

NUMERICKÁ MATEMATIKA

2.ROČNÍK

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského

CONTENTS

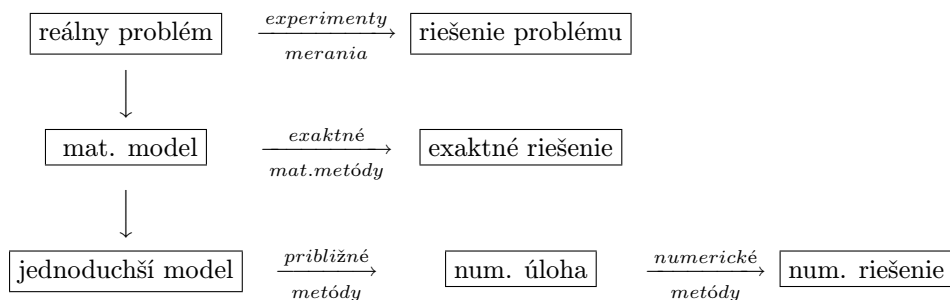
I. Úvod do problematiky numeriky	2
II. Počítačová realizácia reálnych čísel	3
III. Diferenčný počet	5
IV. CORDIC algoritmus	10
V. Čebyševove polynómy 1.druhu	11
VI. Riešenie rovníc $f(x)=0$	11
VII. Implementácia výpočtu druhej odmocniny	16
VIII. n -rozmerný Newtonov algoritmus a riešenie sústav nelineárnych rovníc	17
IX. Lubbockova metóda na aproximáciu súčtu nekonečných radov	18
X. Interpolácia	20
XI. Interpolácia pomocou splajnov	26
XII. Metóda najmenších štvorcov	28
XIII. Numerická derivácia	33
XIV. Riešenie sústav lineárnych rovníc	36
XV. Numerická kvadratura	38

REFERENCES

1. Babušíková-Slodička-Weiss, *Numerické metódy*, UK, 2000.
2. Stanislav Mika, *Numerické metódy algebry*, SNTL, Praha, 1982.
3. Petr Přykrl, *Numerické metódy matematickej analýzy*, SNTL, Praha, 1983.
4. Nekvinda-Šrubaš-Wildt, *Úvod do numerickej matematiky*.
5. Emil Vitásek, *Numerické metódy*.
6. Anthony Ralston, *Základy numerickej matematiky*, Akademia, Praha, 1983.
7. Lars Eldén, Linda Wittmayer-Koch, *Numerical Analysis an Introduction*, Linköping.
8. Filová-Valková, *Numerická matematika 2 (Aproximačné a kvadráturne metódy)*.
9. Dávid, *Numerické metódy na osobných počítačoch*.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$

I. ÚVOD DO PROBLEMATIKY NUMERICKEJ MATEMATIKY



Príklad 1.1. Objem Zeme: $O \approx V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \bar{V}$ ($r=6378\text{km}$) $\bar{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Príklad 1.2. Elektrický obvod: (a, b, c, d známe konštanty)

$$\begin{cases} I = a(e^{bU} - 1) \\ c = d \cdot I + U \end{cases} \Rightarrow c = da(e^{bU} - 1) + U.$$

Ak $c = 12$, $d = 14$, $e = 3$ a $b = 2$, tak $U \approx 0,299$

Budeme predpokladať, že riešenie existuje; otázka stability úlohy;

Príklad 1.3.

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + 6x_2 = 8 & 2x_1 + 6x_2 = 8 \\ 2x_1 + 6.000001x_2 = 8.000001 & 2x_1 + 5.999999x_2 = 8.000001 \end{array}$$

riešenie: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ riešenie: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nestabilná sústava, lebo malá zmena v koeficientoch spôsobí veľkú zmenu.

Príklad 1.4. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -1 \\ 0.1 \\ -1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Riešenie tejto sústavy je $\mathbf{x} = (1; 0; 1; 0; 1)^T$. Ak namiesto $\boxed{0.1}$ máme 0.101, tak riešenie bude $\mathbf{x} = (101; 10; 2; 0.1; 1.01)^T$. –nestabilná sústava.

Príklad 1.5.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x_1 = 2, x_2 = 2$$

$$x^2 - 4x + 3.999 = 0 \quad x_1 = 2.01, x_2 = 1.99$$

Príklad 1.6. $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \quad z_{n+1} = a \cdot z_n \quad a \geq 0, z_0 \geq 0$.

1. $a > 0, z_0 = 0 \Rightarrow z_1 = 0, \dots, z_i = 0$

2. $a > 1, z_0 \neq 0 \Rightarrow z_1 = a \cdot z_0, z_2 = a^2 z_0, \dots, z_n = a^n z_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$

Nech $z_0 = 10^{-10}$. 2.nestabilná.

Príklad 1.7. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \varepsilon \cdot \sin(nx)$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $n > 0$.

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon \sin(nx)| \leq \varepsilon.$$

$$g'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| = |\varepsilon \cos(nx) \cdot n| \leq \varepsilon n.$$

Nech $\varepsilon = 10^{-9}$ a $n = 10^9$. Výpočet derivácie je nestabilná úloha.

$g(x)$ je spojitá funkcia. Nech $|f_1(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1)$

$$\int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \leq \varepsilon \quad \int_0^1 dx = \varepsilon. \text{ Integrovanie je stabilná úloha.}$$

Číselné sústavy.

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots = \pm \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k}.$$

Definícia 1.1. Ak q je základ číselnej sústavy, tak číslo tvaru $\pm a_0, a_1 a_2 \dots a_t \cdot q^c$ (kde $a_0 \neq 0$ a $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$) sa nazýva *mantisa*. *Normalizovaná mantisa* je číslo tvaru $\pm 0, a_1 a_2 \dots a_t \cdot q^b$, kde $a_1 \neq 0$.

Príklad 1.8. $8.125_{(10)} = 1000.001_{(2)}$

$254.125_{(10)} = 11111110.001_{(2)}$.

II. POČÍTAČOVÁ REALIZÁCIA REÁLNYCH ČÍSEL

$$a) \ x = \pm 0, d_1 d_2 \dots d_t | d_{t+1} \dots * 10^e \ (e - exponent); \ \frac{1}{q} \leq m < 1$$

$$b) \ \bar{x} = \pm d_0, d_1 d_2 \dots d_t \cdot q^e \quad 1 \leq m < q.$$

$M(q, t, L, U)$ – q aditívny t miestny počítač. L – najmenší exponent, U – najväčší exponent.

Príklad 2.1. $M(2, 3, -1, 1)$ prípad a_j : $0, 100 \cdot 2^{-1}, 0, 101 \cdot 2^{-1}, \dots, 0, 111 \cdot 2^1$ – tieto sú presne zobraziteľné čísla. Najmenšie presne zobraziteľné číslo je

$$0, 100 \cdot 2^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)_{(10)}; \text{ najväčšie presne zobraziteľné číslo je } 0, 111 \cdot 2^1 = \left(\frac{7}{4}\right)_{(10)}.$$

Počet presne zobraziteľných čísel na počítači $M(q, t, L, U)$ je $2(q-1) \cdot q^{t-1} \cdot (U - L + 1) + 1$.

Definícia 2.1. *Absolútna chyba* je rozdiel medzi presným číslom x a výsledkom $\bar{x}$: $|x - \bar{x}|$.

$|m - \bar{m}| \leq \frac{1}{2} q^{-t}$ ak $\bar{x}$ je správne zaokrúhlené číslo na t -tom mieste. m resp. $\bar{m}$ mantisa čísla x resp. $\bar{x}$.

Definícia 2.2. Ak $x = m \cdot q^e$ a $\bar{x} = \bar{m} \cdot q^e$, tak *relatívna chyba* je výraz $\left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right|$.

Platí: $\left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \left| \frac{mq^e - \bar{m}q^e}{mq^e} \right| = \left| \frac{m - \bar{m}}{m} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot q^{1-t}$. Teda $\left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot q^{1-t} := \eta$.

η je *zaokrúhľovacia jednotka*. Zaokrúhľovacia jednotka sa rovná $\kappa \cdot q^{1-t}$, kde $\kappa = 1$ pri rezaní; a $\kappa = \frac{1}{2}$ pri zaokrúhľovaní.

ω – presná operácia; $\hat{\omega}$ – počítačová operácia.

x sa dá presne zobrazíť, tak $fl_t(x) = x$, kde $fl_t(x)$ je počítačová realizácia čísla x .

Ak $x, y \in M$, tak $x \hat{\omega} y = fl_t(x \omega y)$. Ak $x, y \notin M$, tak $x \hat{\omega} y = fl_t(fl_t(x) \omega fl_t(y))$.
 Súčet čísel s rovnakými znamienkami: $\mathbb{R} \ni x, y > 0$, $\bar{x} \approx x$ resp. $\bar{y} \approx y$ tj. $x = \bar{x} + \varepsilon_1$
 resp. $y = \bar{y} + \varepsilon_2$. $|(x+y) - (\bar{x} + \bar{y})| = |(x+y) - (\bar{x} - \varepsilon_1 + \bar{y} - \varepsilon_2)| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$.
 $\left| \frac{(x+y) - (\bar{x} + \bar{y})}{x+y} \right| = \left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{x+y} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1}{x+y} \right| + \left| \frac{\varepsilon_2}{x+y} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1}{x} \right| + \left| \frac{\varepsilon_2}{y} \right|$.

Súčet s rôznymi znamienkami: relatívna chyba: $Re(x+y) = \left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{x+y} \right|$.

Príklad 2.2. Zaokrúhlite na 2 desatinné miesta:

$$x = 0.996 \Rightarrow \bar{x} = 1.00 \quad y = -0.994 \Rightarrow \bar{y} = -0.99.$$

$$Re(x+y) = \left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{x+y} \right| = \left| \frac{-0.004 - 0.004}{0.002} \right| = 4.$$

$$|\varepsilon_1| = |x - \bar{x}| = |-0.004| = 0.004 = 0.4\% \quad Re(x) = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \frac{1}{246} < 0.005.$$

$$|\varepsilon_2| = |y - \bar{y}| = |-0.004| = 0.004 = 0.4\% \quad Re(y) = \left| \frac{y - \bar{y}}{y} \right| = \frac{4}{994} < 0.005.$$

Dôsledky počítačovej aritmetiky:

Ak chceme vyrátať $x - \sin x$ v okolí bodu 0, tak musíme použiť Taylora.

Chceme nájsť korene kvadratického trojčlena $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, $b < 0$

a $b^2 \gg 4ac$. Potom dostaneme $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \approx \frac{-b + (-b)}{2a} = -\frac{b}{a}$, ale

$x_2 \frac{-b - (-b)}{2a} = 0$ čo je zlý výsledok. Treba použiť Vietove vzťahy na určenie

koreňa x_2 : $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{ax_1}$.

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} & 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2 - \frac{1}{\varepsilon}}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} \approx 1 \text{ a } x_1 = \frac{1 - x_2}{\varepsilon} \approx 0 \text{ zle.}$$

Správny postup: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \varepsilon & 1 - 2\varepsilon \end{pmatrix}$

$$x_2 = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad x_1 = 2 - x_2 = \frac{2 - 2\varepsilon - 1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$$

Platné dekadické číslice a platné desatinné miesta.

Definícia 2.3. Nech $x = a \cdot 10^b$, a – mantisa, $\bar{x} = \bar{a} \cdot 10^b$. Hovoríme, že j -tá dekadická číslica je za desatinnou čiarkou je *platná*, ak platí (1) $|x - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} 10^{b-j}$ a (2) $|a - \bar{a}| \leq \frac{1}{2} 10^{-j}$. Ak platia pre nejaké $j = s$ (tým skôr pre $j < s$), ale pre $j = s + 1$ už nerovnosť neplatí, potom hovoríme, že $\bar{x}$ má s *platných číslic* za desatinnou čiarkou.

Príklad 2.3. $a = 0.314159$ a $\bar{a} = 0.3142$, tak $|a - \bar{a}| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, teda $\bar{a}$ má 4 platné číslice.

Pre čísla s normalizovanou mantisou sa používa výraz platné desatinné miesta. Platné desatinné miesta sú tie miesta za desatinnou čiarkou, ktoré sú obsadené platnými číslicami v zmysle tých nerovností (1), (2), a nulami pred prvou platnou číslicou.

III. DIFERENČNÝ POČET

Majme diskretnú množinu bodov x_i a v nich funkčné hodnoty $f(x_i)$. $x_i = x_0 + ih$, kde h veľkosť kroku a $i \in \mathbb{Z}$. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Označme $f_i := f(x_i)$.

Definícia 3.1. *Diferencia 1. rádu* funkcie $f(x)$ v bode x_i s krokom h sa nazýva číslo: $\Delta^1 f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$. *Diferencia 2. rádu:* $\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i), \dots, n$ - *tehorádu:* $\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i)$.

Všeobecne platí: $\Delta^k f(x_i) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x_i + (k-j)h)$.

Δ^{-1} -inverzný operátor. Potom $\Delta f(x) = g(x) \Leftrightarrow c(x) + \Delta^{-1} \Delta f(x) = \Delta^{-1} g(x) \Leftrightarrow \Delta^{-1} g(x) = f(x) + c(x) \Leftrightarrow g(x) = \Delta f(x) + 0$, teda $\Delta c(x) = 0$ tj. $c(x+h) - c(x) = 0$.

Príklad 3.1. $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$. $\Delta 2^x = 2^x$. $a^x = \frac{\Delta a^x}{a-1} \Rightarrow \Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{a-1}$.

$$\Delta f(x) = g(x), \sum_{x=a}^b g(x) = \sum_{x=a}^b [f(x+h) - f(x)] = [f(x)]_a^{b+1}.$$

$$x^{[k]} = x(x-1) \cdots (x-k+1).$$

$$\Delta x^{[k]} = (x+1)^{[k]} - x^{[k]} = (x+1)x(x-1) \cdots (x-k+2) - x(x-1) \cdots (x-k+1) =$$

$$= x(x-1) \cdots (x-k+2)[x+1 - (x-k+1)] = k \cdot x^{[k+1]}.$$

$$\Delta x^{[k+1]} = (k+1)x^{[k]} \Rightarrow x^{[k]} = \frac{\Delta x^{[k+1]}}{k+1} \cdot \Delta^{-1} x^{[k]} = \frac{x^{[k+1]}}{k+1}.$$

Diferenčná rovnica: sústava rovníc $G(n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, \dots, \Delta^p y_n) = 0$. Neznáma v tomto G je $\{y_n\}$.

$$\Delta^k y_n = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} y_{n-k+j} \quad G(n, y_n, \Delta y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+p}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{n+p} = F(n, y_n, \dots, y_{n+p-1}) \quad (1).$$

Rovnicu (1) nazývame *diferenčnou* rovnicou p -teho rádu. *Partikulárnym* riešením tejto rovnice rozumieme akúkoľvek postupnosť $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ktorej členy vyhovujú rovnici (1) pre všetky n . Každé riešenie diferenciálnej rovnice p -teho rádu je jednoznačne určené p začiatočnými podmienkami.

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice p -teho rádu rozumieme

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ktorej členy závisia od p konštánt: $c_1, \dots, c_p$. $y_n = y(n, c_1, \dots, c_p)$.

Každé partikulárne riešenie sa dá získať zo všeobecného riešenia a zo začiatočných podmienok.

Lineárna homogénna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientami.

$a_0 y_{n+p} + a_1 y_{n+p-1} + \dots + a_p y_n = 0$, kde a_i sú konštanty, pričom $a_0 \neq 0 \neq a_p$.

Riešenie budeme hľadať v tvare $c \cdot z^n = y_n$, $y_{n+1} = c \cdot z^{n+1}, \dots, y_{n+p} = c \cdot z^{n+p}$

dosadením: $a_0 c \cdot z^{n+p} + a_1 c \cdot z^{n+p-1} + \dots + a_p c \cdot z^n = 0 \Leftrightarrow c \cdot z^n (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} +$

$+ \dots + a_p z^0) = 0$. $a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p z^0$ je charakteristická rovnica príslušná

k diferenciálnej rovnici, je to algebraická rovnica p -teho rádu v premennej z a s tými istými koeficientami.

Charakteristická rovnica: $a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p z^0 = 0 \quad (2).$

1. Predpokladajme, že charakteristická rovnica má všetky korene reálne, rôzne:

$z_1, \dots, z_p$. Potom fundamentálny systém riešení rovnice (1) je tvaru $z_1^n, z_2^n, \dots, z_p^n$ (množina lineárne nezávislých riešení). Všeobecné riešenie: $y_n = c_1 z_1^n + \dots + c_p z_p^n$.

2. Ak je niektorý reálny koreň charakteristickej rovnice k -násobný, potom z titulu tohto koreňa sa dostanú do fundamentálneho systému takéto funkcie: $z_i^n; n z_i^n; \dots; n^{k-1} z_i^n$. Lineárna kombinácia týchto riešení je všeobecné riešenie. $z_i^n (c_{i0} + c_{i1}n + \dots + c_{ik-1}n^{k-1})$.

3. Ak je niektorý koreň charakteristickej rovnice komplexný k -násobný. $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Vo fundamentálnom systéme riešení z titulu tohto k -násobného koreňa bude vystupovať celkom $2k$ riešení tvaru: $\rho^n \cos(n\varphi); n\rho^n \cos(n\varphi); \dots; n^{k-1}\rho^n \cos(n\varphi); \rho^n \sin(n\varphi); n\rho^n \sin(n\varphi); \dots; n^{k-1}\rho^n \sin(n\varphi)$.

4. Ak je koreň jednoduchý, komplexný: $z_{12} = \rho(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n (\cos(n\varphi) \pm i \sin(n\varphi))$. Do fundamentálneho systému prídu takéto rovnice: $c_1 \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) + c_2 \rho^n (\cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi))$ tj. $\rho^n (c_1 + c_2) \cos(n\varphi) + \rho^n (c_1 - c_2) \sin(n\varphi) = K_1 \rho^n \cos(n\varphi) + K_2 \rho^n \sin(n\varphi)$.

Príklad 3.2. Vyriešte rovnicu 4-ho rádu: $y_{n+4} + 2y_{n+3} + 3y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$. Jej charakteristická rovnica je $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$.

$z_{12} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sú komplexne združené dvojnásobné korene.

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right).$$

Príklad 3.3. V banke máme y_0 korún. Ročný úrok je $r\%$, pričom úroky sa budú pripisovať mesačne, a budeme platiť mesačne poplatok d . Koľko peňazí budeme mať po n mesiacoch?

Riešenie: $y_{n+1} = y_n + \frac{r}{12} \cdot y_n - d \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n(1 + \frac{r}{12}) - d = Ay_n + B$, kde $A = 1 + \frac{r}{12}$ a $B = -d$. $y_n = A \cdot y_{n-1} = A^2 y_{n-2} + AB + B = \dots = A^n y_0 + B(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + 1) = A^n y_0 + B \cdot \frac{1 - A^n}{1 - A}$. Všimnime si stabilitu. Predpokladajme, že $A, B \in M$

(presne zobrazovateľné čísla). $y_n \approx Y_n$ $Y_{n+1} = AY_n + B + R_{n+1}$ $Y_{n+1} - y_{n+1} = AY_n + B + R_{n+1} - Ay_n - B = A(Y_n - y_n) + R_{n+1} = A \cdot (A(Y_{n-1} - y_{n-1}) + R_n) + R_{n+1} = A^{n+1}(Y_0 - y_0) + A^n R_1 + \dots + A^2 R_{n-1} + AR_n + R_{n+1}$.

1° $|A| < 1$: $|R_n| \leq R$ pre $n = 1, 2, \dots \Rightarrow |Y_{n+1} - y_{n+1}| \leq C$.

2° $|A| > 1$: $|y_{n+1} - Y_{n+1}| \rightarrow \infty$.

3° $|A| = 1$: $|R_n| \geq R > 0 \Rightarrow \forall n : |Y_{n+1} - y_{n+1}| \rightarrow \infty$ numericky nestabilné.

Príklad 3.4. V sklenenej nádobe je tekutina, ktorá má v čase t_0 teplotu y_0 . Nech okolité prostredie má $\bar{y}$ a nech c je tepelná vodivosť skla. Označenie y_n teplotu tekutiny v čase t_n . h časový krok. $t_n = t_0 + nh$. Podľa Newtona: $y_{n+1} - y_n = c \cdot h(\bar{y} - y_n) \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n - c \cdot h y_n + c \cdot h \bar{y} \Leftrightarrow y_{n+1} = (1 - c \cdot h) y_n + c \cdot h \bar{y}$. Označme

$$a := 1 - c \cdot h \text{ a } b := c \cdot h \bar{y}. \quad y_{n+1} = a y_n + b = \dots = a^{n+1} y_0 + b \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

$$|a| < 1 \rightarrow y_{n+1} \rightarrow \frac{b}{1 - a} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \frac{ch\bar{y}}{1 - (1 - ch)} = \bar{y}. \quad |1 - ch| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < ch < 2 \Rightarrow h < \frac{2}{c}. \text{ Ak by sme poznali } y_0, \bar{y} \text{ a určíme si } h \text{ experimentálne.}$$

$$y_1 - y_0 = ch(\bar{y} - y_0) \Rightarrow hc = \frac{y_1 - y_0}{\bar{y} - y_0}.$$

Lineárne rekurentné relácie 2. rádu s konštantnými koeficientami.

$$y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_0 y_n = 0 \quad y_n = z^n \quad z \neq 0 \quad y_{n+1} = z^{n+1} \quad y_{n+2} = z^{n+2}.$$

$$z^{n+2} + b_1 z^{n+1} + b_0 z^n = 0 \Leftrightarrow p(z) = z^2 + b_1 z + b_0 = 0$$

a) Nech korene sú rôzne: $z_1 \neq z_2$. Potom $\{z_1^n\}, \{z_2^n\}$ sú dve lineárne nezávislé riešenia.

b) má dvojnásobný koreň: $\{z^n\} \wedge (\{nz^n\} \vee \{nz^{n-1}\})$. Nech z je dvojnásobný koreň pôvodnej rovnice. Nech $y_n = nz^n \Rightarrow y_{n+2} = (n+2)z^{n+2}$.

$$(n+2)z^{n+2} + b_1(n+1)z^{n+1} + b_0 n \cdot z^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot z^{n+2} + b_1 n \cdot z^{n+1} + b_0 n \cdot z^n + 2z^{n+2} + b_1 z^{n+1} = 0$$

$$n \cdot z^n \underbrace{(z^2 + b_1 z + b_0)}_{p(z)} + z^{n+1} \underbrace{(2z + b_1)}_{p'(z)} = 0$$

Domáca úloha. Dokážte, že $\{n \cdot z^{n-1}\}$ je tiež riešením.

Veta 3.1. Nech $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Potom existujú dve lineárne nezávislé riešenia postupnosti (1) $y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_0 y_n$.

Dôkaz. Stačí dokázať lineárnu nezávislosť.

a): Ak polynóm $p(z)$ má dva rôzne reálne korene, tak z_1^n, z_2^n sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1).

b): Nech $p(z)$ má dvojnásobný koreň z . $\{z^n\}, \{n \cdot z^{n-1}\}$ sú lineárne nezávislé. Sporom predpokladajme, že sú lineárne závislé. $z^n = \alpha n \cdot z^{n-1} \quad \forall n$.

$n = 1$: $z = \alpha \cdot 1 \cdot z^0 \Rightarrow \alpha = z$.

$n = 0$: $z^0 = \alpha \cdot 0 \cdot z^{-1} \Rightarrow 1 = 0$ – spor.

Dôsledok. Množina všetkých postupností spĺňajúci (1) je lineárny vektorový priestor dimenzie 2.

Veta 3.2. Dimenzia lineárneho vektorového priestoru všetkých postupností spĺňajúci rekurentnú reláciu (1) je 2.

Veta 3.3. Nech $b_0, b_1, A, B \in \mathbb{R}$. $n_0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}$ potom existuje jediná postupnosť spĺňajúca rovnicu (1) taká, že spĺňa dve začiatočné podmienky: $y_{n_0} = A, y_{n_1} = B$.

Príklad 3.5. $y_0 = 1, y_1 = 3, y_{n+1} = \frac{10}{3}y_n - y_{n-1}$

$$z^2 - \frac{10}{3}z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z - \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow z_1 = 3 \quad z_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad y_0 = c_1 + c_2 \quad y_1 = 3c_1 + \frac{1}{3}c_2$$

$$y_1 = 3(y_0 - c_2) + \frac{1}{3}c_2 \Leftrightarrow y_1 - 3y_0 = -3c_2 + \frac{1}{3}c_2 = -\frac{8}{3}c_2$$

$$c_2 = -\frac{3}{8}y_1 + \frac{9}{8}y_0 \quad c_1 = -\frac{1}{8}y_0 + \frac{3}{8}y_1$$

$$y_n = \frac{3y_1 - y_0}{8} \cdot 3^n + \frac{9y_0 - 3y_1}{8} \cdot \frac{1}{3^n}$$

Po dosadení: $y_n = 3^{-n}$.

Nehomogénna rekurentná rovnica 2. rádu.

$$(2) \quad y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_0 y_n = a_{n+2}$$

Veta 3.4. (princíp superpozície)

- a) Nech v_n je nejaká pevne zvolená postupnosť spĺňajúca (2). Potom každá $\{y_n\}$, ktorá spĺňa (2) sa dá napísať v tvare: $y_n = u_n + v_n$, kde v_n je nejaké partikulárne riešenie nehomogénneho systému a u_n je riešenie príslušného homogénneho systému.
 b) Nech v_n spĺňa (2) a u_n spĺňa (1), potom $y_n = u_n + v_n$.

Príklad 3.6. Riešte $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 2n^2 + 2$ $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

Riešenie: Hľadáme u_n a v_n . (hľadáme v tvare pravej strany). Charakteristická rovnica: $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Nehomogénna časť:

$$v_n = an^2 + bn + c \quad v_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c \quad v_{n+2} = a(n+2)^2 + b(n+2) + c(n+2)$$

$$v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = 2n^2 + 2 \Rightarrow a = -1, \quad b = -1, \quad c = -3 \Rightarrow v_n = -n^2 - n - 3$$

Teda $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n - n^2 - n - 3$.

Začiatkové podmienky: $y_0 = 0 = c_1 + c_2 - 3$ a $y_1 = 1 = 2c_1 - c_2 - 5$. Po vyriešení: $c_1 = 3$, $c_2 = 0$.

Výsledok: $y_n = 2^n \cdot 3 - n^2 - n - 3$.

Príklad 3.7. Riešte: $y_{n+1} = 2y_n + b^n$ $y_0 = 1$.

Riešenie: 1° $b \neq 2$: $y_{n+1} = 2y_n + b^n$ $y_n = u_n + v_n$ $v_n = k \cdot b^n$

$$k \cdot b^{n+1} - 2k \cdot b^n = b^n \Leftrightarrow k \cdot b - 2k = 1 \Leftrightarrow k(b-2) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{b-2} \Rightarrow v_n = \frac{b^n}{b-2}$$

$$u_{n+1} - 2u_n = 0 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow u_n = c \cdot 2^n$$

$$y_n = u_n + v_n \Rightarrow y_n = c \cdot 2^n + \frac{b^n}{b-2}. \text{ Začiatková podmienka: } 1 = c + \frac{1}{b-2} \Rightarrow c = \frac{b-3}{b-2}.$$

$$\text{Výsledok } y_n = \frac{2^n(b-3) + b^n}{b-2}.$$

$$2^\circ \quad b = 2: v_n = k \cdot n \cdot 2^n$$

$$v_{n+1} = 2v_n + 2^n \Leftrightarrow k(n+1)2^{n+1} = 2kn \cdot 2^n + 2^n \Leftrightarrow 2k(n+1) = 2kn + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2kn + 2k = 2kn + 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = n \cdot 2^{n-1} \Rightarrow y_n = n \cdot 2^{n-1} + c \cdot 2^n$$

Začiatková podmienka: $1 = c \cdot 2^0 \Leftrightarrow c = 1$.

Výsledok: $y_n = 2^{n-1} \cdot (n+2)$.

Príklad 3.8. Riešte: $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ $y_0 = 1$, $y_2 = 3$

Riešenie: $z^2 - 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n = 3^n(c_2 \cdot n + c_1)$. Začiatkové podmienky: $y_0 = 1 = 1 \cdot (c_2 \cdot 0 + c_1) = c_1$ a $y_2 = 3 = 9 \cdot (2c_2 + 1) \Rightarrow 18c_2 = -6 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$.

Výsledok: $y_n = 3^n \cdot \left(1 - \frac{n}{3}\right)$.

Príklad 3.9. Riešte: $y_{n+1} - 2y_n + 2y_{n-1} = 0$ $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

$$\text{Riešenie: } z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$y_n = c_1 \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + c_2 (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

Začiatkové podmienky: $y_0 = 1 = c_1 (\cos 0 + i \sin 0) + c_2 (\cos 0 - i \sin 0) \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$

$$y_1 = 2 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow 2 = c_1(1+i) + c_2(1-i) = c_1 + c_2 + i(c_1 - c_2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}(c_1 - c_2) = 1 \Rightarrow \mathbf{i}(2c_1 - 1) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1 - \mathbf{i}}{2} \quad c_2 = \frac{1 + \mathbf{i}}{2}.$$

Po dosadení dostaneme výsledok: $y_n = (\sqrt{2})^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$.

Domáce úlohy. Riešte:

1. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3 \cdot 2^n$ $y_0 = 1, y_1 = 2$.
2. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 4y_n = 3 \cdot 2^n$ $y_0 = 1, y_1 = 2$.
3. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 4y_n = 2 \cdot 4^n$ $y_0 = 1, y_1 = 2$.
4. $y_{n+2} + y_n = 0$, začiatkové podmienky si zvolíte.

Odhad chyby funkčnej hodnoty s približným argumentom.

x – presná hodnota; $\bar{x}$ – aproximácia. $\Delta x = x - \bar{x}$, $|\Delta x| = |x - \bar{x}| \leq \varepsilon(x)$.
 $\Delta y(x) = y(x) - y(\bar{x}) = y'(\xi)(x - \bar{x}) \quad |\Delta y(x)| \leq \underbrace{\max_{z \in \mathcal{O}(x)} |y'(z)|}_{M} |\Delta x| \leq M \cdot \varepsilon(x)$

$$\left| \frac{\Delta y(x)}{y(x)} \right| \lesssim \frac{M \varepsilon(x)}{|y(\bar{x})|}.$$

Výpočet štandardných funkcií a ukážky implementácie štandardných funkcií na počítači.

Požiadavka:

1. $\eta = \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$.
2. Aby algoritmus pre výpočet štandardných funkcií bol dostatočne rýchly.

Príklad 3.10. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Chyba je menšia ako $\left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right|$ ak sme skončili pri člene $\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

Polynomiálna aproximácia:

$$\sin \frac{\pi x}{2} \approx q(x) = x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + b_3 x^6) = x(((b_3 x^2 + b_2)x^2 + b_1)x^2 + b_0).$$

Racionálna aproximácia:

$$f(x) \approx \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Príklad 3.11. Chceme aproximovať $f(x) = 2^x$ $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ pomocou polynómu tak, aby relatívna chyba bola menšia ako 10^{-10} . Potrebujeme polynóm 6-teho stupňa. Potrebujeme 6-krát násobenie a 6-krát sčítanie.

Racionálne: $2^x \approx \frac{q(x^2) + xs(x^2)}{q(x^2) - xs(x^2)} = r(x)$. Potrebujeme 3 násobenia, 4 sčítania a 1 delenie.

Výpočet hodnôt štandardných funkcií a transformácia argumentu do vhodného intervalu a jej numerické aspekty.

Majme vhodnú aproximačnú funkciu, ktorá aproximuje funkciu $\sin x$ na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. $\sin x = \sin(x + 2k\pi) \quad u := x - 2k\pi = x - n\pi$. Predpokladajme, že n, x sa dá presne zobraziť na počítači a π je zobrazené na maximálny počet desatinných miest.

$$\frac{\bar{\pi} - \pi}{\pi} = \varepsilon_1, \quad \bar{\pi} = \pi(1 + \varepsilon_1), \quad |\varepsilon_1| \leq \eta, \quad \bar{u} = x - n\bar{\pi}, \quad \bar{u} = (x - n\pi(1 + \varepsilon_1))(1 + \varepsilon_3), \quad \text{kde } \varepsilon_i \leq \eta, \\ |\Delta u| = |\bar{u} - u| \approx |(x - n\pi)\varepsilon_3 - n\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)| \lesssim |x - n\pi|\eta + 2n\pi\eta \leq |u|\eta + 2n\pi\eta.$$

Príklad 3.12. Predpokladajme, že $x_0=1000$ a chceme spočítať $\sin x_0$ v jednoduchšej presnosti na počítači $M(2, 23, -126, 127)$.

Riešenie: $n=\lfloor \frac{1000}{\pi} \rfloor=318$, $u=x_0-n\pi=1000-318\pi\approx 0.9735361\cdots=\bar{u}$, $\eta=\frac{1}{2}\cdot 2^{-23}$,

$$|\Delta u| \lesssim |u|\eta + 2n\pi\eta < 2000\eta \leq 1.2\cdot 10^{-4}. \quad \left| \frac{\Delta u}{u} \right| \lesssim \frac{1.2\cdot 10^{-4}}{0.973} \leq 1.3\cdot 10^{-4}, \quad u=x_0-n\pi,$$

$$\sin u = \sin x_0 \cos n\pi - \cos x_0 \sin n\pi \Rightarrow |\sin u| = |\sin x_0|,$$

$$|\Delta \sin x_0| = |\Delta \sin u| \lesssim |\cos \bar{u} \Delta u| \lesssim \cos 0.9735361 \cdots \cdot 1.2\cdot 10^{-4} \leq 0.68\cdot 10^{-4},$$

$$\left| \frac{\Delta \sin x_0}{\sin x_0} \right| \leq \frac{0.68\cdot 10^{-4}}{0.8268725} < 0.9\cdot 10^{-4}.$$

$$\eta=2^{-53}=\frac{1}{2}\cdot 2^{-52} \Rightarrow |\Delta u| < 2000\eta = 2.2\cdot 10^{-13}, \quad \left| \frac{\Delta \sin x_0}{\sin x_0} \right| \leq 1.6\cdot 10^{-13}.$$

IV. CORDIC ALGORITHMUS

(CORDIC= COordinate ROTation DIgital Computer)

CORDIC algoritmus sa používa na aproximáciu trigonometrických funkcií.

Výpočet sa bude realizovať v registre $2t$ bitoch v pevnej rádovej čiarke.

Zoberme si: $t=3$, $1.d_1d_2d_3\cdot 2^{-4}=0.0001d_1d_2d_3\cdot 2^0$. $\sin \beta = \beta \mid -\frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} \cdots$

$$\left| \frac{\Delta \sin \beta}{\sin \beta} \right| < \eta, \quad \left| \frac{\sin \beta - \beta}{\sin \beta} \right| \lesssim \left| \frac{\beta^3}{3!\beta} \right| = \frac{\beta^2}{6}. \quad \beta^2 = m^2 \cdot 2^{-2e}, \quad 1 \leq m < 2,$$

$$\frac{\beta^2}{6} = \frac{m^2 \cdot 2^{-2e}}{6} < \frac{4 \cdot 2^{-2e}}{6} = \frac{2}{3} \cdot 2^{-2e} < \frac{1}{2} \cdot 2^{-t} = \eta, \quad -2e < \log_2 0.75 - t \Leftrightarrow e > \frac{t}{2} + \frac{1}{2} (0.41 \cdots)$$

$$\Leftrightarrow e > \lfloor \frac{1}{2}(t+1) \rfloor. \quad \text{Pre všetky } e > \lfloor \frac{1}{2}(t+1) \rfloor \text{ budeme aproximovať } \beta = \sin \beta.$$

$t=3$: $1.d_1d_2d_3$ $0.01d_1d_2d_3$ sa ešte zmestí v registre $2t$ bit s pevnou desatinnou čiarkou.

$$\beta = m \cdot 2^{-e}, \quad e=2. \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta_1 = \beta_0 - \gamma_0 \quad \beta_2 = \beta_1 - \gamma_1 \cdot \delta_1 \quad \vec{v}_{i+1} = \mathbf{P}_i \vec{v}_i$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i & -\delta_i \sin \gamma_i \\ \delta_i \sin \gamma_i & \cos \gamma_i \end{pmatrix} \quad \text{sgn} \beta_i = \delta_i \quad \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \cos \gamma_0 & -\sin \gamma_0 \\ \sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}_i$ je ortogonálna matica tj. $\mathbf{P}_i^{-1} = \mathbf{P}_i^T$.

$$\mathbf{P}_0 \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \cos \gamma_0 & -\sin \gamma_0 \\ \sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_0 \\ \sin \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Nech $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2t-1}$ je postupnosť rotácií vektorov $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots$ a nech $\vec{v}_0 = (1, 0)^T$, $\beta_0 = \beta$, $\vec{v}_{i+1} = \mathbf{P}_i \vec{v}_i$, $\beta_{i+1} = \beta_i - \delta_i \gamma_i$

$$\mathbf{P}_i \vec{v}_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i & -\delta_i \sin \gamma_i \\ \delta_i \sin \gamma_i & \cos \gamma_i \end{pmatrix} \vec{v}_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i = c_i \\ \sin \gamma_i = s_i \\ \tan \gamma_i = t_i \end{pmatrix} \vec{v}_i = c_i \begin{pmatrix} 1 & -\delta_i t_i \\ \delta_i t_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = c_i \mathbf{Q}_i \vec{v}_i$$

Budeme voliť γ_i tak, aby $\tan \gamma_i = t_i = 2^{-i}$. $\vec{v}_{i+1} = \mathbf{P}_i \vec{v}_i = c_i \mathbf{Q}_i \vec{v}_i$, $c_i = \cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$,

$$\vec{v}_{2t} = \underbrace{c_{2t-1} c_{2t-2} \cdots c_1 c_0}_{\tau} \mathbf{Q}_{2t-1} \mathbf{Q}_{2t-2} \cdots \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_0 \vec{v}_0$$

Algoritmus:

Vstup(Input): $\beta, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2t-1}$

for $i:=0$ to $2t-1$ do

$\delta:=\text{sgn}(\beta)$

$\vec{v}:=\begin{pmatrix} 1 & -\delta \cdot 2^{-i} \\ \delta \cdot 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$

$\beta:=\beta-\delta\gamma_i$

Poznámka. Operácie sú jednoduché; posunutie desatinnej čiarky a jedna logická operácia (testovanie). Uhly $\gamma_i = \arctan(2^{-i})$, pre malé $\gamma_i : \gamma_i = 2^{-i}$.

V. ČEBYŠEVOVE POLYNÓMY 1.DRUHU

Predpis: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Charakteristická rovnica: $z^2 - 2xz + 1 = 0$

1° $|x| < 1$:

$$z_{12} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$c_1 z_1^0 + c_2 z_2^0 = 1 = c_1 + c_2, \quad c_1 x + c_1 \sqrt{x^2 - 1} + c_2 x - c_2 \sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_n(x) = \frac{1}{2} (x + i\sqrt{1 - x^2})^n + \frac{1}{2} (x - i\sqrt{1 - x^2})^n$$

Zavedme substitúciu $x = \cos t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$T_n(x) = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t)^n + \frac{1}{2} (\cos t - i \sin t)^n$$

$$T_n(\cos t) = \frac{1}{2} (\cos(nt) + i \sin(nt)) + \frac{1}{2} (\cos(nt) - i \sin(nt)) = \cos(nt)$$

$$\boxed{T_n(x) = \cos(\arccos x)}$$

2° $|x| = 1$:

$$x = 1 : \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{12} = 1$$

$$x = -1 : \dots \lambda_{12} = -1$$

$$T_n(x) = x^n (c_1 n + c_2)$$

$$T_0(x) = 1 = c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$T_1(x) = x = x(c_1 + c_2) = x(c_1 + 1) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\boxed{T_n(x) = x^n}$$

VI. RIEŠENIE ROVNÍČ $f(x) = 0$

Majme $M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + f(x) = x \Leftrightarrow x = x - f(x) =: \varphi(x)$$

Brouwerova veta. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, φ je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $\varphi(\langle a, b \rangle) \subset \langle a, b \rangle \Rightarrow \exists \bar{x} \in \langle a, b \rangle : \bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

Dôkaz. $\psi(x) := x - \varphi(x)$, $\psi(a) = a - \varphi(a) \leq 0$, $\psi(b) = b - \varphi(b) \geq 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in \langle a, b \rangle : \psi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

Banachova veta. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi(\langle a, b \rangle) \subset \langle a, b \rangle$. Ak existuje $L \in \mathbb{R} : 1 > L \geq 0$, že pre $\forall x, y \in \langle a, b \rangle : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y| < |x - y|$. Potom $\exists! \bar{x} \in \langle a, b \rangle : \bar{x} = \varphi(\bar{x})$. $\{x_n\}$ konštruovaná pomocou $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konverguje pre $\forall x_0 \in \langle a, b \rangle$.

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|$$

$$\begin{aligned} \text{Dôkaz. } |\bar{x} - x_n| &\leq \frac{L}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}|, |\bar{x} - x_{n-1}| = |\bar{x} - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| \leq |\varphi(\bar{x}) - \varphi(x_{n-1})| + |x_n - x_{n-1}| \leq L|\bar{x} - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-L} |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

$$|\bar{x} - x_n| \leq |\varphi(\bar{x}) - \varphi(x_{n-1})| \leq L|\bar{x} - x_{n-1}| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|.$$

Veta 6.3. (postačujúca podmienka konvergenzie iteračnej postupnosti)

Nech $\varphi \in C^1\langle a, b \rangle$ tj. φ, φ' sú spojité. $\varphi(\langle a, b \rangle) \subset \langle a, b \rangle$. Nech $L = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |\varphi'(x)| < 1$.

Potom platia všetky tvrdenia Banachovej vety a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\bar{x} - x_n} \right| = \varphi'(\bar{x})$.

$$\begin{aligned} \text{Dôkaz. } |\bar{x} - x_{n+1}| &= |\varphi(\bar{x}) - \varphi(x_n)| = |\varphi(\xi_n)| \cdot |\bar{x} - x_n| \leq L \cdot |\bar{x} - x_n|. \\ \left| \frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\bar{x} - x_n} \right| &= |\varphi'(\xi_n)| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\bar{x} - x_n} \right| = \varphi'(\bar{x}) \end{aligned}$$

Veta 6.4. Nech $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$ a nech φ je spojitá diferenciálna funkcia v $\mathcal{O}(\bar{x})$, nech $|\varphi'(\bar{x})| < 1$. Potom, ak x_0 je dostatočne blízke k $\bar{x}$, tak platia všetky tvrdenia vety 6.3.

Dôkaz. $\varphi \in C^1(\mathcal{O}(\bar{x})) \Rightarrow \exists I = \langle \bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta \rangle$ taký, že $L = \max_{x \in I} |\varphi'(x)| < 1$. Ukážeme, že

ak $x \in I \Rightarrow \varphi(x) \in I$. tj. či $|\bar{x} - x| \leq \delta \stackrel{?}{\Rightarrow} \varphi(x) \in I$.

$$|\bar{x} - \varphi(x)| = |\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)| \leq L|\bar{x} - x| \leq |\bar{x} - x| < \delta.$$

Poznámka. Dôsledkom týchto viet je metóda prostej iterácie. $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Vždy konvergentné metódy.

1. Metóda bisekcie:. Ak $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $f(a)f(b) < 0$, tak existuje koreň na intervale $\langle a, b \rangle$ a nájdeme ho takto:

u:=a, v:=b

repeat

$$m := \frac{u+v}{2}$$

if $f(m) \cdot f(u) < 0$ then u:=m else v:=m

until $v - u < \varepsilon$

2. Metóda regula falsi:.

$$y - f(b) = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{x - a}{b - a}$$

3. Metóda tetív:.

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

4. Newtonova metóda:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Veta 6.5. Nech $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $f(\bar{x})=0$, $x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f \in C^2(\mathcal{O}(\bar{x}))$, $f'(\bar{x}) \neq 0$. Potom $\exists \mathcal{O}_1(\bar{x})$ také, že postupnosť $x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ konverguje k $\bar{x}$. Navyše platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^2} = \left| \frac{\varphi''(\bar{x})}{2} \right|.$$

$$\text{Dôkaz. } \varphi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'^2(\bar{x})} \Rightarrow \varphi'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'^2(\bar{x})}$$

Funkciu φ rozvineme do Taylorovho radu:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(\bar{x}) + \frac{\varphi'(\bar{x})}{1!}(x-\bar{x}) + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}(x-\bar{x})^2 \\ \varphi(x_n) &= \varphi(\bar{x}) + \frac{\varphi'(\bar{x})}{1!}(x_n-\bar{x}) + \frac{\varphi''(\xi_n)}{2!}(x_n-\bar{x})^2 \\ x_{n+1} &= \bar{x} + \frac{\varphi''(\xi_n)}{2!}(x_n-\bar{x})^2 \\ \frac{|x_{n+1}-\bar{x}|}{|x_n-\bar{x}|^2} &= \left| \frac{\varphi''(\xi_n)}{2!} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}-\bar{x}|}{(x_n-\bar{x})^2} = \left| \frac{\varphi''(\bar{x})}{2} \right| \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) = \bar{x} + \varphi'(\xi_n)(x_n-\bar{x}) \\ x_{n+1}-\bar{x} &= \varphi'(\xi_n)(x_n-\bar{x}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}-\bar{x}|}{|x_n-\bar{x}|} &= |\varphi'(\bar{x})| \\ \varphi''(\bar{x}) &= \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \end{aligned}$$

$\varphi(\bar{x})$ pre dvojnásobný koreň?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)f''(x)}{[f(x)]^2} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)} = \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)} = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x)f'''(x) + f(x)f^{iv}(x)}{2f''(x)f'''(x) + 2f'(x)f^{iv}(x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Veta 6.6. Nech $p \in \mathbb{N}$ a $\bar{x}$ je p -násobný koreň rovnice $f(x)=0$ a $f \in C^{p+1}(\mathcal{O}(\bar{x}))$.

Potom postupnosť $x_{n+1}=x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ konverguje k bode $\bar{x}$ a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n - \bar{x}|^2} = c$.

Dôkaz. Označme: $\varphi(x) = x - p \frac{f(x)}{f'(x)}$, $\varphi(\bar{x}) \stackrel{?}{=} \bar{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\bar{x})^p h(x) \\ f'(x) &= p(x-\bar{x})^{p-1}h(x) + (x-\bar{x})^p h'(x) \\ \varphi(x) &= x - p \frac{(x-\bar{x})^p h(x)}{p(x-\bar{x})^{p-1}h(x) + (x-\bar{x})^p h'(x)} = x - p \frac{(x-\bar{x})h(x)}{ph(x) + (x-\bar{x})h'(x)} = \\ &= x - \frac{pC(x)}{D(x)} \Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \bar{x} \\ \varphi'(x) &= 1 - p \frac{C'(x)D(x) - C(x)D'(x)}{D^2(x)} = \dots \Rightarrow \varphi'(\bar{x}) = 1 - p \frac{h(\bar{x})ph'(\bar{x})}{p^2h^2(\bar{x})} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(\bar{x}) + \frac{\varphi'(\bar{x})}{1!}(x-\bar{x}) + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}(x-\bar{x})^2 \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) = \bar{x} + \frac{\varphi''(\xi_n)}{2}(x_n - \bar{x})^2\end{aligned}$$

Rád konvergencej iteráčnej postupnosti.

Nech $x_0, x_1, \dots \rightarrow \bar{x}$ a nech $\varepsilon_n = x_n - \bar{x}$. Rádom konvergencej iteráčnej postupnosti nazveme najväčšie kladné číslo $p \geq 1$ také, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = c < \infty$.

c – asymptotická konštanta.

$p=1$, tak lineárna konvergenca, $p=2$ kvadratická konvergenca,

Hovoríme, že iteráčná metóda má rád konvergencej p .

Urýchľovacia metóda konvergencej; Aitkenov δ^2 proces.

Nech $\{x_n\}$: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Nech $|\varphi'(x)| \leq L < 1$. Predpokladajme, že lineárna konvergenca.

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} &= \varphi'(x_n) \quad \frac{x_n - \bar{x}}{x_{n-1} - \bar{x}} = \varphi'(\xi_{n-1}) \quad \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{x_{n-2} - \bar{x}} = \varphi'(\xi_{n-2}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} &= \varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \bar{x}}{x_{n-1} - \bar{x}}\end{aligned}$$

Označme $\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$.

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{\bar{x} - x_{n-1} - (\bar{x} - x_n)}{\bar{x} - x_{n-2} - (\bar{x} - x_{n-1})} = \frac{\bar{x} - x_{n-1} - \varphi'(\xi_{n-1}) \cdot (\bar{x} - x_{n-1})}{\frac{\bar{x} - x_{n-1}}{\varphi'(\xi_{n-2})} - (\bar{x} - x_{n-1})} = \frac{1 - \varphi'(\xi_{n-1})}{\frac{1}{\varphi'(\xi_{n-2})} - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \varphi'(\xi_{n-1})}{\frac{1}{\varphi'(\xi_{n-2})} - 1} = \frac{1 - \varphi'(\bar{x})}{\frac{1}{\varphi'(\bar{x})} - 1}\end{aligned}$$

Pre dostatočne veľké n môžeme $\varphi'(\bar{x}) \approx \lambda_n$.

$$\begin{aligned}\bar{x} - x_n &= \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\xi_{n-1})(\bar{x} - x_{n-1}) \\ \lambda_n &\approx \varphi'(\bar{x}) \approx \frac{\bar{x} - x_n}{\bar{x} - x_{n-1}} \quad \bar{x} - x_n \approx \lambda_n(\bar{x} - x_{n-1})\end{aligned}$$

$$\bar{x} - x_n = \bar{x} - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n \approx \frac{1}{\lambda_n}(\bar{x} - x_n) + (x_{n-1} - x_n)$$

$$\bar{x} - x_n - \frac{1}{\lambda_n}(\bar{x} - x_n) \approx x_{n-1} - x_n$$

$$(\bar{x} - x_n)\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right) \approx x_{n-1} - x_n$$

$$(\bar{x} - x_n) \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n} \approx x_{n-1} - x_n$$

$$\boxed{\bar{x} - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1})} \text{ – chybová Aitkenova formula}$$

Extrapoláčná Aitkenova formula: $\bar{x} \approx x_n + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1})$

nová aproximácia: $\hat{x} = x_n + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1})$.

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{1 - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}} \cdot (x_n - x_{n-1}) = x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2} - x_n + x_{n-1}} \cdot (x_n - x_{n-1}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_n + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - x_{n-1} - (x_{n-1} - x_{n-2})} = \\
 &= x_n - \frac{(\Delta x_{n-1})^2}{\Delta x_{n-1} - \Delta x_{n-2}} = x_n - \frac{(\Delta x_{n-1})^2}{\Delta^2 x_{n-2}} \\
 &\boxed{\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_{n-1})^2}{\Delta^2 x_{n-2}}} \rightarrow \text{Aitkenova formula}
 \end{aligned}$$

Algoritmus:

Vstupy: $x_0, \varphi, \varepsilon$

1° $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), |x_1 - x_2| < \varepsilon \Rightarrow x_2 \approx \bar{x}$

2° $\hat{x}_2 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)}$

3° $x_0 := \hat{x}_2$ chod' na 1°.

Odhady chýb v iteračných metodách.

ozn. x^* -pevný bod a $\bar{x}$ aproximácia. $f(x^*) = 0, x^* \approx \bar{x}$.

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(x^*) = f(\xi)(\bar{x} - x^*)$$

Predpokladajme, že $f'(x^*) \neq 0, |\bar{x} - x^*| = \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|}$. Nech $|f'(x)| \geq m$ v okolí $\mathcal{O}(x^*)$

$$\begin{aligned}
 |\bar{x} - x^*| &\leq \frac{|f(\bar{x})|}{m} \quad |f(\bar{x}) - \overline{f(\bar{x})}| \leq \delta \\
 |f(\bar{x})| - |\overline{f(\bar{x})}| &\leq |f(\bar{x}) - \overline{f(\bar{x})}| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{x})| \leq \delta + |\overline{f(\bar{x})}| \\
 |\bar{x} - x^*| &\leq \left| \frac{f(\bar{x})}{m} \right| \leq \frac{\delta + |\overline{f(\bar{x})}|}{m}
 \end{aligned}$$

$\overline{f(\bar{x})}$ je aproximácia $f(\bar{x})$. Ak $\overline{f(\bar{x})} = 0 \Rightarrow |\bar{x} - x^*| \leq \frac{\delta}{m}$ - dosažitelná presnosť.

Príklad 6.1. $f(x) = x - e^{-x} = 0, x^* \approx 0.567143 = \bar{x}, f(\bar{x}) = -4.551 \cdot 10^{-7}, \delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$,

$$\begin{aligned}
 |\bar{x} - x^*| &\leq \frac{\delta + |\overline{f(\bar{x})}|}{m}, f'(\bar{x}) \approx 1.567 \Rightarrow m = 1.5, \\
 |\bar{x} - x^*| &\leq \frac{0.5 \cdot 10^{-10} + 4.551 \cdot 10^{-7}}{1.5} \leq 0.4 \cdot 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

Dosažitelná presnosť pre dvojnásobný koreň.

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x^*)^2 \Rightarrow f(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x} - x^*)^2$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{x} - x^*| &= \sqrt{\frac{2|f(\bar{x})|}{|f''(\xi)|}} \approx \sqrt{\frac{2|f(\bar{x})|}{|f''(x)|}} \approx \sqrt{\frac{2\delta}{|f''(\bar{x})|}} \\
 |f(\bar{x}) - \overline{f(\bar{x})}| &\leq \delta \Rightarrow |f(\bar{x})| \lesssim \delta
 \end{aligned}$$

Príklad 6.2. Nevrhňte iteračnú metódu na $f(x) = x^2 - \ln x - 2 = 0$

1.koreň hľadajte na intervale $\langle \frac{1}{10}, 1 \rangle$ a 2. koreň na intervale $\langle 1, 2 \rangle$.

$$x = \underbrace{e^{x^2 - 2}}_{\varphi(x)} \quad x_{n+1} = e^{x_n^2 - 2}$$

$$\varphi'(x) = (e^{x^2 - 2})' = 2xe^{x^2 - 2} \quad \varphi''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2 - 2} \quad \varphi'(1) = \frac{2}{e} < 1$$

$$x_0 = 0.1, x_1 = 0.1366954 \dots x_4 = 0.1379347, x_5 = 0.1379348.$$

Teda prvý koreň je ≈ 0.1379347 .

Druhý koreň:

$$x = \underbrace{\sqrt{\ln x + 2}}_{\varphi(x)} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2 + \ln x}} \quad \varphi''(x) < 0 \text{ na } \langle 1, 2 \rangle$$

$$x_0 = 1.5, x_1 = 1.5509562 \dots x_8 = 1.5644621$$

Teda druhý koreň je ≈ 1.5644621 .

Príklad 6.3. Navrhните iteračnú metódu: $x^2 - a = 0, (a > 0)$

$$f(x) = x^2 - a \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{a}{x_i} \right)$$

Domáca úloha. Navrhните metódu pre $p > 1$:

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{\dots}}}}$$

$$x = \frac{1}{p + x} = \varphi(x)$$

VII. IMPLEMENTÁCIA VÝPOČTU DRUHEJ ODMOCNINY

$$A = m \cdot 2^{2k}, m = 1.b_1b_2 \dots b_t, M(2, t, L, U), exp = 2k, A = \underbrace{1.b_1b_2 \dots b_t}_m \cdot 2^{2k},$$

$$A = 1.b_1b_2 \dots b_t \cdot 2^{2k} \quad A = 1b_1.b_2b_3 \dots b_t \cdot 2^{2k-1} \quad a = c_1c_0.d_1d_2 \dots d_{t-1} \quad 1 \leq a < 4$$

$$\sqrt{a} \geq 1 \quad x_n \geq \sqrt{a} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{zvolíme: } x_0 \geq 1 \Rightarrow x_n \geq 1$$

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a})^2$$

$$h \leq 2^{-3} \quad |x_0 - \sqrt{a}| = |\sqrt{a+h} - \sqrt{a}| \approx \frac{1}{2\xi} \cdot |h| = \frac{h}{2\xi} \leq \frac{h}{2} \leq 2^{-4}$$

$$x_1 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} (x_0 - \sqrt{a})^2 \leq 2^{-9}$$

$$x_2 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2^3} (x_0 - \sqrt{a})^4 \leq 2^{-19}$$

$$x_3 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2^7} (x_0 - \sqrt{a})^8 \leq 2^{-39}$$

$$\text{Ak } t=23, \text{ tak chyba je menšia ako } \frac{1}{2} \cdot 2^{-23} = 2^{-24}$$

Veta 7.1. Pre každé $x_0 > 0$ iteračná metóda $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ generuje nerastúcu zdola ohraničenú postupnosť. A platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

Dôkaz. Najprv ukážeme, že aj $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$. Potom ukážeme, že $x_n - x_{n-1} \geq 0$ pre všetky n .

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geq 0$$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n} \geq 0$$

Teda postupnosť je nerastúca, zdola ohraničená.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad x^* = \frac{1}{2} \left(x^* + \frac{a}{x^*} \right)$$

$$2(x^*)^2 = (x^*)^2 + a \quad x^{*2} = a \Rightarrow x^* = \sqrt{a}$$

Banachova veta o pevnom bode v $\mathbb{R}^n$.

Nech (X, d) je úplný metrický priestor a nech $\exists \lambda \geq 0, 1 > \lambda$ také, že pre zobrazenie $\varphi : X \rightarrow X$ platí, že $d(\varphi(x), \varphi(y)) < \lambda d(x, y)$. Potom $\exists! x^* \in X : \varphi(x^*) = x^*$. Pre ľubovoľné $x_0 \in X : x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konverguje k x^* .

VIII. n -ROZMERNÝ NEWTONOV ALGORITMUS A RIEŠENIE SYSTÉMOV NELINEÁRNYCH ROVNÍC

$$\text{Majme sústavu } \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$$x^* \approx x_0 \quad x^* = x_0 + h^* \quad 0 = f(x^*) = f(x_0 + h^*) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h^* + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^{*2} + \dots$$

$$h_0 = h^* = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad x_1 = x_0 + h_0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^{(0)} + h_1^* & x_2^* &= x_2^{(0)} + h_2^* \\ 0 &= f_1(x_1^*, x_2^*) = f_1(x_1^{(0)} + h_1^*, x_2^{(0)} + h_2^*) = \\ &= f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} h_1^* + \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} h_2^* + \dots \\ 0 &= f_2(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^{(0)} + h_1^*, x_2^{(0)} + h_2^*) = \\ &= f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} h_1^* + \frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} h_2^* + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J}(\vec{x}^{(0)}) \vec{h} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \vec{h} = -\mathbf{J}^{-1}(\vec{x}^{(0)}) \vec{f}(\vec{x}^{(0)})$$

$\mathbf{J}(\vec{x})$ je Jacobiho matica.

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + h_1^{(0)} & x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + h_2^{(0)} \\ \boxed{\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{h}^{(0)}} \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - (\mathbf{J}(\vec{x}^{(k)})^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)})) \end{aligned}$$

Príklad 8.1. Nájdite priesečík elipsy s hyperbolou, ktorý leží v 1.kvadrante!

Riešenie:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 4x_1^2 + 9x_2^2 - 36 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 16x_1^2 - 9x_2^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

Presné riešenie je (1.897367, 1.549193).

Newtonovou metodou:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 32 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 29 \end{pmatrix} \Rightarrow h^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	1	1
1	2.3	1.7
2	1.93261	1.55588
3	1.89769	1.54921
4	1.89737	1.54919

LU-rozklad. $\mathbf{Ax}=\mathbf{B}$ $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ $\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$ $\mathbf{Ly}=\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y}$ $\mathbf{Ux}=\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}$.

IX. LUBBOCKOVA METÓDA NA APROXIMÁCIU SÚČTU NEKONEČNÝCH RADOV

Euler – MacLaurin:

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x) dx = h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) - \frac{h^2}{12} (y'_n - y'_0) + \frac{h^4}{720} (y'''_n - y'''_0) - \dots$$

$$\sum \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} (y_n^{(2k-1)} - y_0^{(2k-1)}) + E_m$$

B – Bernoulliho čísla, E_m – zvyšok, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i=j}^n f_i \approx m(f_j + f_{j+m} + f_{j+2m} + \dots + f_n) - \frac{m-1}{2}(f_j + f_n) + \\ & + \frac{m^2-1}{12m}(\Delta f_j - \Delta f_{n-m}) - \frac{m^2-1}{24m}(\Delta^2 f_j + \Delta^2 f_{n-2m}) + \\ & + \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^3}(\Delta^3 f_j - \Delta^3 f_{n-3m}) - \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}(\Delta^4 f_j + \Delta^4 f_{n-4m}) + \\ & + \frac{(m^2-1)(863m^4-145m^2+2)}{60480m^5}(\Delta^5 f_j - \Delta^5 f_{n-5m}) - \\ & - \frac{(m^2-1)(275m^4-61m^2+2)}{24192m^5}(\Delta^6 f_j + \Delta^6 f_{n-6m}) \end{aligned}$$

$$\Delta^s f_k = \sum_{r=0}^s (-1)^r \binom{s}{r} f_{k+(s-r)m}$$

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i(i+1)} \approx \sum_{i=1}^{10^5} \frac{\ln i}{i(i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{100} \frac{\ln i}{i(i+1)}}_{m=1} + \underbrace{\sum_{i=100}^{10^3} \frac{\ln i}{i(i+1)}}_{m=10} + \underbrace{\sum_{i=10^3}^{10^4} \frac{\ln i}{i(i+1)}}_{m=100} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=10^4}^{10^5} \frac{\ln i}{i(i+1)}}_{m=10^3} - f_{100} - f_{1000} - f_{10000}$$

$$\sum_{i=1}^{10^{11}} \frac{\ln i}{i(i+1)} \doteq 0.788530606 (\pm 10^{-9})$$

$$\begin{aligned} \text{Kummer: } A &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = q \neq 0 \\ A &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} (a_1 - qb_i) + q \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - q \frac{b_i}{a_i}) + qB \\ &\quad \sum_{i=1}^N a_i (1 - q \frac{b_i}{a_i}) + \underbrace{\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i (1 - q \frac{b_i}{a_i})}_{R_N \rightarrow 0} \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1} \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2+1} + R_N \end{aligned}$$

$$\text{Príklad 9.1. } A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1} \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad q=1$$

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1} (1 - \frac{i^2+1}{i^2}) + B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1} \left(-\frac{1}{i^2} \right) + \frac{\pi^2}{6}$$

$$A \doteq 1.07667405$$

Domáca úloha.

$$\text{Overte, že pre maticu } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ platí } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i^2} = \frac{\pi^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_3 \quad S = S_1 + S_2 = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \mathbf{I}_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} \mathbf{A} + \mathbf{I}_3 \cdot \frac{\pi^2}{24} =$$

$$= \frac{\pi^2}{24} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{24} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

X. INTERPOLÁCIA

Množina funkcií x^n je úplná na $\langle a, b \rangle$ tj. ku každému po častiach spojitkej funkcii $f(x)$ a danému $\varepsilon > 0$ existujú $n, a_1, \dots, a_n$ tak, že $\sqrt{\int_a^b (f(x) - \sum a_i x^i)^2 dx} < \varepsilon$ –aproximácia v strede.

Weierstrassova veta. Ak $f(x) \in C\langle a, b \rangle : \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon)$ a polynóm $P_n(x)$ tak, že $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

Ak $f(t)$ je spojitá, periodická s periódou 2π :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \quad \exists s_n(t) = a_0 + \sum (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) : |f(t) - s_n(t)| < \varepsilon \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$\exists \int_a^b f^2(x) dx \Rightarrow f(x) \in L_2\langle a, b \rangle \quad u, v \in L_2 \quad \rho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_a^b uv dx}.$$

$$\text{Bernsteinove polynomy: } B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad B_n(x) \xrightarrow{\langle 0,1 \rangle} f(x)$$

používajú sa v dôkaze Weierstrassovej vety.

Interpolácia: $(x_i, y_i) = f(x_i) \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n = 0(1)n$.

Nech $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$. $f(x) \approx p(x)$ a chceme aby $f(x_i) = p(x_i)$ pre $i = 0, 1, \dots, n$.

Veta 10.1. Nech $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ pre $i = 0, 1, \dots, n$ a $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$. Potom existuje jediný polynóm $p(x) \in \mathcal{P}_n(x)$ taký, že $p(x_i) = f(x_i)$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$

Dôkaz. Nech $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Existencia:

$$\begin{aligned} y_0 = p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ y_1 = p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ &\dots \\ y_n = p(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

Máme systém $n + 1$ rovníc s $n + 1$ neznámymi $a_0, a_1, \dots, a_n$.

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

Jednoznačnosť: Nech $p(x), q(x) \in \mathcal{P}(x)$, $p(x) \neq q(x)$, $r(x) = p(x) - q(x) \in \mathcal{P}(x)$. $r(x)$ je stupňa $\leq n$, ale má $n + 1$ rôznych koreňov, preto $r(x) \equiv 0 \Rightarrow p(x) \equiv q(x)$.

Lagrangeov interpolačný polynóm: $f(x) \doteq p(x) = \sum_{j=0}^n l_j(x) f(x_j)$, kde $l_j(x)$ sú elementárne Lagrangeove polynómy.

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ak } i \neq j \\ 1, & \text{ak } i = j \end{cases} \quad \text{Kroneckerova } \delta_{ij}$$

$$l_j(x) = k_j(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

$$1=l_j(x_j)=k_j(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$$

$$k_j=\frac{1}{\prod_{i \neq j} (x_j-x_i)} \quad f(x_i)=p(x_i)=\sum_{j=0}^n l_j(x_i)f(x_j)$$

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$p(x)=\sum_{j=0}^n l_j(x)f(x_j)$$

Domáca úloha. Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre hodnoty: $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(3)=4$.

Riešenie:

$$p(x)=4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(3-1)(3-0)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + 1 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = x^2 - 2x + 1$$

Newtonov interpolačný polynóm: $\{x_i\}_{i=0}^n$, $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$, $p(x) \in \mathcal{P}(x)$

$$f(x) \approx p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$f(x_0)=p(x_0)=c_0=f[x_0]$$

$$f(x_1)=p(x_1)=f_0+c_1(x_1-x_0) \Rightarrow c_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=f[x_0, x_1]$$

Výraz $\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$ je pomerná diferencia.

$$c_2=\frac{f_2-f_0-\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}(f_1-f_0)}{(x_2-x_0)(x_1-x_1)}=f[x_0, x_1, x_2]$$

$$c_n=f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Označme $p_{n-1}^{(0,n-1)}$ Newtonov interpolačný polynóm pre uzly $x_0, \dots, x_{n-1}$ a $p_{n-1}^{(1,n)}$ pre uzly $x_1, \dots, x_n$. Potom

$$p_n(x)=\frac{1}{x_n-x_0} \left[(x_n-x)p_{n-1}^{(0,n-1)}(x) + (x-x_0)p_{n-1}^{(1,n)}(x) \right]$$

$$p_n(x_0)=p_{n-1}^{(0,n-1)}(x_0)=f(x_0) \checkmark$$

$$p_n(x_n)=p_{n-1}^{(1,n)}(x_n)=f(x_n) \checkmark$$

pre $i=1, 2, \dots, n-1$:

$$p_n(x_i)=\frac{1}{x_n-x_0} \left[(x_n-x_i) \underbrace{p_{n-1}^{(0,n-1)}(x_i)}_{f(x_i)} + (x_i-x_0) \underbrace{p_{n-1}^{(1,n)}(x_i)}_{f(x_i)} \right] = f(x_i) \checkmark$$

Označme si koeficienty pri najvyššej mocnine c_n v $p_n(x)$; $c_{n-1}^{(0)}$ v $p_{n-1}^{(0,n-1)}(x)$; $c_{n-1}^{(1)}$ v $p_{n-1}^{(1,n)}(x)$.

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= p_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1}) \\
 c_n &= \frac{c_{n-1}^{(1)} - c_{n-1}^{(0)}}{x_n - x_0} \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = c_n \\
 p(x) &= \underbrace{f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i)}_{\text{Newtonov interpolačný polynóm}} \\
 f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\
 d_{i0} &:= f(x_i) \quad d_{11} = \frac{d_{10} - d_{00}}{x_1 - x_0} \quad d_{ij} = \frac{d_{ij-1} - d_{i-1j-1}}{x_i - x_{i-j}} \\
 \begin{array}{cccccc}
 x_i & d_{i0} & d_{i1} & d_{i2} & d_{i3} & \cdots \\
 x_0 & d_{00} & & & & \\
 x_1 & d_{10} & d_{11} & & & \\
 x_2 & d_{20} & d_{21} & d_{22} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 x_n & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Potom $c_i = d_{ii}$ pre všetky $i=0, 1, \dots, n$.

Chyba interpolačného polynómu.

Veta 10.2. Nech $x_i, f(x_i) \in \mathbb{R}$. $x, x_i \in \langle a, b \rangle$, $i=0(1)n$, $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$. Nech I_x je najmenší otvorený interval vytvorený bodmi $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ nech $f \in C^{(n+1)}\langle a, b \rangle$.

Potom $\exists \eta_x \in I_x : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_n)$.

Dôkaz. Pomocou Rolleho vety. Nech z je ľubovoľný, pevný, rôznyi od všetkých interpolačných uzlov.

$$\begin{aligned}
 G(z) &= f(z) - p(z) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \prod_{i=0}^n (z - x_i) \\
 G(x_i) &= 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad G(x) = 0
 \end{aligned}$$

Teda $n+2$ nulových bodov máme.

$$\begin{aligned}
 G^{(n+1)}(z) &= f^{(n+1)}(z) - 0 - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)! \\
 G^{(n+1)}(\eta_x) &= 0 = f^{(n+1)}(\eta_x) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)! \Rightarrow \\
 \Rightarrow f(x) - p(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)
 \end{aligned}$$

Dôsledok.

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in I_x} \frac{|f^{(n+1)}|}{(n+1)!} \cdot |(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)|$$

Chybový vzťah pomocou pomerných diferencií

$p_{n+1}(x)$ –Newtonov interpolačný polynóm; $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \rightarrow f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)$$

$$f_{n+1} = p_{n+1}(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x_{n+1}-x_0) \cdots (x_{n+1}-x_n)$$

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = f[x_0, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x_{n+1} - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_{x_{n+1}})}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x_{n+1} - x_i)$$

Vzťah medzi pomernou diferenciou a deriváciou: $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$.

Neplatí: $\max |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in I_x$.

Násobné uzly.

$$f(x) \approx p(x) \quad f^{(j)}(x_0) = p^{(j)}(x_0) \quad j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\begin{array}{rclcl} p(x) & = & a_0 + & a_1 x + & a_2 x^2 + & \cdots + & a_n x^n \\ p'(x) & = & & a_1 + & 2a_2 x + & \cdots + & na_n x^{n-1} \\ p''(x) & = & & & 2a_2 + & \cdots + & n(n-1)a_n x^{n-2} \\ & & & & & & \vdots \\ p^{(n)}(x) & = & & & & & n!a_n \end{array}$$

Matica sústavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & \cdots & nx_0^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & \cdots & n(n-1)x_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{pmatrix}$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{Q(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$Q(x)$ je hľadaný polynóm.

Zovšeobecnený Newtonov interpolačný polynóm pre násobné uzly:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n$$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} = f[x_0, x_0, \dots, x_0]$$

Príklad 10.1.

Podmienka (*): $x_0 \rightarrow f_0, x_1 \rightarrow f_1, x_2 \rightarrow f_2, f'_2, f''_2, x_3 \rightarrow f_3$.

Treba nájsť Newtonov interpolačný polynóm tak, aby platila podmienka (*) pre uzly $x_0, \dots, x_3$. Preznačenie: $u_0=x_0, u_1=x_1, u_2=x_2, u_3=x_2, u_4=x_2, u_5=x_3$ (podľa násobnosti).

$$\begin{array}{ccccccc} u_0 & F_{00} & & & & & \\ u_1 & F_{10} & F_{11} & & & & \\ u_2 & F_{20} & F_{21} & F_{22} & & & \\ u_3 & F_{30} & F_{31}^* & F_{32} & F_{33} & & \\ u_4 & F_{40} & F_{41}^* & F_{42}^* & F_{43} & F_{44} & \\ u_5 & F_{50} & F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} \end{array}$$

F_{ii} sú koeficienty Newtonovho interpolačného polynómu.

$$F_{sk} = \frac{F_{sk-1} - F_{s-1k-1}}{u_s - u_{s-k}} \quad F_{sk}^* = \frac{F^{(k)}(u_s)}{k!} \quad F_{i0} = f(u_i)$$

$$\begin{aligned} f(x) = & F_{00} + F_{11}(x-x_0) + F_{22}(x-x_0)(x-x_1) + F_{33}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ & + F_{44}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)^2 + F_{55}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)^3 \end{aligned}$$

Hermiteova interpolácia:

Dané sú $x_i, f(x_i)$ a $f'(x_i)$. $i \in \{0, \dots, n\}$. Nech $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$. Hľadáme polynóm z triedy $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$ taký, že $p(x_i) = f(x_i)$ a $p'(x_i) = f'(x_i)$.

Veta 10.3. Nech $x_i, y_i, y'_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$.

Potom $\exists! h(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}(x) : h(x_i) = f(x_i)$ a $h'(x_i) = f'(x_i)$. Polynóm $h(x)$ vyzerá takto:

$$h(x) = \sum_{i=0}^n [1 - 2l'_i(x_i)(x-x_i)][l_i(x)]^2 f_i + (x-x_i)[l_i(x)]^2 f'_i$$

$$\text{kde } l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Príklad 10.2. Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzly $f(-1)=6, f(0)=1, f(2)=3, f(5)=66$.

Riešenie:

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1 & f_0 = 6 & & \\ x_1 = 0 & f_1 = 1 & f_{11} = \frac{1-6}{1-0} = -5 & \\ x_2 = 2 & f_2 = 3 & f_{21} = \frac{3-1}{2-0} = 1 & f_{22} = \frac{6}{3} = 2 \\ x_3 = 5 & f_3 = 66 & f_{31} = 21 & f_{32} = \frac{20}{5} = 4 \quad f_{33} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$p(x) = 6 - 5(x+1) + 2x(x+1) + \frac{1}{3}x(x+1)(x-2) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

Newtonov interpolačný polynóm pre ekvidistantné uzly.

$\{x_i\}_{i=0}^n \rightarrow \{f(x_i)\}_{i=0}^n$, $h=x_{i+1}-x_i$ pre $i=0, 1, \dots, n-1$.

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots +$$

$$+\dots +f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i) + \underbrace{f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_n)}_{\text{chyba}}$$

$$\Delta f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i), f[x_0, \dots, x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}.$$

x_0	f_0			
x_1	f_1	$\frac{\Delta f_0}{h}$		
x_2	f_2	$\frac{\Delta f_1}{h}$	$\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$	
x_3	f_3	$\frac{\Delta f_2}{h}$	$\frac{\Delta^2 f_1}{2h^2}$	$\frac{\Delta^3 f_0}{6h^3}$

$$x=x_0+th,$$

$$f(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{h} \cdot th+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} th(t-1)h+\dots +$$

$$+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} h^n t(t-1)\dots(t-n+1)+\frac{\Delta^{n+1} f(\xi_x)}{(n+1)!h^{n+1}} \cdot h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n)$$

$$f(x_0+th)=f(x_0)+\underbrace{\left(\binom{t}{1}\Delta f(x_0)+\dots+\binom{t}{n}\Delta^n f(x_0)+\binom{t}{n+1}\Delta^{n+1} f(x_0)\right)}_{\text{Newtonov interpolačný polynóm napred pre ekvidistantné uzly}}$$

$$\text{kde } \binom{t}{k}=\frac{t^k}{k!}$$

Optimálny výber interpolačných uzlov:

Chyba Newtonovho interpolačného polynómu, keď máme $n+1$ interpolačných uzlov:

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n) \quad f(x)-p(x)=e(x)$$

$$\{x_i\}_{i=0}^n \rightarrow \{f(x_i)\} \quad x_i \in \langle a, b \rangle$$

$$\max_{x \in \langle a, b \rangle} |e(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |(x-x_0)\dots(x-x_n)| \quad \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)| =: M_{n+1}$$

Veta o minimálnej odchylke pre Čebyševove polynómy.

Spomedzi všetkých normalizovaných polynómov n -teho stupňa v premennej t sa práve $\tilde{T}_n(t)$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ najmenej odchyľuje od nuly.

$$\tilde{T}_n = 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$$

$$\max_{t \in \langle -1, 1 \rangle} |\tilde{p}_n(t)| \geq \max_{t \in \langle -1, 1 \rangle} |\tilde{T}_n(t)| = |2^{1-n}|$$

Dôkaz.

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad \cos(n \arccos t_i) = 0 \quad n \arccos t_i = \frac{2i+1}{2}\pi$$

$$\arccos t_i = \frac{2i+1}{2n}\pi \quad t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)$$

$$\tilde{T}_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = 2^{1-n} T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = \left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)^n + \dots \quad / \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^n$$

$$\hat{T}_n^{(a,b)}(x) = 2^{1-2n} (b-a)^n T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = x^n + \dots$$

Maximálna odchylka: $2^{1-2n}(b-a)^n$.

Veta 10.5. Spomedzi všetkých normalizovaných polynómov sa práve Čebyševov normalizovaný polynóm odchyľuje najmenej od nuly.

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{b+a}{2} \leftarrow \text{interpolačné uzly (optimálny výber)}$$

XI. INTERPOLÁCIA POMOCOU SPLAJNOV**Lineárne splajny.**

$$\{x_i\}_{i=0}^n \rightarrow \{f(x_i)\}_{i=0}^n \quad x_i \in \langle a, b \rangle, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$h = \max h_i, \quad s(x) = \sum_{j=0}^n l_j(x) f(x_j) \leftarrow \text{Lagrange}, \quad f(x) \approx s(x) \in C\langle a, b \rangle, \quad s_0(x) \text{ na } \langle x_0, x_1 \rangle;$$

$$s_1(x) \text{ na } \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, s_n(x) \text{ na } \langle x_{n-1}, x_n \rangle. \quad s_i(x) \text{ sú lineárne funkcie.}$$

$$s_i(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_1) + f[x_i, x_{i+1}, \eta_i](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$f(x) \approx s_i(x) \quad \max_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} |f''(x)| = M_i \quad \max M_i = M \quad \frac{M}{2!} h^2 \geq |f(x) - s_i(x)|$$

$$s(x_i) = f(x_i) \quad f(x) \doteq l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \dots$$

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} \leftarrow \text{bázické funkcie lineárneho splajnu}$$

$$l_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{ak } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ 0 & \text{ak } x \in \langle x_1, x_n \rangle \end{cases} \quad l_n(x) = \begin{cases} \frac{x_{n-1} - x}{x_{n-1} - x_0} & \text{ak } x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ 0 & \text{ak } x \in \langle x_0, x_{n-1} \rangle \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in \langle x_0, x_{i-1} \rangle \cup \langle x_{i+1}, x_n \rangle \\ \frac{x_{i-1} - x}{x_{i-1} - x_i} & \text{ak } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{ak } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \end{cases}$$

Prirodzený kubický splajn.

Podmienky pre prirodzený kubický splajn:

1. $S(x) \in C^2\langle a, b \rangle$
2. $S(x_i) = f(x_i) \quad i=0(1)n$
3. $S(x) \in \mathcal{P}_3 \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$
4. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

Moment splajnu: $M_i = S''_i(x_i)$, $M_{i+1} = S''_i(x_{i+1})$

$$S''_i(x) - M_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i)$$

$$S''_i(x) = [M_i h_i + (M_{i+1} - M_i)(x - x_i)] \frac{1}{h_i} \quad \text{kde } h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$S''_i(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$S'_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{-2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + A_i$$

$$S_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + \underbrace{b_i + A_i x_i}_{=B_i} \quad (1)$$

$$f(x_i) = S_i(x_i) = \frac{M_i h_i}{6} + B_i$$

$$f(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) = \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i$$

$$B_i = f_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \quad A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_{i+1} - M_i) \quad (2)$$

$$S'_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{-2h_{i-1}} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} + A_{i-1}$$

$$S'_i(x_i) = -\frac{M_i}{2} h_i + A_i \quad S'_{i-1}(x_i) = M_i \frac{h_{i-1}}{2} + A_{i-1} \quad \frac{M_i}{2} (h_{i-1} + h_i) = A_i - A_{i-1}$$

$$\frac{M_i}{2} (h_{i-1} + h_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_{i+1} - M_i) - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} (M_i - M_{i-1})$$

$$\frac{M_i}{2} (h_{i-1} + h_i) + \frac{h_i}{6} (M_{i+1} - M_i) - \frac{h_{i-1}}{6} (M_i - M_{i-1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$\underbrace{\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} M_{i+1}}_{=\lambda_i} = \underbrace{\frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right)}_{=g_i}$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \eta_i M_{i+1} = g_i \quad \lambda_i + \eta_i = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \eta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \eta_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 2 & \eta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-3} \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ak súčet mimodiagonálnych prvkov je menší ako prvok na hlavnej diagonále, tak hovoríme o diagonálne dominantnej matici.

Ak $g(x) \in C^2(a, b)$, $g(x)$ interpoluje $f(x)$, $S(x)$ – prirodzený kubický splajn, ktorý aproximuje $f(x)$, potom

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt \geq \int_a^b [S''(t)]^2 dt$$

XII. METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Spojité prípad:

$f(x) \in C(a, b)$, $p^*(x) \approx f(x)$, $w(x) > 0$ – integrovateľná, $p^*(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ je stupňa n (presne).

Kritérium:

$$\int_a^b w(x)[f(x) - p^*(x)]^2 dx \leq \int_a^b w(x)[f(x) - q(x)]^2 dx \Leftarrow \forall q(x) \in \mathcal{P}_n(x)$$

Diskrétny prípad:

$\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{\tilde{f}(x_i)\}_{i=1}^n$, $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$, $\varphi_j(x)$ sú lineárne nezávislé, tj.

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) \\ \varphi_0(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_0(x_n) \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_1(x_n) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} \varphi_m(x_1) \\ \varphi_m(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

$f(x) \approx p_m(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \varphi_j(x)$. Kritérium:

$$\sum_{i=1}^n w_i [\tilde{f}(x_i) - p_m(x_i)]^2 = \text{minimum}$$

$$\rho(f, p) = \|f - p\| = \sqrt{\int_a^b w(x)[f(x) - p(x)]^2 dx} \Leftarrow \text{spojitý prípad}$$

$$\|f - p\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i [\tilde{f}(x_i) - p(x_i)]^2} \Leftarrow \text{diskrétny prípad}$$

Príklad 12.1. počet neznámych $\ll$ počet meraní.

Spojité prípad: $f(x) \in C(-1, 1)$, máme k dispozícii: $\{\varphi_i(x)\}$, $w(x) \equiv 1 \leftarrow$ váhová funkcia.

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$$

Neznáme sú $a_0, \dots, a_n$ a treba minimalizovať

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)]^2 dx \\ H(a_0, \dots, a_n) &= \underbrace{\int_{-1}^1 f^2(x) dx}_{\eta} - 2 \sum_{i=0}^n a_i \underbrace{\int_{-1}^1 f(x) \varphi_i(x) dx}_{d_i} + \\ &+ \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n a_j \underbrace{\int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx}_{c_{ij}} = \eta - 2 \sum_{i=0}^n a_i d_i + \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n a_j c_{ij} \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial a_k} &\Rightarrow -2d_k + \sum_{j=0}^n c_{kj} a_j + \sum_{i=0}^n a_i c_{ik} = -2d_k + 2 \sum_{i=0}^n c_{ki} a_i = 0 \Rightarrow d_k = \sum_{i=0}^n c_{ki} a_i \\ & \underbrace{\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matica}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kedže $\varphi_i(x)$ sú bázové v priestore $\Leftrightarrow \det(c_{ik}) = 0$.

Príklad 12.2.

Ortogonalný systém $\{g_i(x)\}$, ortonormálny systém $\{h_i(x)\}$.

$$\begin{aligned} (g_i, g_j) &= \int_{-1}^1 g_i(x) g_j(x) dx \\ g_0(x) &= \varphi_0(x) \quad g_k(x) = \varphi_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j g_j(x) \\ g_k(x) &= \varphi_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\varphi_k, g_j)}{\|g_j\|^2} g_j \quad (g_i, g_k) = (g_i, \varphi_k) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j (g_i, g_j) \\ i=j : (g_j, \varphi_k) &= (g_j, g_j) \quad c_j = \frac{(g_j, \varphi_k)}{(g_j, g_j)} = \frac{(g_j, \varphi_k)}{\|g_j\|^2} \\ g_k(x) &= \varphi_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \left(\varphi_k, \frac{g_j}{\|g_j\|} \right) \frac{g_j}{\|g_j\|} \end{aligned}$$

$$g_k = \varphi_k - \sum_{j=0}^{k-1} (\varphi_k, h_j) h_j$$

Legendrove ortogonálne polynómy:

$$P_0=1, P_1=x, (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

Vlastnosti:

1. $P_n(x)$ má n koreňov na intervale $\langle -1, 1 \rangle$.

2. $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx=0$ pre $m \neq n$.

3. $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$.

4. $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

5. $\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0$ pre $k=0, 1, \dots, n-1$.

6. $\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Príklad 12.2. (pokračovanie)

$$f(x) \approx p^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j h_j(x) = \sum_{j=0}^n (f, h_j) h_j(x)$$

$$a_j = d_j = \int_{-1}^1 f(x) h_j(x) dx = (f, h_j) \quad (f, h_j) \text{ sú Fourierove koeficienty}$$

$$H(a_0, \dots, a_n) = \eta - 2 \sum_{i=0}^n a_i d_i + \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n a_j c_{ij} = \eta - 2\mathbf{a}^T \mathbf{d} + \mathbf{a}^T \mathbf{c} \mathbf{a}$$

$c_{ij}=0 \Leftrightarrow i \neq j$, $\mathbf{a}^T \mathbf{c} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$, lebo $\mathbf{c}$ je jednotková matica. Preto:

$$\eta + (\mathbf{a} - \mathbf{d})^T (\mathbf{a} - \mathbf{d}) - \mathbf{d}^T \mathbf{d} = \eta + \mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{d}^T \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{d} = \eta + \mathbf{a}^T \mathbf{a} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{d}$$

totiž $\mathbf{a}^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{a}$.

Pre aké $\mathbf{a}$ bude H minimálne? Ak $\mathbf{a} = \mathbf{d}$.

Diskrétny prípad:

$\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{\tilde{f}(x_i)\}_{i=1}^n$, $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, $\varphi_j(x)$ sú lineárne nezávislé tvaru x^j .

$$f(x) \approx p_m(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

$a_i^{(m)}$ – horný index je stupeň polynómu a nie derivácia.

Treba minimalizovať:

$$\sum_{i=1}^n w_i [\tilde{f}(x_i) - p_m(x)]^2$$

$$\|f - p\| = \left(\sum_{i=1}^n w_i [f(x_i) - p_m(x_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{j=1}^n w_i [\bar{f}(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j^{(n)} \varphi_j(x_i)]^2 \quad \dots \quad H(a_0^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_k^{(m)}} = 2 \sum_{i=1}^n w_i [\bar{f}(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j^{(m)} \varphi_j(x_i)] \cdot (\varphi_k(x_i)) = 0$$

$$\sum_{j=0}^m a_j^{(m)} \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i)}_{d_{jk}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i \bar{f}(x_i) \varphi_k(x_i)}_{\rho_k}$$

$$\sum_{j=0}^m a_j^{(m)} d_{jk} = \rho_k$$

$$\begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0m} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(m)} \\ a_1^{(m)} \\ \vdots \\ a_m^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$$

Príklad 12.3. Máme interval $\langle 0, 1 \rangle$, ekvidistantne na n podintervalov dĺžky $h = \frac{1}{n}$.
 $x_i \in \langle (i-1)h, ih \rangle$.

$$\int_0^1 x^{j+k} dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} = \frac{n}{j+k-1}$$

$$(d_{ij}) = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{m+3} & \cdots & \frac{1}{1+2m} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{zle podmienená matica}$$

Príklad 12.4. $\varphi_j(x) = x^j$, $\{x_i\}_{i=1}^n$, $Q_0^{(n)}(x)$, $Q_1^{(n)}(x)$, $\dots$, $Q_{n-1}^{(n)}(x)$,

$$\sum_{i=1}^n w_i Q_j^{(n)}(x_i) Q_k^{(n)}(x_i)$$

$$Q_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1}) Q_j(x) - \beta_j(x) Q_{j-1}(x) \quad Q_0(x) \equiv 1 \quad Q_1(x) \equiv 0$$

$$Q_j(x) = 1 \cdot x_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i x^i \quad \alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i Q_j^2(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i Q_j^2(x_i)} \quad \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_i Q_j^2(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i Q_{j-1}^2(x_i)}$$

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^m b_j Q_j^{(n)}(x) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0m} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m0} & d_{m1} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$$

(d_{ij}) je diagonálna matica, lebo $d_{ij}=0$ pre $i \neq j$.

$$\rho_k = \sum_{i=1}^n \bar{f}(x_i) Q_k(x_i)$$

$$d_{jk} = \sum_{i=1}^n w_i Q_j^{(n)}(x_i) Q_k^{(n)}(x_i)$$

$$\boxed{b_k = \frac{\rho_k}{d_{kk}}}$$

Poznámka.

Čebyševove ortogonálne polynómy: $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x) T_k(x) dx$

Hermiteove ortogonálne polynómy: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_j(x) H_k(x) dx$

Laguerrove ortogonálne polynómy: $\int_0^{\infty} e^{-x} L_j(x) L_k(x) dx$.

Príklad 12.5. Máme zmeranú odpor medenej tyče v rôznych teplotách:

$t_i(C^\circ)$	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
$R_i(\Omega)$	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

Treba minimalizovať:

$$H(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^7 (R_i - a_0 - a_1 t_i)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^7 (R_i - a_0 - a_1 t_i) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^7 (R_i - a_0 - a_1 t_i) t_i = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^7 t_i^0 & \sum_{i=1}^7 t_i \\ \sum_{i=1}^7 t_i & \sum_{i=1}^7 t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^7 R_i \\ \sum_{i=1}^7 R_i t_i \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_i + a_0 + a_1 t_i = \tilde{R}_i \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & t_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{R}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{a}=\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{a}=\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

Symetrická $\mathcal{M}_{nn}$ matica je kladne definitná, ak existuje inverzná pozitívne definitná symetrická matica.

XIII. NUMERICKÁ DERIVÁCIA

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = D_+(h) \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = D_-(h)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = D_0(h)$$

$$f(x) = f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}h + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 + \dots$$

Symbolom " $f(x)$ je nekonečne malá rádu $\mathcal{O}(h^p)$ " rozumieme: ak existuje $k \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0 \quad \forall h > 0 \quad h < h_0 \Rightarrow |f(x)| \leq kh^p$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$$

$$D_0(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(iv)}(x_0)}{4!}h^4 + \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!}h^5 + \dots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(iv)}(x_0)}{4!}h^4 - \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!}h^5 + \dots$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h \frac{f'(x_0)}{1!} + 2h^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + 2h^5 \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!} + \dots$$

$$\frac{1}{2h} [f(x_0+h) - f(x_0-h)] = f'(x_0) + h^2 \frac{f'''(x_0)}{3!} + h^4 \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!} + \dots$$

$$\frac{1}{2h} [f(x_0+h) - f(x_0-h)] - f'(x_0) = b_1h^2 + b_2h^4 + b_3h^6 + \text{chyba rádu } \mathcal{O}(h^2)$$

$D_0(h)$ má chybu rádu $\mathcal{O}(h^2)$; $D_+(h)$, $D_-(h)$ majú chybu rádu $\mathcal{O}(h)$.

Príklad 13.1. Aproximujte deriváciu e^x v bode 1. R_t chyba odseknutia.

h	$D_+(h)$	R_t
0.4	3.3423	$6.24 \cdot 10^{-1}$
0.2	3.0092	$2.91 \cdot 10^{-1}$
0.1	2.8588	$1.41 \cdot 10^{-1}$
0.05	2.7874	$6.91 \cdot 10^{-2}$

h	$D_0(h) - e$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$-8.18 \cdot 10^{-5}$
$7.5 \cdot 10^{-1}$	$2.59 \cdot 10^{-1}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$-2.82 \cdot 10^{-4}$
$7.5 \cdot 10^{-2}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$
$7.5 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$8.17 \cdot 10^{-2}$
$7.5 \cdot 10^{-4}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-9}$	1.28

$$\begin{aligned}
& |\overline{f(x_0+h)} - f(x_0+h)| \leq \varepsilon \quad |\overline{f(x_0-h)} - f(x_0-h)| \leq \varepsilon \\
& |\overline{D_0(h)} - D_0(h)| = \left| \frac{\overline{f(x_0+h)} - \overline{f(x_0-h)}}{2h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{\overline{f(x_0+h)} - f(x_0+h)}{2h} - \frac{\overline{f(x_0-h)} - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}
\end{aligned}$$

Richardsonova extrapolácia.

$$T(h) \begin{cases} D_+(h) \\ D_-(h) \\ D_0(h) \end{cases} . \text{ Predpokladajme, že } T(h) \text{ vieme počítať pre } h \neq 0 \text{ rôzne } h. \text{ Ak}$$

$\lim_{h \rightarrow 0}$ existuje, chceme ju odhadnúť.

$T(h)$ teraz rátame z $D_0(h)$:

$$T(h) = f'(x_0) + b_1 h^2 + \underbrace{b_2 h^4 + b_3 h^6 + \dots}_{\mathcal{O}(h^4)}$$

$$T(h) = f'(x_0) + b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$T(2h) = f'(x_0) + 4b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$T(2h) - T(h) = 3b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4) \Rightarrow b_1 h^2 = \frac{T(2h) - T(h)}{3} - \mathcal{O}(h^4)$$

$$T(h) = f'(x_0) + (T(2h) - T(h)) \cdot \frac{1}{3} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\underbrace{T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}}_{\bar{T}(h)} = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\bar{T}(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^4) = f'(x_0) + c_1 h^4 + \underbrace{c_2 h^6 + c_3 h^8 + \dots}_{\mathcal{O}(h^6)}$$

$$\bar{T}(h) = f'(x_0) + c_1 h^4 + \mathcal{O}(h^6) \dots \text{spravíme to isté ako s } T(h)$$

$$\bar{T}(2h) = f'(x_0) + 16c_1 h^4 + \mathcal{O}(h^6)$$

$$\frac{\bar{T}(2h) - \bar{T}(h)}{15} = c_1 h^4 + \mathcal{O}(h^6)$$

$$\bar{T}(h) = f'(x_0) + \frac{\bar{T}(2h) - \bar{T}(h)}{15} + \mathcal{O}(h^6)$$

$$\frac{\bar{T}(h) - \bar{T}(2h)}{15} + \bar{T}(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \quad \dots$$

$$T(h) = \underbrace{f'(x_0) + b_1 h^p}_{L_1(h^p)} + \mathcal{O}(h^r) \quad r > p$$

$$T(2h) = \underbrace{f'(x_0) + b_1(2h)^p}_{L_1[(2h)^p]} + \mathcal{O}(h^r)$$

Pre $D_{\pm}$ je $p=1$, pre D_0 je $p=2$.

$L_1(h^p)$ –Lagrangeov polynóm 1. stupňa v premennej h^p .

Príklad 13.2. Ideme interpolovať v premennej h^p , potrebujeme 2 interpolačné uzly.

$L_1[(2h)^p] = T(2h)$; $L_1[h^p] = T(h)$; $L(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1)$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad l_0(x^p) = \frac{x^p - h^p}{(2h)^p - h^p} \quad l_1(x^p) = \frac{x^p - (2h)^p}{h^p - (2h)^p}$$

$$L_1(x^p) = \frac{x^p - h^p}{(2h)^p - h^p} T(2h) + \frac{x^p - (2h)^p}{h^p - (2h)^p} T(h)$$

$$L_1(0) = \frac{-h^p}{h^p(2^p - 1)} T(2h) + \frac{-h^p \cdot 2^p}{h^p(1 - 2^p)} = \frac{2^p T(h) - T(2h) + T(h)}{1 - 2^p} = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{2^p - 1}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = h^p \quad T(h) \quad T_{00} \\ x_1 = \left(\frac{h}{2}\right)^p \quad T\left(\frac{h}{2}\right) \quad T_{10} \quad T_{11} \\ x_2 = \left(\frac{h}{4}\right)^p \quad T\left(\frac{h}{4}\right) \quad T_{20} \quad T_{21} \quad T_{22} \\ x_3 = \left(\frac{h}{8}\right)^p \quad T\left(\frac{h}{8}\right) \quad T_{30} \quad T_{31} \quad T_{32} \quad T_{33} \\ x_i = \left(\frac{h}{2^i}\right)^p \quad T\left(\frac{h}{2^i}\right) \end{array}$$

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{(q^p)^k - 1}$$

Príklad 13.3. Máme aproximovať $\Gamma'(x)$ v bode $x=1.5$. $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. $\Gamma(x)$ má derivácie vyšších rádov. $\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t dt$.

$$T_{00} = D_0(0, 4) = \frac{\Gamma(1.9) - \Gamma(1.1)}{0.8} = 0.013019$$

$$T_{10} = D_0(0, 2) = \frac{\Gamma(1.7) - \Gamma(1.3)}{0.4} = 0.027920$$

h	i	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}
0.4	0	0.013019			
0.2	1	0.027920	0.032887		
0.1	2	0.031258	0.032371	0.032337	
0.05	3	0.032069	0.032339	0.032337	0.032337

Presná hodnota $\Gamma'(1.5) = 0.032338$ na 6 desatinných miest.

Poznámka.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(x_0, y_0) \approx \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{2h}$$

XIV. RIEŠENIE SÚSTAV LINEÁRNYCH ROVNÍC

$$y''-y=0 \quad y(0)=0 \quad y(1)=\sinh 1$$

$$y''(x_i)-y(x_i)=0 \Rightarrow \frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}-y(x_i)=0$$

$$h=\frac{1}{4} : \quad \begin{pmatrix} -(2+h)^2 & 1 & 0 \\ 1 & -(2+h)^2 & 1 \\ 0 & 1 & -(2+h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh 1 \end{pmatrix}$$

i	y_i	chyba
1	0.252803	$1.9 * 10^{-4}$
2	0.521406	$3.1 * 10^{-4}$
3	0.822598	$2.8 * 10^{-4}$

Príklad 14.1. $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ je regulárna štvorcová matica.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad \mathbf{A} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

Algoritmus GEM:

```

for k:=1 to n-1 do
  for i=k+1 to n do
     $m_{ik} := a_{ik}/a_{kk}$ 
  for i=k+1 to n do
    for j=k+1 to n do
       $a_{ij} := a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$ 
    for i:=k+1 to n do
       $b_i := b_i - m_{ik} * b_k$ 

```

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \gamma^2 = \sum_{\gamma=1}^{n-1} [(\gamma-1)\gamma + \gamma] = \sum_{\gamma=1}^{n-1} [\gamma^2 + \gamma^1] = \left[\frac{\gamma^3}{3} + \frac{\gamma^2}{2} \right]_1^n =$$

$$= \left[\frac{\gamma^3}{3} \right]_1^n + \left[\frac{\gamma^2}{2} \right]_1^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3 - n^2}{3} + \frac{n}{6}$$

Počet združených operácií v tomto algoritme: $\uparrow$

Príklad 14.2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \varepsilon = a_{11}$$

ε	Bez pivotizácie	s pivotizáciou
10^{-5}	1.0013580; 0.99999900	1.0000100; 0.99999900
10^{-6}	1.0132790; 0.99999990	1.0000010; 0.99999990
10^{-7}	1.1920930; 0.99999999	1.0000001; 0.99999999
10^{-8}	0.0000000; 1.00000000	1.0000000; 1.00000000

Netreba robiť pivotizáciu:

1. ak matica je diagonálne dominantná
2. ak matica je symetrická kladne definitná

LU-rozklad.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 1.52 & 3.5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2.8 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} \text{ pamätá riadky}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0.6 & 1.52 & 3.5 \\ 1 & 2.8 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0.3 & 0.32 & 3.2 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.32 & 3.2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2.8 & 1 \\ 0.6 & 1.52 & 3.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

Algoritmus na LU-rozklad:

```

for k:=1 to n-1 do
   $\gamma := \text{ind max}(a, k, n)$ 
  swap(A, b, k, n,  $\gamma$ )
   $p_\gamma := p_k$ ;  $p_k := \gamma$ 
  for i=k+1 to n do
     $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ 
  for i=k+1 to n do
    for j=k+1 to n do
       $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} * a_{kj}$ 
  for i:=1 to n do
```

```

s:=bpi
for j:=1 to i-1 do
  s:=s-aij * yj
yi=s
(Posledných 5 riadkov rieši Ly= Pb.)

```

XV. NUMERICKÁ KVADRATÚRA

Chceme aproximovať $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
 Obdĺžnikove pravidlo: $I \approx (\beta - \alpha) f(\bar{x})$ pre $\bar{x} \in (a, b)$
 Lichobežníkové pravidlo: $I \approx \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))$
 Simpsonovo pravidlo:

$$I \approx \frac{\beta - \alpha}{6} [f(\alpha) + 4f(\gamma) + f(\beta)] \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Newton-Cotesova metóda:

Ak počet interpolačných uzlov je $n+1$, tak namiesto integrandu $f(x)$ berieme Lagrangeov polynóm n -teho stupňa.

Nech $x_i := \alpha + ih$, kde $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$. Potom Lagrangeov polynóm n -teho stupňa:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \lambda_{ni} := h \int_0^n \prod_{j \neq i} \frac{t - j}{i - j} dt$$

Potom $(n+1)$ -uzlová Newton-Cotesova aproximácia je:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_{ni}$$