\cos |\angle(\alpha, \beta)| = \frac{|a_1b_1 + \dots + a_nb_n|}{\sqrt{(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)}}.$$

Vektorový a zmiešaný súčin v $\mathbb{R}^3$.

Definícia 11.21. Nech $\mathbb{R}^3$ je štandardne orientovaný tj. nech $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je kladná báza tohto priestoru. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^3$. Potom existuje jediný vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ taký, že

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$.

2. $|\vec{c}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$.

3. Ak $\vec{a}, \vec{b}$ sú lineárne nezávislé, tak $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$.

Vektorový súčin vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$, označuje sa $\vec{a} \times \vec{b}$.

Poznámka. Vlastne sme definovali zobrazenie $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \times(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Geometrický význam $|\vec{a} \times \vec{b}|$: je to plošný obsah rovnobežníka určeného $\vec{a}, \vec{b}$.
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}))^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \sin^2(\angle \vec{a}, \vec{b}))} =$
 $= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\angle \vec{a}, \vec{b})} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$. Plošný obsah rovnobežníka určeného $\vec{a}, \vec{b}$ je $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

Veta 11.25. Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^3$. Potom
 $\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \vec{e}_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \vec{e}_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Pretože $\vec{e}_1 =$
 $= (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ máme $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix})$
Dôkaz. Overíme podmienky 1.), 2.) a 3.) z definície.

1.)

$$\begin{aligned} & \langle (a_1, a_2, a_3), (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) \rangle = \\ & = a_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Podobne pre $\vec{b}$.

2.)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} = \\ & = \sqrt{|(a_1, a_2, a_3)|^2 |(b_1, b_2, b_3)|^2 - \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle^2} \end{aligned}$$

3.) Predpokladajme, že $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú lineárne nezávislé. To znamená, že (b_1, b_2, b_3) nie je nenulovým násobkom (a_1, a_2, a_3) a preto aspoň jedno z čísel $\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ je $\neq 0$. Máme $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} =$
 $= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$, $\vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3$. Teda matica prechodu od bázy $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ k trojici vektorov $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Potom $\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} > 0$. Z toho (keďže $\mathbf{P}$ je regulárna):
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je báza v $\mathbb{R}^3$, a pretože $\det(\mathbf{P}) > 0$ je kladná báza aj $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Z jednoznačnej
určenosti $\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix})$.

Veta 11.26. Vektorový súčin v $\mathbb{R}^3$ má tieto vlastnosti:

1.) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ pre $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

2.) $(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha (\vec{a} \times \vec{c}) + \beta (\vec{b} \times \vec{c})$ a $\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta (\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma (\vec{a} \times \vec{c})$ tj. zobrazenie $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineárne v oboch argumentoch.

Dôkaz. 1.) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Pre lineárne závislé $\vec{a}, \vec{b}$ 1.) zrejme platí. Pre $\vec{a}, \vec{b}$ lineárne nezávislé máme, že $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza. Zároveň $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$ potom $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Iný dôkaz: Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, potom $\vec{a} \times \vec{b} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) = -(\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}) = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2.) Z vlastností determinantov jasné.

Definícia 11.22. Nech $\mathbb{R}^3$ je štandardne orientovaný. Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sú dané vektory. Potom ich *zmiešaný súčin* sa definuje ako reálne číslo $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$, ozn. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Veta 11.27.

Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Potom $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

Dôkaz. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle (\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}), (c_1, c_2, c_3) \rangle =$
 $= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$

Veta 11.28. Zmiešaný súčin má tieto vlastnosti:

1.) je lineárny v každom argumente.

2.) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Dôkaz. jasné z determinantového vyjadrenia zmiešaného súčinu a vlastností determinantov.

Veta 11.29. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú dva lineárne nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$, chápané ako orientované úsečky v O_{xyz} so začiatkom v O . Nech $\vec{c}$ je vektor, ktorý neleží v smerovom priestore roviny určenej bodom O a vektormi $\vec{a}, \vec{b}$. Potom $|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ je objem rovnobežnostena určeného bodom O a orientovanými úsečkami $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Dôkaz. $\vec{a} = \vec{OA}, A \equiv (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = \vec{OB}, B \equiv (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = \vec{OC}, C \equiv (c_1, c_2, c_3)$. Objem rovnobežnostena $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ = (plošný obsah podstavy $O\vec{a}\vec{b}$) · výška = $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, \alpha)$, kde α je rovina určená bodom O a vektormi $\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, C^\perp)$.

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = O + a_1 t + b_1 s \\ x_2 = O + a_2 t + b_2 s \\ x_3 = O + a_3 t + b_3 s \end{cases} \quad \Pi_\alpha^\perp(C) \equiv \begin{cases} x_1 = c_1 + \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p \\ x_2 = c_2 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} p \\ x_3 = c_3 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} p \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 s - \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p = c_1 \\ a_2 t + b_2 s + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} p = c_2 \\ a_3 t + b_3 s - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} p = c_3 \end{cases}$$

$$p = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}{-\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} - \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}{D}$$

$$\rho(C, C^\perp) = \sqrt{\det^2 \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} + \det^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2}{D^2} \dots}$$

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \rho(C, C^\perp) = |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$$

Veta 11.30. Nech $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazenie s týmito vlastnosťami:

1.) $\times$ je lineárne v oboch argumentoch.

2.) pre $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ je $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

3.) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$.

Potom $n = 3$, alebo $n = 7$.

Bez dôkazu.

XII. LINEÁRNE TRANSFORMÁCIE VEKTOROVÝCH PRIESTOROV

Definícia 12.1. Lineárna transformácia vektorového priestoru V je lineárne zobrazenie $V \rightarrow V$.

Príklad. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_2, -x_1)$ je lineárna transformácia priestoru $\mathbb{R}^3$.

Definícia 12.2. Nech V je n -rozmerný vektorový priestor nad poľom R . Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza vo V . Ak $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia priestoru V , tak jej matica vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je matica $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ taká, že $f(\vec{a}_i) = a_{i1}\vec{a}_1 + \dots + a_{in}\vec{a}_n$; $i=1, \dots, n$.

Príklad. Matica lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$ vzhľadom na bázu $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{33}(\mathbb{R})$.

Príklad. Nech $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 4x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_3, 4x_1 + 4x_2)$. Matica f vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je $\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Vektory $\vec{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 2)$

$\vec{a}_3 = (2, -3, 2)$ tiež tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$. Aká je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$? Vyrátame: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0) = x(0, 1, 2) + y(2, 1, 2) + z(2, -3, 2) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0$. Teda $\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}(0, 1, 2) + \frac{1}{2}(2, 1, 2) + 0 \cdot (2, -3, 2)$. Podobne: $\vec{e}_2 = \frac{1}{4}(2, 1, 2) - \frac{1}{4}(2, -3, 2)$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(0, 1, 2) - \frac{1}{8}(2, 1, 2) + (2, -3, 2)$. Teda matica prechodu od $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

je $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Potom $f(\vec{a}_1) = f(0, 1, 2) = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = 2(\frac{1}{4}\vec{a}_2 - \frac{1}{4}\vec{e}_3) + 4(\frac{1}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{8}\vec{a}_2 + \frac{1}{8}\vec{a}_3) = 2\vec{a}_1$. $f(\vec{a}_2) = 6\vec{a}_2$ a $f(\vec{a}_3) = -2\vec{a}_3$. Teda matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ je $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Pre $\mathbf{M}_f$ platí $(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbf{M}_f = f(x_1, x_2, x_3)$.

Všeobecne, ak $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárna transformácia, tak máme $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{M}_f$, kde $\mathbf{M}_f \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Ale, ak $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na inú bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ tak už neplatí, že $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{B}$. Napríklad z predchádzajúceho príkladu:

$f(1, 1, 1) = (-1, 2, 2)$, ale $(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (2, 6, -2) \neq (-1, 2, 2)$.

Veta 12.1. Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárna transformácia, nech $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ je báza vo V a nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica f vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Potom, ak $(x_1, \dots, x_n)$ je n -tica súradníc vektora $\vec{x} \in V$ v báze $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, tak $(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{A}$ je n -tica súradníc vektora $f(\vec{x})$ v báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dôkaz. Máme $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Potom $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n) = x_1f(\vec{a}_1) + \dots + x_nf(\vec{a}_n) = x_1(a_{11}\vec{a}_1 + \dots + a_{1n}\vec{a}_n) + \dots + x_n(a_{n1}\vec{a}_1 + \dots + a_{nn}\vec{a}_n) = (x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1})\vec{a}_1 + \dots + (x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})\vec{a}_n$. Teda $f(\vec{x})$ má vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ n -ticu súradníc $(x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1}, \dots, x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})$. Ale

$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (x_1a_{11} + \dots + x_na_{n1}, \dots, x_1a_{1n} + \dots + x_na_{nn})$. To je práve n -tica súradníc $f(\vec{x})$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Otázka. Nech $f:V \rightarrow V$ je lineárna transformácia, nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), (\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve bázy vo V . Nech f má vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ a vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ maticu $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Aký je vzťah medzi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$?

Odpoveď. Nech $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Vieme, že $\mathbf{P}$ je regulárna pričom $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$ je matica opačného prechodu. Nech $\vec{x} \in V$ je ľubovoľné, nech jeho súradnice vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ sú $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a vzhľadom na bázu $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Vieme, že $\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{P}'$, $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{P}$. Nech teraz $f(\vec{x})$ má súradnice $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a nech má súradnice $\mathbf{Y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ vzhľadom na $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$. Zás vieme, že $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}\mathbf{P}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}'$. Z predchádzajúcej vety tiež vieme, že $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}' = \mathbf{X}'\mathbf{B}$. Z toho: $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{Y}\mathbf{P} = \mathbf{Y}' = \mathbf{X}'\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{B}$ tj. $\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}) = \mathbf{0}}$ pre všetky $\mathbf{X} \in R^n$. Ak postupne berieme za $\mathbf{X}$ n -tice $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, tak $\square$ dáva, že prvý až n -tý riadok v matici $\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}$ je nulový, a teda $\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, z toho $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{B}$ a teda $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$.

Definícia 12.3. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Hovoríme, že matica $\mathbf{B}$ je *podobná* matici $\mathbf{A}$, ak existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ taká, že $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$. (zápis: $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$).

Tvrdenie 12.1. $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathfrak{M}_{nn}(R)$.

Dôkaz.

Symetrickosť: $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$, ale potom aj $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{Q}^{-1})^{-1}$ a teda $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. *Reflexivita:* $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$, lebo $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \mathbf{A} \mathbf{I}_n^{-1}$. *Tranzitivnosť:* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}, \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{Q}\mathbf{S})\mathbf{C}(\mathbf{Q}\mathbf{S})^{-1}$ a preto $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

Riešenie predchádzajúcej otázky môžeme vyjadriť takto: Matice lineárnej transformácie n -rozmerného vektorového priestoru V vzhľadom na rôzne bázy priestoru V sú navzájom podobné.

Veta 12.2. Existuje lineárna transformácia a vhodná báza priestoru $\mathbb{R}^n$ také, že pre dané podobné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí: $\mathbf{A}$ je maticou tej lineárnej transformácie vzhľadom na štandardnú bázu $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ a $\mathbf{B}$ je matica tej istej lineárnej transformácie vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$, nech $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ pre dajakú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Predpis $f(\vec{e}_i) = a_{i1}\vec{e}_1 + \dots + a_{in}\vec{e}_n$ podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach definuje lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pričom f má vzhľadom na $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ maticu $\mathbf{A}$. Definujme vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$: $\vec{a}_i = p_{i1}\vec{e}_1 + \dots + p_{in}\vec{e}_n$, $i = 1, \dots, n$. Pretože $\mathbf{P} = (p_{ij})$ je regulárna, vektory $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^n$. (tiež $\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n p'_{ij}\vec{a}_i \forall j$.) Aká je matica f vzhľadom na $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$?

$$\begin{aligned} f(\vec{a}_i) &= \sum_{j=1}^n p_{ij} f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij} f\left(\sum_{s=1}^n a_{js}\vec{e}_s\right) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n a_{js}\vec{e}_s = \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{s=1}^n a_{js} \sum_{t=1}^n p'_{st}\vec{a}_t = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{js} p'_{st}\right) \vec{a}_t \end{aligned}$$

V zátvorke je prvok i -teho riadku a j -teho stĺpca $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$.

Definícia 12.4. Nech $f : V \rightarrow V$ je lineárna transformácia. *Vlastný vektor* lineárnej transformácie f je nenulový vektor $\vec{v} \in V$ taký, že pre dáke $\lambda \in \mathbb{R}$ máme $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. V tejto situácii sa λ nazýva *vlastná hodnota* lineárnej transformácie f patriaca vlastnému vektoru $\vec{v}$.

Príklad. $id_V : V \rightarrow V$ pre $\forall \vec{v} \in V - \{\vec{0}\}$ platí $id_V(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$.

Definícia 12.5. Vlastný vektor a k nemu patriaca vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sa definuje ako vlastný vektor (a k nemu patriaca vlastná hodnota) lineárnej transformácie $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ktorej maticou vzhľadom na štandardnú bázu je $\mathbf{A}$). Ináč povedané: nenulový vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ ak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ také, že $(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{A} = \lambda(x_1, \dots, x_n)$. O λ hovoríme ako o vlastnej hodnote matice $\mathbf{A}$ patriacej k vlastnému vektoru $(x_1, \dots, x_n)$.

Príklad. $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (x_1, \dots, x_n) \mathbf{I}_n = 1 \cdot (x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka. Definovali sme tzv. *ľavý vlastný vektor* matice $\mathbf{A}$. Niekedy sa definuje aj tzv. *pravý vlastný vektor* matice $\mathbf{A}$ ako taký $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pre ktorý existuje

$\mu \in \mathbb{R}$ také, že $\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Transponovaním: $(y_1, \dots, y_n) \mathbf{A}^T = \mu(y_1, \dots, y_n)$.

Teda $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je pravý vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ práve vtedy, keď $(y_1, \dots, y_n)$ je ľavý vlastný vektor matice $\mathbf{A}^T$.

V ďalšom budeme uvažovať iba o ľavých vlastných vektorech.

Tvrdenie 12.2. Podobné matice (nad $\mathbb{R}$) majú tú istú množinu vlastných hodnôt (z poľa $\mathbb{R}$).

Dôkaz. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ a nech sú podobné, teda $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$ pre dajakú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Označme $S(\mathbf{A})$ resp. $S(\mathbf{B})$ množinu vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$. Chceme ukázať, že $S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{B})$. Nech $\lambda \in S(\mathbf{A})$ je ľubovoľné. Vieme, že existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ taký, že $\vec{x} \cdot \mathbf{A} = \lambda \vec{x}$. Máme $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{BP}$. Teda $(\vec{x} \mathbf{P}) \mathbf{BP} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow (\vec{x} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{B} = \lambda (\vec{x} \mathbf{P}^{-1})$. Máme $f_{\mathbf{P}^{-1}} = \vec{x} \mathbf{P}^{-1} \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, keďže lineárna transformácia $f_{\mathbf{P}^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulárna. Teda $\lambda \in S(\mathbf{B})$, príslušný vlastný vektor je $\vec{x} \mathbf{P}^{-1}$. Ukázali sme, že $S(\mathbf{A}) \subset S(\mathbf{B})$. Analogicky sa ukáže, že $S(\mathbf{B}) \subset S(\mathbf{A})$. Vcelku $S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{B})$.

Tvrdenie 12.3. Ak $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k λ , tak $c\vec{v}$ pre $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ je tiež vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ (patriace k vlastnej hodnote λ).

Dôkaz. Máme $\vec{v} \mathbf{A} = \lambda \vec{v}$. Potom $(c\vec{v}) \mathbf{A} = c(\vec{v} \mathbf{A}) = c(\lambda \vec{v}) = \lambda(c\vec{v})$.

Ako závisí vlastný vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ od matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$? $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ patriaci k vlastnej hodnote $\lambda \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(x_1, \dots, x_n) \mathbf{A} = \lambda(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \mathbf{A} = (x_1, \dots, x_n) \lambda \mathbf{I}_n \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \vec{0}$. tj.

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{21}x_2 - \cdots - a_{n1}x_n = 0 \\ \cdots \\ -a_{1n}x_1 - a_{2n}x_2 - \cdots - (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

Teda $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ je vlastným vektorom patriacim k vlastnej hodnote $\lambda \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(x_1, \dots, x_n)$ je netriviálnym riešením lineárneho systému (*). Vieme, že (*) má nenulové riešenie práve vtedy, keď $h(\text{matrice systému } *) < n$, tj. práve vtedy, keď $h(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) < n$. Takisto máme, že $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastnou hodnotou matice $\mathbf{A}$ práve vtedy, keď $h(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) < n$ tj. matica $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ je singulárna. Špeciálne z toho vidno, že $0 \in \mathbb{R}$ je vlastnou hodnotou matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow h(-\mathbf{A}) < n$ tj. práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) < n$.

Príklad. Nech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineárne zobrazenie otočenie o uhol $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okolo začiatku súradnicového systému. $f_\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Aké má vlastné hodnoty a vlastné vektory? Aká je matica lineárneho zobrazenia f_φ vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$? $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. $z = x + iy$. $f_\varphi(x, y) = f_\varphi(x + iy)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi; x \sin \varphi + y \cos \varphi)$.

$\mathbf{M}_{f_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Kedy je $\lambda \in \mathbb{R}$ vlastnou hodnotou matice $\mathbf{M}_{f_\varphi}$? Práve vtedy,

keď matica $\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{M}_{f_\varphi}$ je singulárna $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \lambda - \cos \varphi \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0$. Z toho:

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \cos \varphi \pm \sqrt{4 \cos^2 \varphi - 4}}{2} = \cos \varphi \pm \sqrt{-\sin^2 \varphi}$, teda $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \vee \varphi = \pi$.

Potom $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Teda matica $\mathbf{M}_{f_\varphi}$ chápaná ako reálna má vlastnú hodnotu (1 resp. -1) iba vtedy, keď $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$.

Aké sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{M}_{f_\varphi}$ ak ju chápeme ako komplexnú?

Vtedy vlastné hodnoty: $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$, pre $\forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozšírenie definície matice resp. determinantu.

Pripustíme, že prvky matíc môžu byť aj prvky ľubovoľného komutatívneho okruhu s 1. Rovnosť matíc, násobenie atď. funguje analogicky. Ak $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ (kde $(R, +, \cdot, 1)$ je komutatívny okruh s 1) definujeme determinant:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\varphi \in S_{\{1, \dots, n\}}} (-1)^{s(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

Mnohé z vlastností determinantov nad poľom sa zachovávajú aj pre determinanty nad komutatívnym okruhom s 1. Napr. determinant zmení znamienko na opačné ak vzájomne vymeníme dva riadky; determinant je nulový ak niektorý riadok je nulový; $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$, atď. .

Definícia 12.6. *Charakteristický polynóm* matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ (kde R je pole) sa definuje ako $\chi_A(t) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$.

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R) \quad \chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Prvkami tejto matice sú prvky okruhu polynómov $R[t]$. Označme $R[t]$ okruh polynómov v neurčitej t nad poľom R . Ak $p(t) \in R[t]$, tak jeho koreň je $a \in R$, pre ktoré $p(a) = 0$.

Príklad. $p(t)=t^2-2t+1 \in R[t]$. $p(1)=0$, 1 je koreň.

Z doterajšieho: $\lambda \in R$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ práve vtedy, keď λ je koreňom charakteristického polynómu $\chi_A(t)$ matice $\mathbf{A}$.

Napr.: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{33}(\mathbb{R})$. $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = t^3 - t^2 + t - 1 = (t^2+1)(t-1)$

Má jeden reálny koreň: 1. Matica $\mathbf{A}$ chápaná ako reálna matica má jedinú vlastnú hodnotu: $\lambda=1$. Neskôr sa pozrieme, aké sú vlastné hodnoty, ak $\mathbf{A}$ chápeme ako komplexnú maticu.

Definícia 12.7. *Stupeň polynómu $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[t]$ je s , ak $a_s \neq 0$, ale $a_i = 0$, pre $i > s$ v prípade, že $p(t) \neq 0$. Ak $p(t) \equiv 0$, tak stupeň polynómu sa definuje ako $-\infty$.*

Veta 12.3. *Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Potom stupeň $\chi_A(t)$ je n . Okrem toho, koeficient pri t^{n-1} v $\chi_A(t)$ je $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$ a absolútny člen v $\chi_A(t)$ je $(-1)^n \det(\mathbf{A})$.*

Dôkaz.

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{pmatrix} = (t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn}) + \text{členy s } t^k$$

kde $k \leq n-2$. Koeficient pri t^n a t^{n-1} získame z $(t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn})$. Z toho koeficient pri t^n je 1, pri t^s , $s > n$ sú nuly. Koeficient pri t^{n-1} je $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Koeficient

$$\text{pri } t^0 \text{ je } \chi_A(0) = \det \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A}).$$

Definícia 12.8. Pre maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ sa $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ nazýva *stopa* matice $\mathbf{A}$, ozn. $Tr(\mathbf{A})$; $Sp(\mathbf{A})$. Platí napr. ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, tak $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$.

Veta 12.4. *Podobné matice majú ten istý charakteristický polynóm.*

Dôkaz. Majme $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, nech $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$ pre dákú regulárnu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Chceme ukázať, že $\chi_A(t) = \chi_B(t)$. Z definície: $\chi_B(t) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{B}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{PAP}^{-1}) = \det(\mathbf{P}t\mathbf{I}_n\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{PAP}^{-1}) = \det(\mathbf{P}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^{-1}) \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \chi_A(t)$.

Definícia 12.9. Charakteristický polynóm lineárnej transformácie $f: R^n \rightarrow R^n$ (R je pole) je charakteristický polynóm matice lineárnej transformácie vzhľadom na ľubovoľnú bázu v R^n .

Definícia je dobrá, lebo ak $\mathbf{A}$ je matica transformácie f vzhľadom na jednu bázu a $\mathbf{B}$ je jej matica vzhľadom na inú bázu, tak $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú podobné, teda $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.

Poznámka. $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ je komplexne združené k z . $z \in \mathbb{C}$ je reálne $\Leftrightarrow z = \bar{z}$. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Definícia 12.10. Nech $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathfrak{M}_{ks}(\mathbb{C})$. Komplexne združená k nej je matica $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{a}_{ij})\in\mathfrak{M}_{ks}(\mathbb{C})$.

Zrejme platí: $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{B}}$; $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}}$.

Veta 12.5. Nech $\mathbf{A}\in\mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je symetrická (tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$). Ak $\mathbf{A}$ chápeme ako komplexnú maticu, tak všetky jej vlastné hodnoty sú reálne.

Dôkaz. Nech $\lambda\in\mathbb{C}$ je ľubovoľná vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$. Teda existuje nenulový vektor $\vec{x}\in\mathbb{C}^n$ taký, že $\vec{x}\mathbf{A}=\lambda\vec{x}$. Komplexné združenie: $\overline{\vec{x}\mathbf{A}}=\overline{\lambda\vec{x}}$ tj. $\vec{x}\bar{\mathbf{A}}=\bar{\lambda}\vec{x}$. Pretože $\mathbf{A}$ má všetky prvky reálne, máme $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$, a teda $\vec{x}\bar{\mathbf{A}}=\bar{\lambda}\vec{x}$. Transponovanie dáva: $(\vec{x}\mathbf{A})^T=(\bar{\lambda}\vec{x})^T$, tj. $\mathbf{A}^T\vec{x}=\bar{\lambda}\vec{x}^T$, ale $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ a preto $\mathbf{A}\vec{x}=\bar{\lambda}\vec{x}^T \Leftrightarrow \vec{x}\mathbf{A}\vec{x}^T=\bar{\lambda}\vec{x}\vec{x}^T$.

Máme: $\vec{x}\mathbf{A}=\lambda\vec{x}$; preto $\lambda\vec{x}\vec{x}^T=\bar{\lambda}\vec{x}\vec{x}^T$ tj. $(\lambda-\bar{\lambda})\vec{x}\vec{x}^T=0$. $\vec{x}\vec{x}^T=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}=x_1\bar{x}_1+\dots+x_n\bar{x}_n=|x_1|^2+\dots+|x_n|^2>0$, keďže $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n-\{(0,\dots,0)\}$, preto $\lambda-\bar{\lambda}=0$ tj. $\lambda=\bar{\lambda}$ teda $\lambda\in\mathbb{R}$.

Podobnosť matice s diagonálnou maticou.

Veta 12.6. Matica $\mathbf{A}\in\mathfrak{M}_{nn}(R)$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú celý priestor R^n . Ak $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici, tak je podobná matici $\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, kde $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in R$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že matica $\mathbf{A}$ je podobná $\mathbf{D}=\text{diag}(d_1,\dots,d_n)$. Pretože máme $\vec{e}_i=(0,\dots,0,1,\dots,0)$: $\vec{e}_i\mathbf{D}=d_i\vec{e}_i$, teda $d_1,\dots,d_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{D}$ (a $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ sú príslušné vlastné vektory). Vieme, že $\{d_1,\dots,d_n\}$ je tiež množinou všetkých vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$. Chceme ukázať, že vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú R^n . Máme, že $\mathbf{D}=\mathbf{PAP}^{-1}$ pre vhodnú regulárnu maticu $\mathbf{P}$. Teda z $\vec{e}_i\mathbf{D}=d_i\vec{e}_i$ dostaneme: $\vec{e}_i\mathbf{PAP}^{-1}=d_i\vec{e}_i$ (sprava $\mathbf{P}$): $(\vec{e}_i\mathbf{P})\mathbf{A}=d_i(\vec{e}_i\mathbf{P})$. $\vec{e}_1\mathbf{P},\dots,\vec{e}_n\mathbf{P}$ sú nenulové z R^n , teda sú to vlastné vektory patriace k vlastným hodnotám $d_1,\dots,d_n$ matice $\mathbf{A}$. Navyše $\vec{e}_1\mathbf{P},\dots,\vec{e}_n\mathbf{P}$ sú lineárne nezávislé, lebo sú to obrazy básových vektorov $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ priestoru R^n pri regulárnej lineárnej transformácii $f_P: R^n\rightarrow R^n$. Teda $\vec{e}_1\mathbf{P},\dots,\vec{e}_n\mathbf{P}$ sú vlastné vektory matice $\mathbf{A}$, generujúce R^n .

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že vlastné vektory matice $\mathbf{A}$ generujú celý priestor R^n . Vyberme spomedzi nich bázu $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$ priestoru R^n . Nech $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in R$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$ patriace k $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n$. Teda $\vec{b}_1\mathbf{A}=\lambda_1\vec{b}_1=f_A(\vec{b}_1),\dots,\vec{b}_n\mathbf{A}=\lambda_n\vec{b}_n=f_A(\vec{b}_n)$. tj. máme, že $f_A(\vec{b}_1)=\lambda_1\vec{b}_1+0\vec{b}_2+\dots+0\vec{b}_n,\dots,f_A(\vec{b}_n)=0\vec{b}_1+\dots+\lambda_n\vec{b}_n$. Teda lineárna transformácia $f_A: R^n\rightarrow R^n$ (ktorá vzhľadom na $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ má maticu $\mathbf{A}$) má vzhľadom na bázu $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$ maticu $\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Potom z jednej z viet vieme, že $\mathbf{A}$ je podobná $\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Príklad. Matica $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nie je podobná diagonálnej matici.

$\chi_A(t)=\det\begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}=(t-1)^2$. Keby $\mathbf{A}$ bola podobná diagonalnej matici, tak by bola podobná $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Teda by existovala regulárna matica $\mathbf{P}$ taká, že $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – to nie je pravda, preto $\mathbf{A}$ nie je podobná diagonálnej matici.

Vlastné vektory patriace k vlastnej hodnote $\lambda=1$: $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (x_1, x_2)$.

Z toho: $x_1=x_1$ a $x_1+x_2=x_2$ Potom $x_1=0$. Vlastné vektory sú tvaru: $k(0, 1)$; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Vlastné vektory negenerujú celé $\mathbb{R}^2$, podľa vety **A** nie je podobná diagonálnej matici.

Veta 12.7. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ a nech $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in R$ sú také vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$, ktoré sú navzájom rôzne. Nech $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sú vlastné vektory patriace $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Potom $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Indukcia podľa r :

1° Pre $r=1$ keďže $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ je lineárne nezávislé, tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $r-1$. Teraz nech $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ je r navzájom rôznych vlastných hodnôt, nech príslušné vlastné vektory sú $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$. Nech $\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Sprava $(\lambda_r \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$:
 $\alpha_1 \vec{b}_1 (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) + \dots + \alpha_{r-1} \vec{b}_{r-1} (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) = \vec{0} (\lambda_r \mathbf{I}_r - \mathbf{A}) \Leftrightarrow \alpha_1 \vec{b}_1 \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_1 \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots$
 $\dots + \alpha_{r-1} \vec{b}_{r-1} \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} \vec{b}_{r-1} + \alpha_r \vec{b}_r \lambda_r \mathbf{I}_r - \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_r \vec{b}_1 - \alpha_1 \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots$
 $\dots + \alpha_{r-1} \lambda_r \vec{b}_{r-1} + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} \vec{b}_{r-1} + \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r - \alpha_r \lambda_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Teda $\alpha_1 (\lambda_r - \lambda_1) \vec{b}_1 + \dots +$
 $+ \alpha_{r-1} (\lambda_r - \lambda_{r-1}) \vec{b}_{r-1} = \vec{0}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r-1}$ sú lineárne nezávislé. Preto $\alpha_1 (\lambda_r - \lambda_1) = 0, \dots, \alpha_{r-1} (\lambda_r - \lambda_{r-1}) = 0$. Ale $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$, teda $\lambda_r - \lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r - \lambda_{r-1} \neq 0$, z toho: $\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$. Zostáva $\alpha_r \vec{b}_r = \vec{0}$. Pretože $\vec{b}_r \neq \vec{0}$, máme aj $\alpha_r = 0$.

Dôsledok. Ak $\mathbf{A}$ je taká matica, že má n navzájom rôznych vlastných hodnôt, tak príslušné vlastné vektory sú lineárne nezávislé, teda generujú celé R^n , a teda je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Niektoré fakty o polynómoch.

Veta 12.8. Nech polynóm $p(t)$ je stupňa $n \geq 0$; $q(t)$ je stupňa $m \geq 0$ nad R . Potom existuje jediný polynóm $d(t)$ a jediný polynóm $r(t)$ ($\deg(r(t)) < m$) také, že $p(t) = d(t)q(t) + r(t)$

Veta 12.9. Nech $p(t) \in R[t]$, $\deg(p(t)) \geq 1$. Potom $\alpha \in R$ je koreňom $p(t)$ práve vtedy, keď $p(t) = (t - \alpha)q(t)$, kde $\deg(q(t)) = \deg(p(t)) - 1$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Predpokladajme, že $\alpha \in R$ je koreň. Teda $p(\alpha) = 0$. Z vety 12.8 vieme, že: $p(t) = (t - \alpha)q(t) + r(t)$, kde $\deg(r(t)) < 1$. Keďže $p(\alpha) = 0 = r(\alpha)$, máme $r(t) \equiv 0$, teda $p(t) = (t - \alpha)q(t)$.

$\Leftarrow$: Ak $p(t) = (t - \alpha)q(t)$, tak $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$, teda α je koreň.

Definícia 10.11. Hovoríme, že polynóm $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in R[t]$ sa nad R úplne rozkladá na lineárne činitele, ak $p(t)$ sa dá vyjadriť v tvare $p(t) = a_n (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$ pre dáke $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$. Keď združíme rovnaké činitele, tak dostaneme: $p(t) = a_n (t - \alpha_1)^{k_1} \dots (t - \alpha_s)^{k_s}$, pričom $\sum k_i = n$.

Príklad. Polynóm $t^2 + 1$ sa nad $\mathbb{R}$ nerozkladá úplne na lineárne činitele, ale nad $\mathbb{C}$ sa rozkladá.

Základná veta algebry.

Každý nekonštantný polynóm z $\mathbb{C}[t]$ má v $\mathbb{C}$ koreň.

Dôsledok. Každý polynóm z $\mathbb{C}[t]$ sa úplne rozkladá na lineárne činitele nad $\mathbb{C}$.

Tvrdenie 12.4. Každý nekonštantný polynóm s reálnymi koeficientmi sa rozkladá na súčin polynómov stupňa ≤ 2 .

Dôkaz. Nech $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Ak $p(t)$ chápeme ako polynóm nad $\mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je jeho koreň, tak aj $\bar{z}_0$ je koreň, lebo $p(z_0) = 0 = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0$, a teda tiež $0 = \overline{a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{a_n z_0^n} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \bar{a}_0 = a_n (\bar{z}_0)^n + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0$. Z dôsledku základnej vety algebry vieme, že $p(t) = a_n (t - z_1) \dots (t - z_n)$ pre $z_i \in \mathbb{C}$. Ale ak z_i je koreň, tak aj $\bar{z}_i$ je koreň, teda pre $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $z_i = \bar{z}_j$ pre vhodné $j \in \{1, \dots, n\}$. Teda $p(t)$ obsahuje súčiny $(t - z_j)(t - \bar{z}_j) = t^2 - \underbrace{(z_j + \bar{z}_j)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{z_j \bar{z}_j}_{\in \mathbb{R}}$; ob-

sahuje činitele stupňa 1 $\vee$ 2.

Tvrdenie 12.5. Ak $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ má nepárny stupeň, tak $p(t)$ má koreň v $\mathbb{R}$.

Dôkaz. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že ak $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ nemá reálne korene, tak má párny stupeň.

Veta 12.10. Nech $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ má charakteristický polynóm $\chi_A(t) \in R[t]$ taký, že sa úplne rozkladá nad R na navzájom rôzne lineárne činitele, $\chi_A(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$. Nech $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sú vlastné vektory patriace k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, označme $V_A(\vec{b}_i) = [\vec{b}_i] \subset R^n$. Potom matica $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]$.

Dôkaz. To, že $\mathbf{A}$ je podobná $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ už vlastne vieme z dôsledku vety 12.7. Tiež vieme, že $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ generujú celé R^n . Teda každé $\vec{x} \in R^n$ je tvaru $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$, teda $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]$. Ale $[\vec{b}_i] \cap ([\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_{i-1}] \oplus [\vec{b}_{i+1}] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]) = \{\vec{0}\}$ pre každé i . (keby nie, tak by pre dáke $\alpha \vec{b}_i = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_{i-1} \vec{b}_{i-1} + \beta_{i+1} \vec{b}_{i+1} + \dots + \beta_n \vec{b}_n$, čo je nemožné, lebo $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sú lineárne nezávislé.) Teda v skutočnosti: $R^n = [\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]$.

Definícia 12.12. Pre $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ definujme jej k -tú mocninu ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) takto: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1}$.

Veta Cayley-Hamiltonova.

Nech $\chi_A(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in R[t]$ je charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Potom platí $a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}$. Stručne $\chi_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ máme

$$\mathbf{B} \cdot \text{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(\det(\mathbf{B}), \dots, \det(\mathbf{B})) = \det(\mathbf{B}) \mathbf{I}_n$$

to platí aj pre matice nad komutatívnym okruhom s 1. Špeciálne:

$$(*) \quad (t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n = \chi_A(t) \cdot \mathbf{I}_n$$

Lubovoľnú maticu nad okruhom $R[t]$ môžeme napísať v tvare "polynóm" s koeficientami z $M_{nn}(R)$ pri mocninách t . Napr.:

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & -1 \\ 0 & t & 2t \\ t+t^2 & t+t^2 & t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ takto napíšeme ako "polynóm" s konštantnými maticovými koeficientmi stupňa $\leq n-1$. Teda $\text{adj}(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t + \dots + \mathbf{B}_{n-1} t^{n-1}$ pre vhodné $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{n-1} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$. Teda (*) prepíšeme $(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t + \dots + \mathbf{B}_{n-1} t^{n-1}) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) \mathbf{I}_n$. Porovnáme koeficienty na ľavej a pravej strane pri rovnakých mocninách t .

$$\begin{array}{lll} t^0 : & -\mathbf{A}\mathbf{B}_0 = a_0 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^0 \\ t^1 : & \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1 = a_1 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A} \\ t^2 : & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_2 = a_2 \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t^{n-1} : & \mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1} = a_{n-1} \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^{n-1} \\ t^n : & \mathbf{B}_{n-1} = \mathbf{I}_n & / \cdot \mathbf{A}^n \end{array}$$

Sčítaním ľavých resp. pravých strán: $a_0 \mathbf{I}_n + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.

Veta 12.11 a Definícia 12.13. Pre každú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ existuje práve jeden polynóm $\mu_A(t) \in R[t]$ s koeficientom 1 pri najvyššej mocnine t taký, že " $\mu_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ " a taký, že každý polynóm $R[t] \ni p(t) \neq 0$ s vlastnosťou " $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ " je násobkom polynómu $\mu_A(t)$. Polynóm $\mu_A(t)$ sa nazýva *minimálny polynóm matice* $\mathbf{A}$.

Dôkaz. Označme $N_A = \{p(t) \in R[t]; p(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \text{ a ak } p(t) \neq 0, \text{ tak má koeficient 1 pri najvyššej mocnine}\}$. $N_A \neq \emptyset$, lebo z Cayley – Hamiltonovej vety vieme, že $\chi_A(t) \in N_A$. Zároveň je jasné, že v N_A existujú polynómy stupňa ≥ 0 . Nech $\mu_A(t)$ je polynóm najmenšieho stupňa ≥ 1 v N_A . Nech $p(t) \neq 0$ je taký, že $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Chceme ukázať, že $p(t)$ je násobkom $\mu_A(t)$. Vieme, že existuje jediný $p(t)$ a jediný $r(t)$ tak, že $p(t) = \mu_A(t)q(t) + r(t)$, pričom $\deg(r(t)) < \deg(\mu_A(t))$. Máme $r(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ a zároveň $\deg(r(t)) < \deg(\mu_A(t))$, to je možné len tak, že $r(t) \equiv 0$, teda $p(t)$ je $q(t)$ -násobkom polynómu $\mu_A(t)$. Ešte treba ukázať jednoznačnosť: Nech by boli dva také polynómy $\mu_A(t); \bar{\mu}_A(t)$ s potrebnými vlastnosťami. Potom $\bar{\mu}_A(t)$ je násobkom polynómu $\mu_A(t)$, ale aj μ_A je násobkom $\bar{\mu}_A(t)$. Pretože $\mu_A(t)$ aj $\bar{\mu}_A(t)$ má koeficient 1 pri najvyššej mocnine, dostávame $\mu_A(t) = \bar{\mu}_A(t)$.

Príklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(t) = (t-1)^2$. $\mu_A(t)$ by mohol byť $(t-1)^2$ alebo $(t-1)$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ teda $t-1$ nie je minimálny polynóm. Teda $\mu_A(t) = (t-1)^2$.

Jordanov normálny tvar matice (lineárnej transformácie).

Definícia 12.14. Ak $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia a $\lambda \in R$ je jej vlastná hodnota, tak $(f - \lambda)^k$ bude označovať lineárnu transformáciu $(f - \lambda id_{R^n}) \circ \dots \circ (f - \lambda id_{R^n}) : R^n \rightarrow R^n$. Špeciálne: $(f - \lambda)^0 = id_{R^n}$. Označme $V_f(\lambda) = \{\vec{x} \in R^n; \text{ existuje } n \geq 0 \text{ také, že } (f - \lambda)^n(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Vlastné vektory lineárnej transformácie f patriace k λ patria do $V_f(\lambda)$: ak $\vec{v}$ je vlastný vektor patriaci k λ , tak $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ t.j. $(f - \lambda)(\vec{v}) = \vec{0}$.

Definícia 12.15. $V_f(\lambda)$ sa nazýva *zovšeobecnená vlastná množina* patriaca k vlastnej hodnote λ .

Veta 12.12.

- 1.) $V_f(\lambda)$ je vektorový podpriestor v R^n .
- 2.) $f(V_f(\lambda)) \subset V_f(\lambda)$ (tomu sa hovorí, že $V_f(\lambda)$ je f -invariantný podpriestor v R^n .)
- 3.) Pre $\vec{x} \in R^n$ označme $\vec{x}_i = (f - \lambda)^i(\vec{x})$. Ale $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$ sú (pre dáke k) nenulové, ale už $\vec{x}_k = \vec{0}$, tak potom $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$ sú lineárne nezávislé.

Dôkaz.

- 1.) $V_f(\lambda) \neq \emptyset$, lebo tam patria vlastné vektory f . Nech $\vec{x}, \vec{y} \in V_f(\lambda)$ sú ľubovoľné, nech $\alpha \in R, \beta \in R$. Chceme ukázať, že $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in V_f(\lambda)$. Máme $(f - \lambda)^k(\vec{x}) = \vec{0}$ pre dáke $k \geq 0$; $(f - \lambda)^m(\vec{y}) = \vec{0}$ pre dáke $m \geq 0$. Potom $(f - \lambda)^{k+m}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = (f - \lambda)^m(f - \lambda)^k(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = (f - \lambda)^m(\alpha \underbrace{(f - \lambda)^k(\vec{x})}_{\vec{0}} + \beta(f - \lambda)^k(\vec{y})) = \beta(f - \lambda)^m(f - \lambda)^k(\vec{y}) = \beta(f - \lambda)^k(\vec{y})$.

$$\cdot \underbrace{(f - \lambda)^m(\vec{y})}_{\vec{0}} = \vec{0}.$$

- 2.) Nech $\vec{y} \in f(V_f(\lambda))$. Chceme ukázať, že $\vec{y} \in V_f(\lambda)$. Máme $\vec{y} = f(\vec{x})$ pre dáke $\vec{x} \in V_f(\lambda)$. Teda $\exists m \geq 0$: $(f - \lambda)^m(\vec{x}) = \vec{0}$. Potom $(f - \lambda)^m(\vec{y}) = (f - \lambda)^m(f(\vec{x})) = (f - \lambda)^m \circ f(\vec{x}) = \underbrace{f \circ (f - \lambda)^m(\vec{x})}_{\vec{0}} = \vec{0}$, teda $\vec{y} \in V_f(\lambda)$.

- 3.) Nech $\alpha_0 \vec{x}_0 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{x}_{k-1} = \vec{0}$, chceme ukázať, že $\alpha_0 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Máme $\alpha_0(f - \lambda)^0(\vec{x}) + \alpha_1(f - \lambda)^1(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$. Aplikujeme na obe strany $(f - \lambda)^{k-1}$. Potom $\alpha_0(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) + \alpha_1(f - \lambda)^k(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{2k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$ $\alpha_0 \vec{x}_{k-1} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_0 \vec{x}_{k-1} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_0 = 0$.

Zostáva: $\alpha_1(f - \lambda)^1(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0} \quad / (f - \lambda)^{k-2}$
 $\alpha_1(f - \lambda)^{k-1}(\vec{x}) + \dots + \alpha_{k-1}(f - \lambda)^{2k-3}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \alpha_1 \vec{x}_{k-1} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$ atď.
 $\alpha_i = 0 \quad \forall i$.

Dôsledok. $\forall \vec{a} \in V_f(\lambda)$ máme $(f - \lambda)^n(\vec{a}) = \vec{0}$.

Dôkaz. Nech $\vec{a} \in V_f(\lambda)$ je ľubovoľný. Ak $(f - \lambda)^n(\vec{a}) \neq \vec{0}$, tak aj $\vec{a}_i = (f - \lambda)^i(\vec{a}) \neq \vec{0}$ pre $i = 0, \dots, n$. Z 3.) by sme mali (keďže existuje $m \geq 0 : (f - \lambda)^m(\vec{a}) = \vec{0}$, pretože $\vec{a} \in V_f(\lambda)$), že $\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé. Ale je ich $n+1$ a sú v R^n -sporo.

Definícia 12.16. *Jordanova matica* typu $n \times n$ nad poľom R patriaca k vlastnej hodnote λ (lineárnej transformácie, resp. matice) je matica, ktorá má na hlavnej diagonále samé λ , na susednej (zhora) čiare rovnobežnej s hlavnou diagonálou má samé 1, a inde 0. Ozn. $\mathbf{J}_n(\lambda)$.

Príklad. $\mathbf{J}_1(\lambda)=(\lambda), \mathbf{J}_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{J}_3(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

Veta 12.13. *Nech $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia, ktorá má jedinú a pritom n -násobnú vlastnú hodnotu $\lambda \in R$. Potom $V_f(\lambda) = R^n$ a vo $V_f(\lambda)$ existuje báza, vzhľadom na ktorú má f maticu $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$, pozostávajúca z Jordanových matíc $\mathbf{J}_{q_1}(\lambda), \dots, \mathbf{J}_{q_r}(\lambda)$ (kde $q_1 \geq \dots \geq q_r$) umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály a okrem toho už iba z núl. $q_1 + \dots + q_r = n$*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{q_1}(\lambda)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{J}_{q_2}(\lambda)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{q_r}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

Veta 12.14. *Pre maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ takú, že má jedinú n -násobnú vlastnú hodnotu $\lambda \in R$ platí, že $V_f(\lambda) = R^n$ a matica $\mathbf{A}$ je podobná matici $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ pozostávajúcej z Jordanových matíc: $\mathbf{J}_{q_1}(\lambda), \dots, \mathbf{J}_{q_r}(\lambda)$ umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály ($q_1 + \dots + q_r = n$) ináč iba z núl.*

Dôkaz. $\chi_A(t) = (t - \lambda)^n$. Z Cayley – Hamiltonovej vety: $(f - \lambda)^n \equiv 0$. Tj. pre $\forall \vec{x} \in R^n$: $(f - \lambda)^n(\vec{x}) = \vec{0}$; z toho teda $R^n = V_f(\lambda)$.

Veta 12.15. *Nech $f : R^n \rightarrow R^n$ je lineárna transformácia taká, že jej charakteristický polynóm je: $\chi_f(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_s)^{n_s}$ (kde $n_1 + \dots + n_s = n$). Potom $R^n = V_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_f(\lambda_s)$ a pre každé $V_f(\lambda_i)$; $i = 1, \dots, s$ existuje jeho báza, vzhľadom na ktorú má $f|_{V_f(\lambda_i)} : V_f(\lambda_i) \rightarrow V_f(\lambda_i)$ maticu $\mathbf{A}(\lambda_i) \in \mathfrak{M}_{n_i n_i}(R)$ pozostávajúcu z Jordanových matíc (súčet stupňov ktorých je n_i) umiestnených pozdĺž hlavnej diagonály a ináč iba z núl. Teda vzhľadom na bázu $(B_1, \dots, B_s)$ priestoru R^n má f maticu tvaru:*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{q_1}(\lambda)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{J}_{q_2}(\lambda)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{q_r}(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Potom $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \dots (t - \lambda_s)^{n_s}$. ($\sum n_i = n$) platí, že $R^n = V_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_f(\lambda_s)$ a matica $\mathbf{A}$ je podobná matici tvaru (*).

Definícia 12.17. Matica (*) je tzv. *Jordanov normálny tvar* matice $\mathbf{A}$.

Poznámka.

- 1.) Každá matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{C})$ spĺňa predpoklady vety a teda k nej existuje nejaký Jordanov normálny tvar.
- 2.) Špeciálne, ak matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je taká, že $\chi_A(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$ kde $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$, tak sme už dávnejšie dokázali, že $\mathbf{A}$ je podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Toto je Jordanov normálny tvar takejto matice $\mathbf{A}$.

Tvrdenie 12.6.

- 1.) Jordanov normálny tvar je jediný, odhliadnime od permutácie Jordanových matic pozdĺž hlavnej diagonály.
- 2.) Dve matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ také, že ich charakteristické polynómy sa nad R úplne rozkladajú na lineárne činitele sú podobné práve vtedy, keď pripúšťajú ten istý Jordanov normálny tvar.
- 3.) Počet Jordanových matic v Jordanovom normálnom tvare matice $\mathbf{A}$ sa rovná najmenšiemu možnému počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$.
- 4.) Počet Jordanových matic zodpovedajúcich nejakej vlastnej hodnote matice $\mathbf{A}$ sa rovná maximálnemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k tej vlastnej hodnote. Ak $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in R$; ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$) tak $m_i =$ súčet stupňov Jordanových matic patriacich k λ_i .
- 5.) Stupeň najväčšej spomedzi Jordanových matic patriacich k vlastnej hodnote λ sa rovná násobnosti λ ako koreňa minimálneho polynómu.
- 6.) Nech $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$. Potom stupeň najväčšej spomedzi Jordanových matic patriacich k λ_i určíme takto: vyrátame $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n, (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^2, \dots$. Zistíme, že hodnota matice $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^k$ s rastom k po čase prestane klesať. Práve najmenšia hodnota k , pre ktorú sa dosiahne najnižšia hodnota sa rovná stupni najväčšej Jordanovej matice patriacej k λ_i .

Príklad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -4 & -\frac{11}{3} \\ 2 & 3 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 6 & 6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2 \\ \text{teda existuje jej} \\ \text{Jordanov} \\ \text{normálny tvar.} \end{array}$$

$h(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4) = 3$; $h((\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)^2) = 2$; $h((\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)^3) = 2, \dots$ Teda v Jordanovom normálnom tvare bude $\mathbf{J}_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4) = 2$; $h((\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^2) = 2, \dots$ stupeň najväčšej Jordanovej matice patriacej k 1 bude 1. Z toho Jordanov normálny tvar matice $\mathbf{A}$ je:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka.

Nech charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(R)$ je $\chi_A(t) = (t - \lambda)^n$. Potom:

- (i) Najväčšia Jordanova matica má stupeň k_1 , kde k_1 je najmenšie celé také, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1} = 0$.
 - (ii) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-1}) =$ počet Jordanových matic stupňa k_1 .
 - (iii) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-2}) = (2 \cdot \text{počet Jordanových matic stupňa } k_1) + (\text{počet Jordanových matic stupňa } (k_1 - 1))$.
 - (iv) $h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^{k_1-3}) = (3 \cdot \text{počet JM stupňa } k_1) + 2 \cdot (\text{počet JM stupňa } k_1 - 1) + 1 \cdot (\text{počet JM stupňa } (k_1 - 2))$.
- atď.

Príklad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{R}) \quad \begin{array}{ll} \chi_A(t) = (t-1)^4, & h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4) = 2 \\ h((\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^2) = 1, & h(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)^3 = 0 \end{array}$$

Potom počet Jordanových matic stupňa 3 je $h((\mathbf{A}-1\mathbf{I}_4)^2)=1$.

$$\text{Jordanov normálny tvar matice } \mathbf{A} \text{ je } \mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

XIII. KVADRATICKÉ FORMY (NAD POĽOM $\mathbb{R}$)

Budeme uvažovať o n ($n \geq 0$) premenných $x_1, \dots, x_n$, ktoré budú môcť nadobúdať reálne hodnoty, pritom bude platiť $x_i x_j = x_j x_i \forall i, j$. Potom *kvadratická forma* n premenných $x_1, \dots, x_n$ je výraz tvaru: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sú tzv. koeficienty kvadratickej formy.

Príklad.

- 1.) 0 je kvadratická forma, kde $a_{ij}=0 \forall i, j$.
- 2.) $x_1^2 + x_2^2$ je kvadratická forma dvoch premenných.
- 3.) $x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2 x_3$ je kvadratická forma troch premenných.

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2 x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kvadratickú formu $\sum a_{ij} x_i x_j$ (n premenných) môžeme napísať v tvare: $\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Ale takýchto zápisov} \\ \text{v tvare } \mathbf{X} \cdot \text{matice} \cdot \mathbf{X}^T \\ \text{je nekonečne veľa} \\ \text{napr. tiež:} \end{matrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}-\varepsilon & \dots & a_{1n} \\ -\varepsilon & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{X}^T$$

pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Veta 13.1. Pre každú kvadratickú formu $\sum a_{ij} x_i x_j$ existuje jediná symetrická matica $\mathbf{S} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$.

Dôkaz. $\mathbf{S} = s_{ij}; s_{ij} = s_{ji}$. Musí byť $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} x_i x_j$. Z porovnávaní: $a_{ii} = s_{ii}$ pre $i=1, \dots, n$ a pre $i \neq j$: $s_{ij} + s_{ji} = 2s_{ij} = a_{ij} \Rightarrow s_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij}$. $\mathbf{S}$ je matica kvadratickej formy.

Príklad.

$$2x_1^2 - x_1 x_2 + x_3^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definícia 13.1.

Regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$ rozumieme zavedenie nových premenných $\mathbf{Y}=(y_1, \dots, y_n)$ takých, že $\mathbf{Y}=\mathbf{XP}$ pre dákú regulárnu maticu $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. $\mathbf{Y}=\mathbf{XP} \Leftrightarrow \mathbf{X}=\mathbf{YP}^{-1}$.

Kvadratické formy budeme zapisovať v tvare $\mathbf{XSX}^T$, kde $\mathbf{S}=\mathbf{S}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$. Urobme v kvadratickej forme $\mathbf{XSX}^T$ regulárnu lineárnu transformáciu premenných $\mathbf{Y}=\mathbf{XP}$. Keďže $\mathbf{P}$ je regulárna, máme $\mathbf{X}=\mathbf{YP}^{-1}$, teda $\mathbf{XSX}^T=\mathbf{YP}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{YP}^{-1})^T=\mathbf{Y}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{P}^{-1})^T}_{\mathbf{B}}\mathbf{Y}^T$. Máme $\mathbf{B}^T=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{P}^{-1})^T)^T=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{P}^{-1})^T=\mathbf{B}$, teda $\mathbf{B}$ je symetrická. Od formy $\mathbf{XSX}^T$ premenných $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$ sme prešli ku kvadratickej forme n premenných $\mathbf{Y}=(y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{YBY}^T$ pričom $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{P}^{-1})^T$. tj. $\mathbf{S}=\mathbf{PBP}^T$.

Definícia 13.2. Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sú *kongruentné* (nad $\mathbb{R}$) ak existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\mathbf{A}=\mathbf{QBQ}^T$.

Poznámka. Ak kvadratickú formu $\mathbf{XSX}^T$ upravíme regulárnou lineárnou transformáciou premenných na "novú" kvadratickú formu, tak matice týchto foriem sú kongruentné.

Veta 13.2. Každú (nenulovú) kvadratickú formu n premenných možno vhodnou regulárnou lineárnou transformáciou premenných previesť na tvar:

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_n^2, \text{ kde } s \leq n.$$

Dôkaz. Majme (nenulovú) kvadratickú formu $\mathbf{XSX}^T$, kde $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ $\mathbf{S}=\mathbf{S}^T=(s_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Vhodnou regulárnou lineárnou transformáciou premenných môžeme $\mathbf{XSX}^T$ previesť na $\mathbf{ZBZ}^T$, kde $\mathbf{Z}=(z_1, \dots, z_n)$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}^T=(b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, pričom už $b_{11} \neq 0$. Ak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ také, že $s_{ii} \neq 0$, tak zoberieme $x_i=z_1$, $x_1=z_i$, $x_j=z_j$ pre $1 \neq j \neq i$. Ak $s_{11}=\dots=s_{nn}=0$ tak existujú dake $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq j$, $s_{ij} \neq 0$. Potom zavedieme nové premenné $(y_1, \dots, y_n)$, $x_i=y_1+y_j$; $x_j=y_i-y_j$; $x_k=y_k$ pre $i \neq k \neq j$. To je regulárna lineárna transformácia premenných. Dostaneme: $\mathbf{XSX}^T = 2 \underbrace{s_{ij}}_{\neq 0} x_i x_j + \text{členy bez } x_i x_j = 2s_{ij}(y_i^2 - y_j^2) + \text{členy bez } y_i^2 = 2s_{ij}y_i^2 + \text{členy}$

bez y_i^2 , máme $\mathbf{XSX}^T=\mathbf{YCY}^T$, kde $\mathbf{C}=(c_{ij})$ má $c_{ii}=2s_{ij} \neq 0$. Potom zámenou premenných $z_1=y_i$; $z_i=y_1$; $z_j=y_j$ pre $1 \neq j \neq i$ prejdeme k forme $\mathbf{ZBZ}^T$, kde už $b_{11} \neq 0$. Teraz: $\mathbf{XSX}^T=\mathbf{ZBZ}^T=b_{11}z_1^2+b_{12}z_1z_2+\dots+b_{1n}z_1z_n+b_{21}z_2z_1+\dots+b_{n1}z_nz_1+$

$$+ \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}z_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n b_{ij}z_1z_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}(z_1^2 + 2z_1 \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j) +$$

$$+ \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j = b_{11}(z_1 + \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} b_{ij}z_iz_j - b_{11} \left(\sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j \right)^2,$$

zámena premenných:	$\begin{vmatrix} u_1 = z_1 + \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}z_j \\ u_2 = z_2 \\ \vdots \\ u_n = z_n \end{vmatrix}$	to je regulárna lineárna transformácia premenných, jej matica:	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_{12}}{b_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{1n}}{b_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
-----------------------	---	--	--

je regulárna. Dostaneme: $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T = \mathbf{Z}\mathbf{B}\mathbf{Z}^T = b_{11}u_1^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} g_{ij}u_i u_j = b_{11}u_1^2 + \mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{U}^T$,

kde $\mathbf{G} \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$, $\mathbf{U} = (u_2, \dots, u_n)$. Opakovaním konečného počtu takýchto krokov dostaneme pomocou regulárnych lineárnych transformácií premenných, že $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T = d_1 v_1^2 + \dots + d_s v_s^2$, kde $s \leq n$. Permutáciou premenných $v_1, \dots, v_n$ dostaneme, že $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T = c_1 p_1^2 + \dots + c_k p_k^2 + c_{k+1} p_{k+1}^2 + c_s p_s^2$, kde $c_1, \dots, c_k$ sú kladné a $c_{k+1}, \dots, c_s$ sú záporné. Potom urobíme regulárnu lineárnu transformáciu premenných: $y_1 = \sqrt{c_1} p_1, \dots, y_k = \sqrt{c_k} p_k, y_{k+1} = \sqrt{-c_{k+1}} p_{k+1}, \dots, y_s = \sqrt{-c_s} p_s$. Potom $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2 = \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$; $s \leq n$

Dôsledok. Každá symetrická matica typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je kongruentná s diagonálnou maticou, ktorá má na hlavnej diagonále iba prvky z $\{-1, 0, 1\}$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tak $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$ je kvadratická forma, ktorá sa regulárnou lineárnou transformáciou premenných upraví na tvar: $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$, ($s \leq n$), teda na kvadratickú formu s maticou $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Matice tých kvadratických foriem sú kongruentné.

Veta 13.3. (o zotrvačnosti):

Ak danú (nenulovú) kvadratickú formu $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$ n premenných upravíme regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{Q}$ na $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$, ($s \leq n$) a regulárnou lineárnou transformáciou premenných $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{H}$ ju upravíme na $z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_t^2$ ($t \leq n$), tak $k=r$ a $s=t$.

Poznámka. Táto veta odôvodňuje, prečo sa tvar $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$ ($s \leq n$) nazýva aj *kanonický tvar* kvadratickej formy $\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X}^T$.

Dôkaz. 1.) $\boxed{s=t}$: $\mathbf{D}_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s-k}, 0, \dots, 0)$ je matica $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$. Vieme, že $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T$. $\mathbf{D}_2 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_{t-r}, 0, \dots, 0)$

je matica $z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_t^2$. Tiež $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{H}^T$. Pre hodnotu máme:

$$h(\mathbf{S}) = h(\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T) = \dim(\text{Im } f_{Q^T D_1 Q}) = \dim(\text{Im } f_{Q^T} f_{D_1} f_Q) = \dim(\text{Im } f_{Q^T} f_{D_1}) = \dim(\text{Im } f_{D_1}) = h(\mathbf{D}_1) = s \text{ (pretože } \mathbf{Q} \text{ aj } \mathbf{Q}^T \text{ je lineárny izomorfizmus.)}$$

2.) $\boxed{k=r}$: Nech by $r < k$. $f_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sú lineárne izomorfizmy. Označme $S_1 = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k], S_2 = [\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n]$ podpriestory v $\mathbb{R}^n$. Teda $\dim(S_1) = k$, $\dim(S_2) = n - r$. Označme $T_1 = f_Q^{-1}(S_1), T_2 = f_H^{-1}(S_2)$. Pretože f_Q, f_H sú lineárne izomorfizmy, máme $\dim(T_1) = k, \dim(T_2) = n - r$. Tvrdíme, že $T_1 \cap T_2 \neq \{\vec{0}\}$.

$\dim(T_1 + T_2) = \dim(T_1) + \dim(T_2) - \dim(T_1 \cap T_2) = \dim(T_1) + \dim(T_2) = k + n - r$. Ale z predpokladu $k - r > 0$, teda by bolo, že $\dim(T_1 + T_2) > n$ spor s tým, že $T_1 + T_2 \subset \mathbb{R}^n$.

Nech teraz $\vec{c} \in T_1 \cap T_2, \vec{c} \neq \vec{0}$. Máme $\mathbf{D}_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s-k}, 0, \dots, 0)$,

$\mathbf{D}_2 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s-r})$. Vieme, že $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{H}^T$. Rátajme:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{c}^T &= \vec{c} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{Q}^T \cdot \vec{c}^T = (\vec{c} \cdot \mathbf{Q})\mathbf{D}_1(\vec{c} \cdot \mathbf{Q})^T = f_Q(\vec{c})\mathbf{D}_1(f_Q(\vec{c}))^T. \text{ Keďže } f_Q(\vec{c}) \in S_1 \text{ máme:} \\ f_Q(\vec{c}) &= (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, 0, \dots, 0), \text{ kde } (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k) \neq (0, \dots, 0). \text{ Teda } \vec{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{c}^T = \\ &= (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, 0, \dots, 0) \cdot \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, 0, \dots, 0)^T = \end{aligned}$$

$$=(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, 0, \dots, 0)(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, 0, \dots, 0)^T = \tilde{c}_1^2 + \dots + \tilde{c}_k^2 > 0. \text{ Zároveň: } \vec{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{c}^T = \\ = \vec{c} \mathbf{H} \mathbf{D}_2 \mathbf{H}^T \cdot \vec{c}^T = f_H(\vec{c}) \mathbf{D}_2(f_H(\vec{c}))^T, \vec{0} \neq f_H(\vec{c}) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_r, \tilde{c}_{r+1}, \dots, \tilde{c}_s). \text{ Preto}$$

$$\vec{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{c}^T = (0, \dots, 0, \tilde{c}_{r+1}, \dots, \tilde{c}_s) \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0, \tilde{c}_{r+1}, \\ \dots, \tilde{c}_s)^T = (0, \dots, 0, -\tilde{c}_{r+1}, \dots, -\tilde{c}_s, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0, \tilde{c}_{r+1}, \dots, \tilde{c}_s)^T = \\ = -\tilde{c}_{r+1}^2 - \dots - \tilde{c}_s^2 < 0 \text{ spor.}$$

Podobne sa odvodí spor z predpokladu $r > k$. Vcelku: $r = k$.

Definícia 13.3. Kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ sa nazýva *kladne definitná*, ak pre všetky $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ je $\mathbf{XAX}^T > 0$. [nazýva sa *kladne semidefinitná*, ak $\mathbf{XAX}^T \geq 0$ pre všetky $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$; nazýva sa *záporne definitná* ak $\mathbf{XAX}^T < 0$ pre všetky $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.]

Definícia 13.4. Symetrická matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sa volá *kladne definitná*, ak kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná.

Veta 13.4. Ak kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná a $\mathbf{Y} = \mathbf{XP}$ je regulárna lineárna transformácia premenných, tak kvadratická forma $\mathbf{YBY}^T$ získaná z $\mathbf{XAX}^T$ uvedenou regulárnou lineárnou transformáciou premenných je tiež kladne definitná.

Dôkaz. Vieme, že $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{P}^{-1})^T$. Potom pre ľubovoľnú $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ máme $\mathbf{YBY}^T = \mathbf{YP}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{Y}^T = (\mathbf{YP}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{YP}^{-1})^T$, ak forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná, tak $\mathbf{YBY}^T = (\mathbf{YP}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{YP}^{-1})^T > 0$, lebo $\mathbf{YP}^{-1} \neq \mathbf{0}$ (keďže $\mathbf{P}^{-1}$ je regulárna matica). Teda aj forma $\mathbf{YBY}^T$ je kladne definitná.

Veta 13.5. Kvadratická forma je kladne definitná práve vtedy, keď jej kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2$.

Dôkaz. $\boxed{\Leftarrow}$: Ak kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2$, tak pre všetky $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n) \neq \mathbf{0}$ je $y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že aj pôvodná forma je kladne definitná.

$\boxed{\Rightarrow}$: Predpokladajme, že daná kvadratická forma je kladne definitná. Jej kanonický tvar $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_s^2$; $s \leq n$. Keby bolo $k < s < n$, tak hodnota tejto kvadratickej formy v $(\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$ by bola -1 , a teda táto kvadratická

forma by nebola kladne definitná tj. ani pôvodná by nebola kladne definitná –spor.

Veta 13.6. Matica $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je kladne definitná práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\mathbf{P} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že $\mathbf{A} = \mathbf{PP}^T$.

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je kladne definitná. Teda kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná, teda jej kanonický tvar je $y_1^2 + \dots + y_n^2 = \mathbf{YI}_n\mathbf{Y}^T$. Potom vieme, že $\mathbf{A} = \mathbf{PI}_n\mathbf{P}^T$, kde $\mathbf{Y} = \mathbf{XP}$ je regulárna lineárna transformácia premenných, ktorá $\mathbf{XAX}^T$ prevedie na $\mathbf{YI}_n\mathbf{Y}^T$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že $\mathbf{A} = \mathbf{PP}^T$. Potom kvadratická forma určená maticou $\mathbf{A}$ je $\mathbf{XAX}^T = \mathbf{XPP}^T\mathbf{X}^T = (\mathbf{XP})(\mathbf{XP})^T$. Ak $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$, tak $\mathbf{XAX}^T > 0$, alebo $\mathbf{XP} = (x_1, \dots, x_n)\mathbf{P}$ je nenulová n -tica $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ a $b_1^2 + \dots + b_n^2 > 0$.

Veta 13.7. (Sylvestrovo kritérium)

Matica $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je kladne definitná práve vtedy, keď $\det(a_{11}) > 0$,

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0$ čo je ekvivalentné s tým, že kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná.

Stručne: práve vtedy, keď všetky tzv. hlavné rohové determinanty matice $\mathbf{A}$ sú kladné.

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na n :

1°: Pre $n=1$: $a_{11}x_1^2$ je kladne definitná práve vtedy, keď $a_{11} = \det(a_{11}) > 0$.

2°: Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky reálne symetrické matice typu $(n-1) \times (n-1)$. Teraz nech $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Nutnosť podmienky: Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je kladne definitná. Chceme ukázať, že jej hlavné rohové determinanty sú kladné. Vieme, že kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná. $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$. $\mathbf{XAX}^T = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}x_i x_j +$

$+2 \cdot (a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}x_n) + a_{nn}x_n^2$. Uvažujme o kvadratickej forme:

$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}x_i x_j$. Jej matica je $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$. Táto kvadratická forma je

tiež kladne definitná. Keby nie, tak by existovala $(n-1)$ -tica $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \neq \mathbf{0}$ taká, že $\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \leq 0$. Potom $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, 0)$ by bola nenulová n -tica, pričom

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \leq 0$ – spor s tým, že $\mathbf{XAX}^T$ je kladne definitná.

Z indukčného predpokladu: $\det(a_{11}) > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} > 0$. Zostáva

ešte ukázať, že $\det(\mathbf{A}) > 0$. Ale matica $\mathbf{A}$ je kladne definitná, a teda podľa vety 13.6 existuje regulárna matica $\mathbf{P} : \mathbf{A} = \mathbf{PP}^T$, preto $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^T) = \det^2(\mathbf{P}) > 0$ keďže $\mathbf{P}$ je regulárna.

Postačujúcosť: Predpokladajme, že $\det(a_{11}) > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0$.

Z indukčného predpokladu vyplýva, že kvadratická forma

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}x_i x_j$$

je kladne definitná. Teda existuje regulárna matica $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že regulárna lineárna transformácia premenných $(y_1, \dots, y_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \mathbf{P}$ prevedie túto kvadratickú formu na $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2$. Definujme $y_n = x_n$. To znamená, že dostaneme

regulárnu lineárnu transformáciu n premenných $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$.

Táto prevedie kvadratickú formu $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_i x_j$ na $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2 \cdot (b_{1n}y_1y_n + \dots + b_{n-1n}y_{n-1}y_n) + b_{nn}y_n^2$ pre vhodné $b_{ij} \in \mathbb{R}$.

Upravíme:
$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = (y_1 + \dots + b_{1n} y_n)^2 + \dots + (y_{n-1} + b_{n-1n} y_n)^2 + c y_n^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 = y_1 + \dots + b_{1n} y_n \\ \vdots \\ z_{n-1} = y_{n-1} + b_{n-1n} y_n \\ z_n = y_n \end{vmatrix} = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 + c z_n^2 \quad \begin{array}{l} \text{táto forma} \\ \text{má maticu:} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}$$

Táto je kongruentná s $\mathbf{A}$, teda existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ taká, že: $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, c) = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T$. Z toho: $\det(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) = c = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{Q}^T) = \det^2(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{A}) > 0$, teda $c > 0$.

XIV. HOMOGÉNNE BILINEÁRNE FORMY

Definícia 14.1. Nech sú dané dve skupiny n premenných $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n$. Potom *homogénna bilineárna forma* (týchto dvoch skupín premenných) je výraz

tvaru: $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$, pričom $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sú koeficienty tejto formy.

Príklad. $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ je homogénna bilineárna forma, ktorá definuje štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$.

Formu $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ môžeme zapísať pomocou matíc $\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{Y}^T$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Ak $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ tak $\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ je kvadratická forma premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definícia 14.2. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Funkcia $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je *bilineárna*, ak pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí: $\varphi(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}) = \alpha \varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \beta \varphi(\vec{y}, \vec{z})$; $\varphi(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha \varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \beta \varphi(\vec{x}, \vec{z})$.

Tvrdenie 14.1. *Homogénna bilineárna forma je vlastne súradnicové vyjadrenie bilineárnej funkcie.*

Dôkaz. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ a $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ sú dve bázy vo V . Nech $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$ resp. $\vec{y} = y_1 \vec{b}_1 + \dots + y_n \vec{b}_n$. Nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineárna funkcia. Potom $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i; \sum_{j=1}^n y_j \vec{b}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \varphi(\vec{a}_i, \vec{b}_j) y_j$. K φ prislúcha homogénna bilineárna forma $\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{Y}^T$ kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ $\mathbf{A}$ má v i -tom riadku a j -tom stĺpci prvok $\varphi(\vec{a}_i, \vec{b}_j)$.

Homogénna kvadratická funkcia.

Definícia 14.3. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineárna funkcia. Potom *homogénna kvadratická funkcia* prislúchajúca k φ sa definuje ako $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$; $\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$.

Príklad. $V = \mathbb{R}^3$, bilineárna funkcia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_2 y_2$. φ určuje kvadratickú funkciu $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2$. Tá istá kvadratická funkcia prislúcha aj k bilineárnej funkcii $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$.

Veta 14.1. Homogénna kvadratická funkcia je určená jedinou symetrickou bilineárnou funkciou.

Dôkaz. Nech $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrická bilineárna funkcia, ktorá určuje homogénnu kvadratickú funkciu $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ (teda $\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}), \vec{x} \in V$). Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in V$: $\varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}) + 2\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{y}, \vec{y}) \Rightarrow \psi(\vec{x} + \vec{y}) = \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{y}) + 2\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ z čoho $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{x} + \vec{y}) - \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})]$.

Poznámka. Nech V je reálny vektorový priestor, nech je daná kvadratická forma $\mathbf{XAX}^T$ n premenných $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Potom táto kvadratická forma určuje homogénnu kvadratickú funkciu takto: zvolíme bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ vo V . Ak $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \in V$, tak definujeme $\psi(\vec{x}) = \mathbf{XAX}^T$. Potom $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ je homogénna kvadratická funkcia.

Niektoré fakty z euklidovskej teórie kvadratických foriem.

Pripomeňme si: matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je ortogonálna, ak $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n$, tj. jej riadky tvoria ortonormálny systém vektorov v $\mathbb{R}^n$ tj. pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ máme, že $\langle \vec{x}\mathbf{A}, \vec{y}\mathbf{A} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Tvrdenie 14.2. Ortogonálne matice typu $n \times n$ tvoria grupu; je to tzv. ortogonálna grupa; označme ju $O(n)$.

Dôkaz. Ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$, tak $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n, \mathbf{BB}^T = \mathbf{I}_n$ potom $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AI}_n\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$. Teda $\mathbf{AB} \in O(n)$. Asociatívnosť: $\sqrt{}$; neutrálny prvok: $\mathbf{I}_n \in O(n)$, inverzný prvok k $\mathbf{A} \in O(n)$ je $\mathbf{A}^T$, máme $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T$ tj. $\mathbf{A}^T \in O(n)$.

Veta 14.2. Matica prechodu od ortonormálnej bázy v $\mathbb{R}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom) k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež: ak od ortonormálnej bázy v $\mathbb{R}^n$ prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.

Dôkaz. 1.časť: Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), (\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ sú dve ortonormálne bázy v $\mathbb{R}^n$. Nech $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je matica prechodu od $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Teda

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j, i = 1, \dots, n. \text{ Potom } \delta_{ik} = \langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j, \sum_{s=1}^n p_{ks} \vec{a}'_s \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n p_{ij} p_{ks} \underbrace{\langle \vec{a}'_j, \vec{a}'_s \rangle}_{=\delta_{js}} = \sum_{j=1}^n p_{ij} p_{kj}, \text{ teda } \sum_{j=1}^n p_{ij} p_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i=k \\ 0 & \text{ak } i \neq k \end{cases}. \end{aligned}$$

každý riadok v $\mathbf{P}$ (ako vektor z $\mathbb{R}^n$) má dĺžku 1 a každé dva riadky sú na seba kolmé, tj. riadky v $\mathbf{P}$ tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$, tj. $\mathbf{P} \in O(n)$.

2.časť: Nech je daná $O(n) \ni \mathbf{P} = (p_{ij})$ a báza $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, ktorá je ortonormálna.

Matica $\mathbf{P}$ je regulárna, teda vzťahy $\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{a}'_j$ definujú bázu $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Pritom

$$\text{však } \langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = \sum_{j=1}^n p_{ij} p_{kj} = \delta_{ik} \text{ teda } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \text{ je ortonormálna báza.}$$

Veta 14.3. (o hlavných osiach) Pre každú reálnu symetrickú maticu $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ existuje $\mathbf{C} \in O(n)$ taká, že $\mathbf{CAC}^T = \mathbf{CAC}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. (Riadky v $\mathbf{C}$ sú ortogonálne vlastné vektory patriace k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.)

Dôkaz. Indukcia vzhľadom na n .

1° Pre $n=1$ tvrdenie platí.

2° Indukčný predpoklad: Predpokladajme, že veta je správna pre $n-1$. Teraz nech $\mathbf{A}$ je symetrická reálna matica typu $n \times n$. Nech $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ je jej vlastná hodnota, k nej zoberme vlastný vektor $\vec{x}_1$, rovno ho zoberme taký, že $|\vec{x}_1|=1$. Doplníme vektor $\vec{x}_1$ na ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$; nech to je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu od $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ k $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, vieme, že $\mathbf{P} \in O(n)$. Nech $\mathbf{B}$ je matica lineárnej transformácie $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vzhľadom na $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Matica f_A vzhľadom na $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je $\mathbf{A}$, potom vieme, že $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{PAP}^T$. Máme $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$. Tiež: $f_A(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1$, lebo $\vec{x}_1$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k λ_1 . To znamená, že $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{A}' \in \mathfrak{M}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ je symetrická. Podľa indukčného predpokladu existuje ortonormálna matica $\mathbf{H} \in O(n-1)$: $\mathbf{HA}'\mathbf{H}^T = \mathbf{HA}'\mathbf{H}^{-1} = \text{diag}(\lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$, kde $\lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}'$. Utvorme: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$ máme, že $\mathbf{Q} \in O(n)$. Tiež $\mathbf{QP} \in O(n)$. Rátajme: $\mathbf{QPA}(\mathbf{QP})^{-1} = \mathbf{QPA}(\mathbf{QP})^T = \mathbf{QPAP}^T\mathbf{Q}^T =$

$$= \mathbf{QBQ}^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{HA}'\mathbf{H}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Z podobnosti vyplýva $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n\}$. Za $\mathbf{C}$ z tvrdenia zoberieme $\mathbf{QP}$. Teda máme $\mathbf{C} \in O(n)$ takú, že $\mathbf{CAC}^T = \mathbf{CAC}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Z toho: $\vec{e}_i \mathbf{CAC}^{-1} = \vec{e}_i \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\vec{e}_i \mathbf{CA} = (0, \dots, \lambda_i, \dots, 0) \mathbf{C} = \lambda_i \vec{e}_i \mathbf{C}$. Teda $(\vec{e}_i \mathbf{C}) \mathbf{A} = \lambda_i (\vec{e}_i \mathbf{C})$ tj. $\vec{e}_i \mathbf{C}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ patriaci k vlastnej hodnote λ_i zároveň $\vec{e}_i \mathbf{C}$ je i -tý riadok matice $\mathbf{C}$.

Poznámka.

1. Vieme, že vďaka symetrickosti reálnej matice $\mathbf{A}$ sú všetky jej vlastné hodnoty reálne.
2. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ môžeme chápať ako maticu lineárnej transformácie $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Veta vlastne hovorí, že existuje taká báza v $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na ktorú je $\mathbf{A}$ podobná diagonálnej matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
3. Pre kvadratické formy n premenných veta hovorí, že regulárna lineárna transformácia $\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{C}$ (tj. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}\mathbf{C}^{-1}$) prevedie danú kvadratickú formu $\mathbf{XAX}^T$ na tvar $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. ($\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$)

Veta 14.4. Nech $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ je taká, že jej vlastné hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú jednotkové vlastné vektory prislúchajúce k $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ tvoria ortonormálny systém v $\mathbb{R}^n$ (a môžeme ich zobrať ako riadky matice $\mathbf{C} \in O(n)$ z vety 14.3).

Dôkaz. Máme: $\vec{x}_i \mathbf{A} = \lambda_i \vec{x}_i$ (pre $i=1, \dots, n$). Vynásobením: $\vec{x}_i \mathbf{A} \vec{x}_j^T = \lambda_i \vec{x}_i \vec{x}_j^T$; transponovaním: $\vec{x}_j \mathbf{A}^T \vec{x}_i^T = \lambda_j \vec{x}_j \vec{x}_i^T$ tj. $\vec{x}_j \mathbf{A} \vec{x}_i^T = \lambda_j \vec{x}_j \vec{x}_i^T \Leftrightarrow \lambda_j \vec{x}_j \vec{x}_i^T = \lambda_i \vec{x}_j \vec{x}_i^T \Leftrightarrow (\lambda_j - \lambda_i) \vec{x}_j \vec{x}_i^T = 0$. Ale $\lambda_i \neq \lambda_j$, teda $\vec{x}_j \vec{x}_i^T = 0$ štandardný skalárny súčin $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$. $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ má vzhľadom na bázu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ maticu $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Príklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Nájsť ortogonálnu maticu $\mathbf{C} \in O(n)$, aby $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Kde $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$.

XV. KRIVKY 2.RÁDU

V afinno-euklidovskom priestore $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ majme karteziánsku súradnicový systém $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Bod X nech má v ňom súradnice $X \equiv (x_1, x_2)$. Nech je daná funkcia $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + d$, kde $a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. f je tzv. nehomogénna kvadratická funkcia na $\mathcal{A}$, ak $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0$. ozn. $g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.
Otázka: Akú množinu bodov v $\mathcal{A}$ vyjadruje rovnica $f(x_1, x_2) = 0$, ak aspoň jedno z $a_{ij} \neq 0$? Odpoveď: Veta 15.1:

Veta 15.1. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; f(x_1, x_2) = 0\}$ je tzv. zovšeobecnená kuželosečka; presnejšie je to elipsa, hyperbola, parabola, priamka, dvojica priamok, prázdna množina.

Dôkaz. Kvadratická forma $g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ má maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{22}(\mathbb{R})$. Z vety o hlavných osiach vieme, že existuje $\mathbf{C} \in O(2)$:

$\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2) : a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$. Prvky z $O(2)$ sú tvaru $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

tj. matica otočenia o uhol φ , alebo $\begin{pmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. (determinant prvej matice je 1 a druhej je -1.) Ale za $\mathbf{C}$ z vety o hlavných osiach možno zobrať maticu z $O(2)$

tvaru $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Takto: nech $\vec{e}_1^*$ je vlastný vektor patriaci k λ_1 . $|\vec{e}_1^*| = 1$. Doplníme $\vec{e}_1^*$ vektorom $\vec{e}_2^* \in \mathbb{R}^2$, $|\vec{e}_2^*| = 1$ na bázu $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$ v $\mathbb{R}^2$ takú, aby matica prechodu od $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ k $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$ -ozn. ju $\mathbf{P}$ - mala kladný determinant. Nech $\mathbf{B}$ je matica lineárnej transformácie $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vzhľadom na $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$. Máme $f(\vec{e}_1^*) = \lambda_1 \vec{e}_1^*$ vieme, že $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T$, lebo $\mathbf{P} \in O(2)$. Teda $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, b musí byť λ_2 , za

$\mathbf{C}$ zoberieme $\mathbf{P}$. Teda nech $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in O(2)$ je taká, že $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ak (x'_1, x'_2) sú súradnice bodu $X \equiv (x_1, x_2)$ vzhľadom na bázu $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$ a

(x_1, x_2) sú jeho súradnice vzhľadom na $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, a $\mathbf{C}$ je matica prechodu od $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ k $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$, tak $(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \cdot \mathbf{C}$, tj. $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) \cdot \mathbf{C}^{-1}$ čo je to isté ako

$(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. (*) $\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi + x'_2 \sin \varphi \\ x_2 = x'_2 \cos \varphi - x'_1 \sin \varphi \end{cases}$. (*) pre vhodné φ je

regulárna lineárna transformácia premenných, ktorá formu $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ prevedie na $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. Týmto otočením prejde (♣) $f(x_1, x_2) = 0$ na tvar

(◇) $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + 2b_1 x'_1 + 2b_2 x'_2 + b = 0$. λ_1, λ_2 sú korene charakteristického polynómu $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & t - a_{22} \end{pmatrix} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. Z toho: $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 = : \delta$.

Rozlíšime dva prípady:

(I): $\delta \neq 0 : \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Máme teda $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$. (◇) upravíme takto: $\lambda_1(x_1'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x'_1) +$

$+ \lambda_2(x_2'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}x'_2) + b = 0$. Upravíme na štvorce: $\lambda_1(x'_1 + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + b -$

$-\lambda_1 \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \lambda_2 \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} = 0$. Potom regulárna lineárna transformácia: $\begin{cases} x''_1 = x'_1 + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ x''_2 = x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$

tj. posunutie prevedie $(\diamond)$ na tvar: $(\spadesuit) \quad \lambda_1 x''_1{}^2 + \lambda_2 x''_2{}^2 + c = 0; c \in \mathbb{R}.$

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c < 0 \vee \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, c > 0$ tak rovnica $(\spadesuit)$ a teda aj $f(x_1, x_2) = 0$ vyjadruje elipsu.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, c \neq 0$ tak je to hyperbola.

Ak $c = 0$ a $\delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, tak jednobodová množina, ak $c = 0, \delta < 0$, tak dvojica priamok.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c > 0$, tak prázdna množina.

(II): $\delta = 0 = \lambda_1 \lambda_2$ Nech napr. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Teda $(\diamond)$ je $\lambda_2 x'_2{}^2 + 2b_1 x'_1 + 2b_2 x'_2 + b = 0$.

Ak $b_1 \neq 0 : \lambda_2 (x'_2{}^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2} x'_2 + 2b_1(x'_1 + \frac{b}{2b_1})) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 (x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + 2b_1(x'_1 - c) = 0$

$\begin{cases} x''_1 = x'_1 - c \\ x''_2 = x'_2 + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 x''_2{}^2 + 2b_1 x''_1 = 0$ to je rovnica paraboly.

Ak $b = 0 : \dots$

Invarianty krivky 2. rádu.

Definícia 15.1. *Invariantom* krivky druhého rádu vyjadrenej rovnicou

$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$ je taký algebraický výraz závisiaci od $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$, ktorý sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme (ku ktorému prejdeme pomocou otočení a posunutí).

Veta 15.2.

Invariantmi krivky 2. rádu $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$ sú:

$$s = \text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}; \quad \delta = \det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2; \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}$$

Dôkaz. Urobme transformáciu posunutie: $\begin{cases} x_1 = x'_1 + \alpha \\ x_2 = x'_2 + \beta \end{cases} (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ dané}).$ Dostaneme:

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1)x_1' + 2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2)x_2' + (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a) = 0.$$

Máme: $s(x'_1, x'_2) = a_{11} + a_{22} = \text{Tr}(\mathbf{A}) = s(x_1, x_2)$ a $\delta(x'_1, x'_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \delta(x_1, x_2)$.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a \end{pmatrix}$$

Otočenie: od kvadratickej formy $\mathbf{XAX}^T = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ prejdeme pomocou regulárnej lineárnej transformácie s maticou $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ k forme s maticou $\mathbf{CAC}^T$. Potom $s = \text{Tr}(\mathbf{CAC}^T) = \text{Tr}(\mathbf{CAC}^{-1}) = \text{Tr}(\mathbf{CC}^{-1}\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$. $\delta = \det(\mathbf{CAC}^{-1}) = \det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$.

Invarianty krivky 2. rádu sa dajú využiť pri skúmaní rovnice

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \quad \star$$

Napr. videli sme, že v situácii, keď $\lambda_1 \lambda_2 = \delta \neq 0$ vhodným otočením rovnica $\star$ prejde na tvar $\lambda_1 x'_1{}^2 + \lambda_2 x'_2{}^2 + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. Z invariantnosti Δ máme: $\Delta = \det \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, c) = \lambda_1 \lambda_2 c = \delta c$, teda $c = \frac{\Delta}{\delta}$. Teda máme $\lambda_1 x'_1{}^2 + \lambda_2 x'_2{}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ – z tohto sa už ľahko prejde ku kanonickému tvaru.

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	ak $s\Delta < 0$, tak elipsa; ak $s\Delta > 0$, tak $\emptyset$
krivka eliptického typu	$\Delta = 0$	bod, alebo prázdna množina
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	hyperbola
krivka hyperbolického typu	$\Delta = 0$	dvojica disjunktných priamok
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	parabola
krivka parabolického typu	$\Delta = 0$	dvojica rovnobežných priamok

XVI. DUÁLNY VEKTOROVÝ PRIESTOR A ZÁKLADY MULTILINEÁRNEJ ALGEBRY

Nech V, W sú vektorové priestory nad R . Označme $L(V, W)$ množinu lineárnych zobrazení z V do W . $L(V, W) \neq \emptyset$, lebo nulové zobrazenie patrí do $L(V, W)$. Definujeme $+: L(V, W) \times L(V, W) \rightarrow L(V, W)$, $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$. Pre $f \in L(V, W)$ a $\alpha \in R$ definujeme: $\alpha f: V \rightarrow W$, $\alpha f(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x}))$, $\alpha f \in L(V, W)$. Pre $f, g \in L(V, W)$ je $f+g: V \rightarrow W$ naozaj lineárne: $(f+g)(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) + g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) + \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y}) = \alpha(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) + \beta(f(\vec{y}) + g(\vec{y})) = \alpha(f+g)(\vec{x}) + \beta(f+g)(\vec{y})$. Podobne sa presvedčíme, že pre $\alpha \in R$, $f \in L(V, W)$ je $\alpha f: V \rightarrow W$ naozaj lineárne. $\alpha f(\beta\vec{v} + \gamma\vec{p}) = \alpha(f(\beta\vec{v} + \gamma\vec{p})) = \alpha(\beta f(\vec{v}) + \gamma f(\vec{p})) = \alpha\beta f(\vec{v}) + \alpha\gamma f(\vec{p}) = \beta\alpha f(\vec{v}) + \gamma\alpha f(\vec{p}) = \beta(\alpha f)(\vec{v}) + \gamma(\alpha f)(\vec{p})$. Ľahko sa overí, že potom $L(V, W)$ s takto definovaným $+$ resp. takto definovaním násobením prvkov z $L(V, W)$ prvkami z R je vektorový priestor nad R .

Definícia 16.1. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Nech V a W sú konečne generované. Pevne zvolíme bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V a $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W . Potom matica f vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ sa definuje ako matica $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{ks}(R)$ taká, že jej i -tý riadok ($i=1, \dots, k$) tvoria súradnice vektoru $f(\vec{v}_i)$ vzhľadom na bázu $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$.

Veta 16.1.

Nech vektorové priestory V, W nad R sú konečne generované. Potom aj vektorový priestor $L(V, W)$ je konečne generovaný, a máme $\dim(L(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Dôkaz. Definujme zobrazenie $\Phi: L(V, W) \rightarrow \mathfrak{M}_{ks}(R)$, kde $\dim(V)=k$, $\dim(W)=s$. $\Phi(f) :=$ matica f vzhľadom na pevne zvolenú bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V respektíve $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W . Toto Φ je lineárny izomorfizmus, keďže $\mathfrak{M}_{ks}(R)$ je vektorový priestor dimenzie $k \cdot s$, z toho vyplýva tvrdenie.

Φ je lineárne: $\Phi(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{v}_k) \end{pmatrix}$. (s -tice súradníc vektora $f(\vec{v}_i)$ v báze $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$.)

Pre $\alpha, \beta \in R$, $f, g \in L(V, W)$ máme:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \begin{pmatrix} (\alpha f + \beta g)\vec{v}_1 \\ \vdots \\ (\alpha f + \beta g)\vec{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f(\vec{v}_1) + \beta g(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ \alpha f(\vec{v}_k) + \beta g(\vec{v}_k) \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} f(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{v}_k) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} g(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ g(\vec{v}_k) \end{pmatrix} = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g) \end{aligned}$$

Φ je surjektívne: Nech $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathfrak{M}_{ks}(R)$ je ľubovoľná. Potom predpis

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1)=a_{11}\vec{w}_1+\cdots+a_{1s}\vec{w}_s \\ \dots \\ f(\vec{v}_k)=a_{k1}\vec{w}_1+\cdots+a_{ks}\vec{w}_s \end{cases}$$

úplne a jednoznačne definuje, keďže $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza lineárneho zobrazenia $f: V \rightarrow W$, z definície je jasné, že f má vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ maticu $\mathbf{A}$, tj. $\Phi(f)=\mathbf{A}$.

Φ je injektívne: Nech $\Phi(f)=\Phi(g)$. To znamená, že $f(\vec{v}_i)=g(\vec{v}_i)$, $i=1, \dots, k$. Pretože $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , z toho $f=g$.

Definícia 16.2. Nech V je vektorový priestor nad R . Vektorový priestor $L(V, R)$ sa nazýva *duálny priestor* k priestoru V , označíme ho V^* .

Poznámka. Z vety 16.1 (keďže R je n -rozmerný vektorový priestor nad R) máme, že ak V je konečne generovaný, tak $\dim(V^*)=\dim(V)$.

Definícia 16.3.

Prvky z V^* sa volajú *lineárne formy* na vektorovom priestore V .

Príklad.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $pr_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. pr_i je lineárna forma na $\mathbb{R}^n$ tj. $pr_i \in (\mathbb{R}^n)^*$.

2. $C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$ je vektorový priestor spojitých funkcií $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. $\int_0^1: C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ $\int_0^1(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_0^1 f + \beta \int_0^1 g$ teda $\int_0^1 \in C^*(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$.

Definícia 16.4+Tvrdenie 16.1.

Zobrazenie $(,) : V^* \times V \rightarrow R$ (V je vektorový priestor nad R); $(x^*, \vec{y}) = x^*(\vec{y})$ pre každé $x^* \in V^*$, $\vec{y} \in V$, je bilinéarne, nazýva sa *párovacie zobrazenie* V^* a V .

Dôkaz.

Lineárnosť v 1.argumente: $\alpha, \beta \in R$, $x^*, y^* \in V^*$, $\vec{v} \in V$, $(\alpha x^* + \beta y^*, \vec{v}) = (\alpha x^* + \beta y^*)(\vec{v}) = \alpha x^*(\vec{v}) + \beta y^*(\vec{v}) = \alpha(x^*, \vec{v}) + \beta(y^*, \vec{v})$. Lineárnosť v 2.argumente: $(x^*, \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = x^*(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha x^*(\vec{a}) + \beta x^*(\vec{b}) = \alpha(x^*, \vec{a}) + \beta(x^*, \vec{b})$.

Definícia 16.5+Veta 16.2.

Nech vektorový priestor V nad R je konečne generovaný, nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je dáka báza vo V . Potom predpis $(b_i^*, \vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ak } i=j \\ 0, \text{ak } i \neq j \end{cases}$ pre $i, j=1, \dots, k$ úplne a jednoznačne definuje lineárne formy $b_1^*, \dots, b_k^* \in V^*$. $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je potom báza priestoru V^* , nazýva sa *duálna báza* k báze $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$.

Dôkaz. Vieme, že $\dim(V^*) = \dim(V) = k$. Teda na dôkaz toho, že $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je báza vo V^* stačí ukázať, že $b_1^*, \dots, b_k^*$ sú lineárne nezávislé. Nech $\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^* = 0$ (tj. nulové zobrazenie $V \rightarrow R$). Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Takto: $(\alpha_1 b_1^* + \dots + \alpha_k b_k^*, \vec{b}_i) = \alpha_1(b_1^*, \vec{b}_i) + \dots + \alpha_{i-1}(b_{i-1}^*, \vec{b}_i) + \alpha_i(b_i^*, \vec{b}_i) + \dots + \alpha_k(b_k^*, \vec{b}_i) = \alpha_i \cdot 1 = 0$ pre $i = 1, \dots, k$.

Tvrdenie 16.2. Ak V je konečne generovaný vektorový priestor nad R , tak $V^* \cong V$.

Dôkaz. Zoberieme ľubovoľnú bázu $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ vo V . Potom priradenie $\vec{b}_i \mapsto b_i^*$ $i=1, \dots, k$ definuje lineárne zobrazenie $V \rightarrow V^*$, keďže zobrazuje bázu na bázu, je to lineárny izomorfizmus.

Definícia 16.6. Nech V je vektorový priestor nad R . Priestor $(V^*)^*$ označíme V^{**} , nazýva sa druhý duálny priestor priestoru V .

Veta 16.3. Ak V je konečne generovaný, tak existuje kanonický lineárny izomorfizmus $V^{**} \cong V$.

Dôkaz. Definujme $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$, $\varepsilon_V(\vec{v}) : V^* \rightarrow R$, $\varepsilon_V(\vec{v})(x^*) := x^*(\vec{v})$. (ak ε_V je naozaj lineárny izomorfizmus, tak je jasné, že je kanonický, lebo nezávisí od výberu.)

1. Overíme, že $\varepsilon_V(\vec{v})$ je pre každé $\vec{v} \in V$ lineárne zobrazenie. $\varepsilon_V(\vec{v})(\alpha a^* + \beta b^*) = (\alpha a^* + \beta b^*)(\vec{v}) = (\alpha a^*)(\vec{v}) + (\beta b^*)(\vec{v}) = \alpha a^*(\vec{v}) + \beta b^*(\vec{v}) = \alpha \varepsilon_V(\vec{v})(a^*) + \beta \varepsilon_V(\vec{v})(b^*)$.

2. Overíme, že $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$ je lineárne. $\varepsilon_V(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z}) \stackrel{?}{=} \alpha \varepsilon_V(\vec{v}) + \beta \varepsilon_V(\vec{z})$ pre $\alpha, \beta \in R$, $\vec{v}, \vec{z} \in V$. Stačí ukázať, že ľavá a pravá strana majú rovnaké hodnoty na všetkých $x^* \in V^*$. Ľavá strana: $\varepsilon_V(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z})(x^*) = x^*(\alpha \vec{v} + \beta \vec{z}) = \alpha x^*(\vec{v}) + \beta x^*(\vec{z}) = \alpha \varepsilon_V(\vec{v})(x^*) + \beta \varepsilon_V(\vec{z})(x^*) = (\alpha \varepsilon_V(\vec{v}) + \beta \varepsilon_V(\vec{z}))(x^*) =$ pravá strana.

3. Ukážeme, že $\varepsilon_V : V \rightarrow V^{**}$ je bijekcia. Nech $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báza vo V . Nech $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ je duálna báza vo V^* a nech $(b_1^{**}, \dots, b_k^{**})$ je duálna báza vo V^{**} . Zaujímá nás, čo je $\varepsilon_V(\vec{b}_i)$. Máme $\varepsilon_V(\vec{b}_i) \in (V^*)^*$, rátajme $(\varepsilon_V(\vec{b}_i), b_j^*) = \varepsilon_V(\vec{b}_i)(b_j^*) =$

$$= b_j^*(\vec{b}_i) = \begin{cases} 1 & \text{ak } i=j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}. \text{ Z jednoznačnej určenosti duálnej bázy dostávame, že}$$

$\varepsilon_V(\vec{b}_i) = b_i^{**}$ $i=1, \dots, k$. Keďže ε_V zobrazuje bázu na bázu, je to lineárny izomorfizmus.

Veta 16.4. Nech V, W sú vektorové priestory nad R , nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom existuje jediné lineárne zobrazenie $f^* : W^* \rightarrow V^*$ také, že $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v}))$ pre všetky $w^* \in W^*$, $\vec{v} \in V$. Toto f^* sa volá duálne, alebo adjungované lineárne zobrazenie k zobrazeniu f .

Dôkaz. Jednoznačnosť: Nech by aj $f_1^* : W^* \rightarrow V^*$ bolo také ako f z tvrdenia. Potom $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v})) = (f_1^*(w^*), \vec{v})$. Z toho: $(f^*(\vec{w}), \vec{v}) = (f_1^*(w^*), \vec{v})$ pre všetky $\vec{v} \in V, w^* \in W^*$. Z bilinearnosti: $(f^*(w^*) - f_1^*(w^*), \vec{v}) = ((f^* - f_1^*)(w^*), \vec{v}) = 0$. Teda $(f^* - f_1^*)(w^*) : V \rightarrow R$ je nulové, preto $f^* - f_1^* =$ nulové zobrazenie, teda $f^* = f_1^*$.

Existencia: Treba, že f^* definované vlastnosťou $(f^*(w^*), \vec{v}) = (w^*, f(\vec{v}))$ je lineárne: $f^*(\alpha w^* + \beta z^*) \stackrel{?}{=} \alpha f^*(w^*) + \beta f^*(z^*)$. Treba ukázať, že ľavá a pravá strana majú (ako lineárne zobrazenie $V \rightarrow R$) tú istú hodnotu v ľubovoľnom $\vec{v} \in V$. Ľavá strana: $(f^*(\alpha w^* + \beta z^*), \vec{v}) = (\alpha w^* + \beta z^*, f(\vec{v})) = \alpha(w^*, f(\vec{v})) + \beta(z^*, f(\vec{v})) = \alpha(f^*(w^*), \vec{v}) + \beta(f^*(z^*), \vec{v}) = (\alpha f^*(w^*) + \beta f^*(z^*), \vec{v}) =$ pravá strana.

Veta 16.5. Nech V, W sú konečne generované nad R , nech $f : V \rightarrow W$ má vzhľadom na bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{ks}(R)$. Potom duálne lineárne zobrazenie $f^* : W^* \rightarrow V^*$ má vzhľadom na bázu $(w_1^*, \dots, w_s^*)$ vo W^* resp. $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ maticu $\mathbf{A}^T$.

Dôkaz. Máme $f(\vec{v}_i) = \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{w}_j$ pre $i=1, \dots, k$. Potrebujeme zistiť, čo je $f^*(w^*)$

pre $t = 1, \dots, s$. Máme $f^*(w_t^*) = \sum_{j=1}^k b_{ij} v_j^*$, chceme zistiť $b_{tj}(f^*(w_t^*), \vec{v}_p) =$
 $= (w_t^*, \sum_{j=1}^s a_{pj} \vec{w}_j) = \rightsquigarrow \sum_{j=1}^s a_{pj}(w_t^*, \vec{w}_j) = a_{pt}$. Pravá strana:
 $\left(\sum_{j=1}^k b_{tj} v_j^*, \vec{v}_p \right) = \sum_{j=1}^k b_{tj}(v_j^*, \vec{v}_p) = b_{tp}$; z toho $b_{tp} = a_{pt}$ teda matica $\mathbf{B}$ zobrazenia f^*
 je vlastne $\mathbf{A}^T$.

Veta 16.6. Ak f, g sú lineárne zobrazenia $f, g : V \rightarrow W$, tak

1. $(f+g)^* = f^* + g^*$
2. Ak $f : V \rightarrow W, \alpha \in R$, tak $(\alpha f)^* = \alpha(f^*)$
3. $\mathcal{O} : V \rightarrow W$ je nulové zobrazenie, potom $\mathcal{O}^* : V^* \rightarrow W^*$ je tiež nulové; $(id_V)^* = id_{V^*}$
4. Ak $f : V \rightarrow W, g : W \rightarrow S$ sú lineárne zobrazenia, tak $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
5. Ak $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a V, W sú konečne generované, tak $(f^*)^* : (V^*)^* \rightarrow (W^*)^*$ sa stotožní s f , ak stotožní V^{**} s V a W^{**} s W .

Dôkaz. Priamo z definície: pre prípad zobrazení medzi konečne generovanými priestormi tieto vlastnosti vyplývajú z vlastností matíc. Napr. $(f+g)^* = f^* + g^* \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ alebo: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Tenzorový súčin vektorových priestorov.

Nech V, W sú konečne generované vektorové priestory nad R . Potom $V \times W$ je vektorový priestor nad R . Označme M množinu všetkých zobrazení $V \times W \rightarrow R$, ktoré nadobúdajú nenulové hodnoty iba v konečnom počte prvkov z $V \times W$. $M \neq \emptyset$, lebo nulové zobrazenie patrí do M . Množina G všetkých zobrazení z $V \times W \rightarrow R$ je vektorový priestor. Pre $f, g \in G$ definujeme $f+g : V \times W \rightarrow R$; $(f+g)(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y})$, podobne pre $f \in G, \alpha \in R$ definujeme $\alpha f : V \times W \rightarrow R$; $(\alpha f)(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(f(\vec{x}, \vec{y}))$. Je jasné, že G je vektorový priestor nad R . M je vektorový podpriestor v G . (stačí použiť kritérium vektorového podpriestoru).

Ak $f \in M$, tak existujú $(\vec{v}_1, \vec{w}_1), \dots, (\vec{v}_k, \vec{w}_k) \in V \times W$ také, že $f(\vec{v}_i, \vec{w}_i) = \alpha_i$ pre $i=1, 2, 3, \dots, k$, pričom $\alpha_i \neq 0$ a $f(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ pre $(\vec{v}, \vec{w}) \notin \{(\vec{v}_1, \vec{w}_1), \dots, (\vec{v}_k, \vec{w}_k)\}$. Pre takéto f zavedieme symbol $\alpha_1(\vec{v}_1, \vec{w}_1) + \dots + \alpha_k(\vec{v}_k, \vec{w}_k)$. Napr. $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ (pre $\vec{v} \in V, \vec{w} \in W$) znamená funkciu, ktorá má vo $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ hodnotu 1 a vo všetkých iných má hodnotu 0. Podobne $-1 \cdot (\vec{v}_0, \vec{w}_0) := -(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ je funkcia, ktorá má vo $(\vec{v}_0, \vec{w}_0)$ hodnotu -1 a všade inde 0.

Iný prípad: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2) - (\vec{v}_1, \vec{w}_2) - (\vec{v}_2, \vec{w}_2)$ je symbol označujúci zobrazenie $V \times W \rightarrow R$, ktorá má vo $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2)$ hodnotu 1, vo $(\vec{v}_1, \vec{w}_2)$ a $(\vec{v}_2, \vec{w}_2)$ -1 a všade inde 0.

Definícia 16.6. Nech $S \subset M$ je vektorový podpriestor v M generovaný prvkami tvaru $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) - (\vec{v}_1, \vec{w}) - (\vec{v}_2, \vec{w})$, $(\vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2) - (\vec{v}, \vec{w}_1) - (\vec{v}, \vec{w}_2)$, $(\alpha \vec{v}, \vec{w}) - \alpha(\vec{v}, \vec{w})$ [pre ľubovoľné $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$] a $(\vec{v}, \alpha \vec{w}) - \alpha(\vec{v}, \vec{w})$.

Definícia 16.7. Nech V, W, M, S sú ako vyššie. Potom *tenzorový súčin* priestorov V a W sa definuje ako faktorový vektorový priestor M/S , označíme ho $V \otimes W$. Teda $V \otimes W = M/S$. Prvok vo $V \otimes W$ reprezentovaný $(\vec{v}, \vec{w}) \in M$ označíme $\vec{v} \otimes \vec{w}$.

Trieda ekvivalencie prvku $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) - (\vec{v}_1, \vec{w}) - (\vec{v}_2, \vec{w})$ bude $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \otimes \vec{w} - \vec{v}_1 \otimes \vec{w} - \vec{v}_2 \otimes \vec{w} = 0 \in V \otimes W$ tj. platí: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \otimes \vec{w} = \vec{v}_1 \otimes \vec{w} + \vec{v}_2 \otimes \vec{w}$. Podobne:

$$\begin{aligned}\vec{v} \otimes (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= \vec{v} \otimes \vec{w}_1 + \vec{v} \otimes \vec{w}_2 \\ (\alpha \vec{v}) \otimes \vec{w} &= \alpha (\vec{v} \otimes \vec{w}) \\ \vec{v} \otimes (\alpha \vec{w}) &= \alpha (\vec{v} \otimes \vec{w})\end{aligned}$$

Teda ak definujeme zobrazenie $\mathcal{S} : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$, $\mathcal{S}(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \otimes \vec{w}$, toto $\mathcal{S}$ bude bilinéarne.

Veta 16.7.

1. Ak V, W, T sú konečne generované vekt. priestory, tak $(V \otimes W) \otimes T \cong V \otimes (W \otimes T)$.
2. Ak V, W sú konečne generované, tak $V \otimes W \cong W \otimes V$.
3. Ak V alebo W je nulový priestor, tak $V \otimes W \cong 0$
4. Ak $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ je báza vo W , tak báza vo $V \otimes W$ pozostáva z vektorov $(\vec{v}_i \otimes \vec{w}_j)$, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s$. Teda $\dim(V \otimes W) = k \cdot s = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Veta 16.8. Nech v, W sú konečne generované vektorové priestory nad R . Potom $V^* \otimes W \cong L(V, W)$.

Dôkaz. Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V , $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ je báza vo W . Definujme lineárne zobrazenie $\Phi : V^* \otimes W \rightarrow L(V, W)$ takto: $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)(\vec{v}_s) = v_i^*(\vec{v}_s) \cdot \vec{w}_j$. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)(\vec{v}_s) = \delta_{is} \vec{w}_j$. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)$ má maticu (vzhľadom na bázu $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V resp. $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s)$ vo W .) ktorej i -tý riadok má v j -tom stĺpci 1 a všade inde sú nuly. Teda $\Phi(v_i^* \otimes \vec{w}_j)$ je bázový prvok v $L(V, W)$ tj. Φ je lineárny izomorfizmus. Je jasné, že pre vektorové priestory $V_1, \dots, V_k$ môžeme definovať ich tenzorový súčin induktívne:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k = V_1 \otimes (V_2 \otimes \dots \otimes V_k).$$

Definícia 16.8. Nech V je konečne generovaný vektorový priestor nad R . Nech p, q sú dané nezáporné celé čísla. Potom vektorový priestor

$$T_p^q(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q$$

sa nazýva priestor tenzorov p -krát kovariantných a q -krát kontravariantných. Prvky $T_p^q(V)$ sa volajú *tenzory* typu (p, q) nad V .

Príklad.

1. $T_0^1(V) = V$, teda tenzory typu $(0, 1)$ sú vektory z V .
2. $T_1^0(V) = V^*$, teda tenzory typu $(1, 0)$ sú lineárne formy na V .
3. $T_1^1(V) = V^* \otimes V \cong L(V, V)$, teda tenzory typu $(1, 1)$ sú vlastne lineárne zobrazenia z V do V .

Tenzory typu (p, q) sa využívajú v diferenciálnej geometrii a v matematickej fyzike. Pracuje sa tam s ich súradnicami.

Nech $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je báza vo V . Potom bázu priestoru $T_p^q(V)$ tvoria vektory $v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_p}^* \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$ kde $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq k$ a $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq k$. Teda každý prvok z $T_p^q(V)$ má jediné vyjadrenie v tvare:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, j_1 \leq k} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_p}^* \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Namiesto v_s^* napíšeme v^s , potom dostaneme: $v^j(\vec{v}_i) = \delta_{ij}$.

$$\sum_{1 \leq \dots \leq k} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_p} \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Einsteinova sumačná konvencia: Ten istý tenzor zapíšeme takto:

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_p} \otimes \vec{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{j_q}$$

Aj bazové vektory sa v praxi vynechávajú, ten istý tenzor sa označuje $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, ($1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq k$).

Dané sú pravidlá ako sa zmení tenzor $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, ak od bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ vo V prejdeme k báze $(\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_k)$. To je obsah tzv. tenzorového počtu.