

VŠEOBECNÁ TOPOLOGIA

GYÜRKI PIŠTA

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK

2002/2003

CONTENTS

I. Základné pojmy	2
II. Spojité zobrazenia	7
III. Topologický súčin topologických priestorov	10
IV. Faktorové zobrazenie	13
V. Regulárne, úplne regulárne a normálne priestory	14
VI. Kompaktné priestory	18
VI.1. Kompaktné priestory 1	18
VI.2. Centrované systémy, filtre a ultrafiltre	22
VI.3. Kompaktné priestory 2	24
VII. Súvislé priestory a lineárne súvislé priestory	25
VIII. Konvergenca v topologických priestoroch	28
IX. Siete	30
X. Metrizovateľné priestory, metrizácia topologických priestorov	32
XI. Cvičenia	36

REFERENCES

- [1] J.Y. Nagata, *Modern General Topology*.
- [2] R. Engelking, *General Topology*.
- [3] A. Pultz, *Topologie a geometrie*.
- [4] J.L. Kelley, *General Topology*.

I. ZÁKLADNÉ POJMY

Definícia 1.1.

Nech X je množina. Potom systém $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na množine X ak platí:

- (1) $\emptyset, X \in \tau$
- (2) Ak $U, V \in \tau$, tak $U \cap V \in \tau$
- (3) Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau$, tak $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \tau$

Ak τ je topológia na X , tak (X, τ) sa nazýva *topologický priestor*. Prvky τ sa nazývajú *otvorené množiny*.

Príklady.

- 1.1. $\emptyset, X$ sú vždy topológie; $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ je topológia a nazýva sa *indiskrétna topológia* na X .
- 1.2. $X; \tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ je topológia na X a nazýva sa *diskrétna topológia*.
- 1.3. $\mathbb{R}; \tau_d = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \forall a \in U \exists \epsilon > 0 : (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U\}$ *obvyklá (štandardná, kanonická) topológia* na $\mathbb{R}$.
- 1.4. $\mathbb{R}; \tau_z = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \forall a \in U \exists c < a : (c, a] \subseteq U\}$ topológia na $\mathbb{R}$. $U, V \in \tau_z, a \in U \cap V, c_1 < a : (c_1, a] \subseteq U, c_2 < a : (c_2, a] \subseteq V, c = \max\{c_1, c_2\} < a, (c, a] \subseteq V \cap U, \tau_d \subseteq \tau_z$.
- 1.5. $\mathbb{R}; \tau_{\rightarrow} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$ – topológia na $\mathbb{R}$.
- 1.6. $\mathbb{R}; \tau_{cof} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \setminus U \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$ – *kofinitná topológia*.

Metrika: $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$:

- (1) $\forall a, b \in X : d(a, b) \geq 0$
- (2) $\forall a, b \in X : d(a, b) = d(b, a)$
- (3) $\forall a, b, c \in X : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$
- (4) $\forall a, b \in X : d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

Príklady.

- 1.7. Nech (X, d) je metrický priestor. Potom $\tau_d = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in U \exists \epsilon > 0 : \mathcal{O}_\epsilon(a) \subseteq U\}$ – je topológia daná metrikou d .
- 1.8. $(\mathbb{R}, \tau_d); (a, b)$ je otvorená, ale $(a, b]$ nie je otvorená.
- 1.9. $(\mathbb{R}, \tau_z); (a, b)$ je otvorená, a $(a, b]$ tiež.

Definícia 1.2. Nech (X, τ) je topologický priestor. Podmnožina $A \subseteq X$ sa nazýva *uzavretá* v (X, τ) , ak $X \setminus A \in \tau$.

Veta 1.1. Nech (X, τ) je topologický priestor. Potom platí:

- (1) $X, \emptyset$ sú uzavreté.
- (2) Ak A, B sú uzavreté v (X, τ) , tak $A \cup B$ je uzavretá v (X, τ) .
- (3) Ak $\mathcal{L}$ je ľubovoľný systém uzavretých množín, tak $\bigcap_{A \in \mathcal{L}} A$ je uzavretá množina.

Príklady.

- 1.10. $[a, b]$ je v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou uzavretá.
- 1.11. $(a, b]$ nie je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_d)$.
- 1.12. $(a, b]$ je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_z)$.

Definícia 1.3. Nech (X, τ) je topologický priestor. Potom systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ sa nazýva *báza* topológie, ak pre každé $U \in \tau$ existuje $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup_{V \in \mathcal{L}} V$.

Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie, tak aj $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ je báza topológie.

Veta 1.2. Systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ je báza v $(X, \tau) \Leftrightarrow$ pre každé $U \in \tau$ a pre každé $x \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V \subseteq U$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $U \in \tau$ a $x \in U$. $\exists \mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}, U = \bigcup_{V \in \mathcal{L}} V$. Potom existuje $V \in \mathcal{L}, x \in V$. Platí $V \in \mathcal{B}, V \subseteq U$.

$\Leftarrow$: Nech $U \in \tau$ a $x \in U$. $\exists V_x \in \mathcal{B} : x \in V_x \in \mathcal{B}. \mathcal{L} = \{V_x, x \in U\} \subseteq \mathcal{B}; \bigcup_{x \in U} V_x = U$.

Príklady.

- 1.13. $(\mathbb{R}, \tau_d)$; $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ – báza τ_d . $U \in \tau_d$, $x \in U$, $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$.
 1.14. $(\mathbb{R}, \tau_d)$; $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ je báza τ_d .
 1.15. $(\mathbb{R}, \tau_z)$; $\mathcal{B} = \{(a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ je báza τ_z .
 1.16. $(\mathbb{R}, \tau_z)$; $\mathcal{B} = \{(a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Je to báza τ_z ?
 1.17. (X, τ_{dis}) ; $\mathcal{B} = \{\{a\}, a \in X\}$ je báza (X, τ_{dis}) .
 1.18. (X, d) je metrický priestor. $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ a $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ sú bázy priestoru (X, τ_d) .

Veta 1.3. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie v priestore X . Potom platí:*

- (i) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$.
 (ii) Ak $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ a $x \in V_1 \cap V_2$, tak existuje $V_3 \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

Veta 1.4. *Nech $\mathcal{B}$ je systém podmnožín množiny X , ktorý má vlastnosti (i) a (ii). Potom systém množín $\tau_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in U \exists V \in \mathcal{B} : a \in V \subseteq U\}$ je topológia na X a $\mathcal{B}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}}$.*

Dôkaz. $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$, $X \in \tau_{\mathcal{B}}$ z (i). Nech $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. Nech $a \in U_1 \cap U_2$. Potom $a \in U_1$, $a \in U_2$ a existujú $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V_1 \subseteq U_1$, $a \in V_2 \subseteq U_2$, $a \in V_1 \cap V_2$. Potom $\exists V_3 \in \mathcal{B} : a \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, $a \in W = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$. Potom $\exists U \in \mathcal{S}$, $a \in U \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \exists V \in \mathcal{B}$, $a \in V \subseteq U \subseteq W \Rightarrow W \in \tau_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, $V \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall a \in U \exists V \in \mathcal{B} \Rightarrow V \in \tau_{\mathcal{B}}$. $U \in \tau_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall a \in U \exists V \in \mathcal{B} : a \in V \subseteq U$.

Príklady.

- 1.19. $X, \mathcal{B} = \{\{a\}, a \in X\}$ $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{dis}$
 1.20. Nech $(A, \leq)$ je usporiadaná množina a má aspoň 2 prvky. Pre $a < b$, $a, b \in A$: $(a, b) = \{x \in A, a < x < b\}$, $[a) = \{x \in A, x < a\}$, $(b] = \{x \in A, x > b\}$. $\mathcal{B} = \{(a, b); a, b \in A, a < b\} \cup \{[a), a \in A\} \cup \{(b], b \in A\}$ je báza topológie na A . $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\leq}$ je topológia určená usporiadaním $\leq$.

Definícia 1.4. Nech (X, τ) je topologický priestor. Systém $\mathcal{S} \subseteq \tau$ sa nazýva *subbáza* topológie τ , ak $\{\bigcap_{i=1}^k W_i, k \in \mathbb{N}, W_i \in \mathcal{S}\}$ je báza topológie τ .

Príklad.

- 1.21. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ $\mathcal{S} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cap \{(b, \infty), b \in \mathbb{R}\}$ – subbáza τ_d .
 $\{\bigcap_{i=1}^k W_i, k \in \mathbb{N}, W_i \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S} \cap \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$; $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \supseteq \mathcal{B} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Veta 1.5. *Ak $\mathcal{S}$ je subbáza topológie τ na X , tak $\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V = X$.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\bigcap_{i=1}^k W_i, k \in \mathbb{N}, W_i \in \mathcal{S}\}$ je báza τ . Potom $\bigcup_{V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V = X$. Nech $\bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = Y \subsetneq X$, $\forall V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \exists W \in \mathcal{S} : V \subseteq W \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = Y \subsetneq X$ spor s (i).

Veta 1.6. *Nech $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a $\bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = X$. Potom $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\bigcap_{i=1}^k W_i, k \in \mathbb{N}, W_i \in \mathcal{S}\}$ splňa (i), (ii) a $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ je určená bázou $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je topológia na X pre ktorú $\mathcal{S}$ je subbáza.*

Dôkaz.

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V \supseteq \bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = X \Rightarrow$ (i) pre $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Ak $V, V' \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \Rightarrow V \cap V' \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \Rightarrow$ platí (ii) pre $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Potom $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \{U \in \mathcal{P}(X), \forall a \in U \exists V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} : a \in V \subseteq U\}$ je topológia na X a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} \Rightarrow \mathcal{S}$ je subbáza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subseteq \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ a $\{\bigcap_{i=1}^k W_i, k \in \mathbb{N}, W_i \in \mathcal{S}\} = \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} \Rightarrow \mathcal{S}$ je subbáza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$.

$$\tau_S = \tau_{\mathcal{B}_S} = \{U \in \mathcal{P}(X), \forall a \in U, \exists k \in \mathbb{N} \exists W_1, \dots, W_k \in \mathcal{S} : a \in \bigcap_{i=1}^k W_i \subseteq U\}.$$

Definícia 1.5. Nech (X, τ) je topologický priestor, $p \in X$. Každá otvorená množina $U \in \tau$ pre ktorú $p \in U$ sa nazýva *okolím* bodu p . Systém všetkých okolí bodu p : $\eta(p)$.

Platí: Ak $U, U' \in \eta(p) \Rightarrow U \cap U' \in \eta(p)$.

Definícia 1.6. Nech $p \in X$, (X, τ) je topologický priestor. Systém $\mathcal{B}(p) \subseteq \eta(p)$ sa nazýva *báza okolí* bodu p ak $\forall U \in \eta(p) \exists V \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V \subseteq U$.

Príklad.

1.22. (X, d) je metrický priestor, $p \in X$. $\mathcal{B}(p) = \{\mathcal{O}_\varepsilon(p), \varepsilon > 0\}$ – báza okolí bodu p v (X, τ_d) .

1.23. $\mathcal{B}'(p) = \{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(p), n \in \mathbb{N}\}$ – báza okolí bodu p v (X, τ_d) .

1.24. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ $\mathcal{B}(p) = \{(p - \varepsilon, p], \varepsilon > 0\}$ – báza okolí v p .

1.25. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$ – báza okolí p .

Veta 1.7.

- (1) Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ) a $p \in X$, tak $\mathcal{B}(p) = \{V \in \mathcal{B}, p \in V\}$ je báza okolí v p .
- (2) Ak pre $\forall p \in X$ $\mathcal{B}(p)$ je báza okolí v (X, τ) , tak $\bigcup_{p \in X} \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ) .

Dôkaz.

- (1) Nech U je okolie p . Teda $U \in \tau$ a $p \in U$. Potom existuje $V \in \mathcal{B} : p \in V \subseteq U$. $V \in \mathcal{B}(p)$, $V \subseteq U$.
- (2) Nech U je otvorená množina tj. $U \in \tau$, $p \in U$. $\exists V \in \mathcal{B}(p) \subseteq U$, $V \subseteq U$, $p \in V \subseteq U$.

Veta 1.8. Nech (X, τ) je priestor a pre každé $p \in X$ je daná báza okolí $\mathcal{B}(p)$. Potom platí:

- (i) $\forall p \in X : \mathcal{B}(p) \neq \emptyset$
- (ii) $\forall V \in \mathcal{B}(p) \quad p \in V$
- (iii) Ak $V_1 \cap V_2$ je okolie p potom $\exists V_3 \in \mathcal{B}(p) : V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
- (iv) $\forall V \in \mathcal{B}(p) \forall q \in V \exists W \in \mathcal{B}(q) : W \subseteq V$.
- (v) U je otvorená v $(X, \tau) \Leftrightarrow \forall p \in U \exists V \in \mathcal{B}(p) : V \subseteq U$.

Dôkaz.

- (i) $X \in \eta(p) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p) \quad V \subseteq X \Rightarrow \mathcal{B}(p) \neq \emptyset$.
- (iii) $V_1 \cap V_2$ je okolie $p \Rightarrow \exists V_3 \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
- (iv) Nech $V \in \mathcal{B}(p)$, $q \in V$. $V \in \tau \Rightarrow V$ je okolie $q \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}(q) : W \subseteq V$.
- (v) $\Rightarrow$: U je otvorená a $p \in U$. Potom $U \in \eta(p) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V \subseteq U$.
 $\Leftarrow$: $\forall q \in U \exists V_q \in \mathcal{B}(q) : V_q \subseteq U$. $q \in V_q$, $V_q \in \tau$, $U = \bigcup_{q \in U} V_q \in \tau$.

Veta 1.9. Nech X je množina a $\forall p \in X$ je daný systém $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{P}(X)$ pričom sú splnené podmienky (i) až (iv). Potom $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X), \forall p \in U \exists V \in \mathcal{B}(p), V \subseteq U\}$ je topológia na X taká, že pre všetky $p \in X$ je $\mathcal{B}(p)$ báza okolí bodu p .

Dôkaz. $\emptyset, X \in \tau$; $U, U' \in \tau \quad p \in U \cap U' \Rightarrow \exists V, V' \in \mathcal{B}(p), V \subseteq U, V' \subseteq U' \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} \exists V'' \in \mathcal{B}(p) : V'' \subseteq V \cap V' \Rightarrow V'' \subseteq U \cap U'$. $U \cap U' \in \tau$. Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau$, tak $\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \in \tau$ je zrejmé. Nech $p \in X$. Chceme

ukázať, že $\mathcal{B}(p)$ je báza okolí p v (X, τ) .

1. $\mathcal{B}(p) \subseteq \eta(p) \subseteq \tau$. Nech $V \in \mathcal{B}(p)$, $q \in V$. Podľa (iv) $\exists W \in \mathcal{B}(q) \quad W \subseteq V \Rightarrow V \in \tau$. Podľa (ii) $\forall V \in \mathcal{B}(p) : p \in V$.

2. $\forall U \in \eta(p) \exists V \in \mathcal{B}(p) \quad V \subseteq U$. $U \in \eta(p) \Rightarrow U \in \tau$; $p \in U \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p) \Rightarrow V \subseteq U$.

Príklad.

1.26. $P_1 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \tau_1) \quad \mathcal{O}_\varepsilon(a, b) = \{(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+; \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} < \varepsilon\}$. Ak $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ a $b > 0$ tak $\mathcal{B}(a, b) = \{\mathcal{O}_\varepsilon(a, b); \varepsilon > 0\}$. $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0) = \{(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+; \sqrt{(a-c)^2 + d^2} < \varepsilon, d > 0\} \cap \{(a, 0)\}$. $\mathcal{B}(a, 0) = \{\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0); \varepsilon > 0\}$.

1.27. $P_2 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \tau_2)$, $\mathcal{B}(a, b) = \{\mathcal{O}_\varepsilon(a, b), \varepsilon > 0\}$ pre $b > 0$. $\mathcal{B}(a, 0) = \{\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0), \varepsilon > 0\}$, $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0) = \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, \varepsilon) \cup \{(a, 0)\}$.

Definícia 1.7. Nech $A \subseteq (X, \tau)$. Potom množina $\bar{A} = \bigcap \{V \in \mathcal{P}(X); V \text{ je uzavretá v } (X, \tau) \text{ a } A \subseteq V\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A .

Veta 1.10. Nech A, B sú podmnožiny v (X, τ) . Potom platí:

- (1) $A \subseteq \bar{A}$ a $\bar{A}$ je uzavretá množina.
- (2) Ak V je uzavretá v (X, τ) a $A \subseteq V$, tak $\bar{A} \subseteq V$.
- (3) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
- (4) Ak $A \subseteq B$, tak $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.
- (5) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- (6) B je uzavretá $\Leftrightarrow \bar{B} = B$.
- (7) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

Dôkaz.

- (4) $A \subseteq B \subseteq \bar{B}$, $A \subseteq \bar{B}$ – uzavretá $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \bar{A} \subseteq \bar{B}$.
- (5) $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ je uzavretá $\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$; $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, $B \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
- (6) $\Rightarrow$: $B \subseteq B$ – uzavretá $\Rightarrow \bar{B} \subseteq B$. Podľa (1) platí $B \subseteq \bar{B}$.
 $\Leftarrow$: $B = \bar{B} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} B$ je uzavretá.
- (7) $\bar{A}$ je uzavretá $\Rightarrow \overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

Veta 1.11. Nech X je množina a $cl : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$; $A \mapsto cl A$ je zobrazenie, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

- (cl 1) $\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq cl A$.
- (cl 2) $cl \emptyset = \emptyset$.
- (cl 3) $cl (A \cup B) = cl A \cup cl B$.
- (cl 4) $cl (cl A) = cl A$.

Potom $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X), cl (X \setminus U) = X \setminus U\}$ je topológia na X a pre každé $A \in \mathcal{P}(X) : cl A = \bar{A}$.

Veta 1.12. Nech A je podmnožina X , (X, τ) je topologický priestor a $p \in X$ a $\mathcal{B}(p)$ je báza okoli bodu p . Potom $p \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}(p) : V \cap A \neq \emptyset$.

Dôkaz.

- $\Rightarrow$: Nech $\exists V \in \mathcal{B}(p) : V \cap A = \emptyset$. Potom $A \subseteq X \setminus V$ – uzavretá. Potom $\bar{A} \subseteq X \setminus V \Rightarrow p \notin \bar{A}$.
- $\Leftarrow$: $p \notin \bar{A}$ – uzavretá. Potom $p \in X \setminus \bar{A}$ – otvorená $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p) : V \subseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow V \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$. $\square$

Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$ potom $Int A = \bigcup \{U \in \mathcal{P}(X), U \text{ je otvorená}, U \subseteq A\}$.

Príklad.

1.28. $Int [0, 1] = (0, 1)$, $Int \mathbb{Q} = \emptyset$ ($\neq \emptyset$)

Definícia 1.8. Priestor X sa nazýva *separabilný*, ak v X existuje spočítateľná hustá podmnožina.

Definícia 1.9. Množina $A \subseteq X$ je *hustá* v X , ak jej uzáver je celý topologický priestor. $\bar{A} = X$.

Veta 1.13. Podmnožina A priestoru X , ktorého báza je $\mathcal{B}$. Potom $A \subseteq X$ je hustá v $X \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}, V \neq \emptyset : V \cap A \neq \emptyset$.

Dôkaz.

- $\Rightarrow$: Nech existuje $V \in \mathcal{B}, V \neq \emptyset$ tak, že $V \cap A = \emptyset$. Potom $A \subseteq X \setminus V$ – uzavretá množina. Potom $\bar{A} \subseteq X \setminus V \neq X \Rightarrow A \neq X \Rightarrow A$ nie je hustá v X .
- $\Leftarrow$: Nech A nie je hustá v X tj. $\bar{A} \neq X$. Potom $X \setminus \bar{A} \neq \emptyset$, $X \setminus \bar{A}$ je otvorená. Nech $c \in X \setminus \bar{A}$. $\exists V \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in V \subseteq X \setminus \bar{A}$. $V \neq \emptyset, V \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$.

Príklady.

- 1.29. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, (\mathbb{R}, \tau_d) \quad \mathcal{B} = \{(a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ – báza τ_d . $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
- 1.30. $(\mathbb{R}, \tau_z), \mathcal{B} = \{(a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- 1.31. $(\mathbb{R}, \tau_{dis}), \mathcal{B} = \{\{a\}, a \in \mathbb{R}\} \quad \bar{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$.

Definícia 1.10. Hovoríme, že X spĺňa 1. *axiómu spočítateľnosti* (resp. 2. *axiómu spočítateľnosti*), ak pre každé $a \in X$ existuje spočítateľná báza okolí v a . (resp. X má spočítateľnú bázu topológie.)

Príklady.

- 1.32. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(\mathbb{R}, \tau_z)$ – separabilné, $\mathbb{Q}$ – spočítateľná hustá. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ nie je separabilný.
 1.33. $(\mathbb{R}, \tau_{cofin})$, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$ – separabilný, $\mathbb{N}$ – uzavretá množina.
 1.34. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, (X, d) – metrický priestor. (X, τ_d) spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti. $\forall a \in X : \mathcal{B}(a) = \{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(a); n \in \mathbb{N}\}$.
 1.35. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ $a \in \mathbb{R} : \mathcal{B}(a) = \{(a - \frac{1}{n}, a], n \in \mathbb{N}\}$ – báza okolí a spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.
 1.36. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ $\mathcal{B}(a) = \{\{a\}\}$ – spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.
 1.37. $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, $0 \in \mathbb{R}$. Nech $\mathcal{B}(0)$ je spočítateľná báza okolí 0. $\mathcal{B}(0) = \{V_1, \dots, V_n, \dots\}$ spočítateľný systém. $\forall n \in \mathbb{N} : X \setminus V_n$ je konečná. $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$, $X \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus V_n)$ spočítateľná, potom A je nespočítateľná. Nech $a \in A$, $a \neq 0$. Potom $W = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ je okolie bodu 0. $\forall n \in \mathbb{N} a \in V_n \Rightarrow V_n \cap \mathbb{R} \setminus W \neq \emptyset \Rightarrow V_n \not\subseteq W$ spor s tým, že $\mathcal{B}(0)$ je báza. Teda $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ nespĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.
 1.38. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ $\mathcal{B} = \{(a, b); a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ – spočítateľná báza v $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $U \in \tau_d$, $a \in U : \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$. $\exists r \in (a - \varepsilon, a) \cap \mathbb{Q}$; $\exists s \in (a, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. $a \in \underbrace{(r, s)}_{\in \mathcal{B}} \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$.
 1.39. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ nemá spočítateľnú bázu. $\mathcal{B}$ – ľubovoľná báza τ_{dis} . $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ je otvorená $a \in \{a\} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}$, $a \in V \subseteq \{a\} \Rightarrow V = \{a\} \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{B}$. $\text{card } \mathcal{B} \geq \mathcal{C}$.

Veta 1.14.

- (1) Ak X spĺňa 2. axiómu spočítateľnosti, tak spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.
- (2) Ak X spĺňa 2. axiómu spočítateľnosti, tak je separabilný.

Dôkaz.

- (1) Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza v X . Potom $\forall a \in X$, $\mathcal{B}(a) = \{V \in \mathcal{B}; a \in V\}$ je spočítateľná báza okolí a .
- (2) Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza X . $\forall V \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ vyberieme $x_V \in V$. $A = \{x_V, V \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\}$ spočítateľná $A \subseteq X$, $\forall V \in \mathcal{B}$, $V \neq \emptyset$, $V \cap A \ni x_V \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. Teda $\bar{A} = X$.

Príklady.

- 1.40. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, nespĺňa 2. axiómu spočítateľnosti.
 1.41. $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ separabilný a nespĺňa 2. axiómu spočítateľnosti ani 1. axiómu spočítateľnosti.
 1.42. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ separabilný, spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, ale nespĺňa 2. axiómu spočítateľnosti.

Veta 1.15. Nech (X, τ) je topologický priestor, $Y \subseteq X$. Potom systém množín $\tau|_Y = \{V \in \mathcal{P}(Y), \exists U \in \tau : V = Y \cap U\}$ je topológia na Y .

Dôkaz. $\emptyset, Y \in \tau|_Y$. Nech $V_1, V_2 \in \tau|_Y$. Potom $\exists U_1, U_2 \in \tau$ tak, že $V_1 = Y \cap U_1$, $V_2 = Y \cap U_2$. $V_1 \cap V_2 = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2)$. Nech $\mathcal{S} \subseteq \tau|_Y$. Potom $\forall V \in \mathcal{S}$ vyberme $U_V \in \tau$ tak, že $V = Y \cap U_V$. $\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} (Y \cap U_V) = Y \cap (\bigcup_{V \in \mathcal{S}} U_V) \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \in \tau|_Y$.

Definícia 1.11. Nech (X, τ) je priestor, $Y \subseteq X$. Potom priestor $(Y, \tau|_Y)$ sa nazýva *podpriestor* (X, τ) .

Príklady.

- 1.43. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $[0, 1]$ – podpriestor $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $(\frac{1}{2}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{1}{2}, 2)$. $(\frac{1}{2}, 1]$ je otvorená v $[0, 1]$.
 1.44. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(0, 1]$ – podpriestor $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $(0, \frac{1}{2}]$ je uzavretá v $(0, 1]$.

Veta 1.16. Nech (X, τ) je topologický priestor a $(Y, \tau|_Y)$ je podpriestor (X, τ) . Potom platí:

- (1) Podmnožina priestoru $(Y, \tau|_Y)$ je uzavretá $\Leftrightarrow$ existuje uzavretá podmnožina B v (X, τ) tak, že $A = Y \cap B$.
- (2) V je okolie bodu b v $(Y, \tau|_Y) \Rightarrow$ existuje okolie U bodu b v (X, τ) tak, že $V = Y \cap U$.
- (3) Ak $b \in Y$, $\mathcal{B}(b)$ je báza okolí b v (X, τ) , tak $\mathcal{B}_Y(b) = \{Y \cap V, V \in \mathcal{B}(b)\}$ je báza okolí b v $(Y, \tau|_Y)$.
- (4) Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ) , tak $\mathcal{B}|_Y = \{Y \cap V, V \in \mathcal{B}\}$ je báza topológie v $(Y, \tau|_Y)$.
- (5) Ak $A \subseteq Y$, tak $\bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$.

Dôkaz.

- (4) $\mathcal{B}|_Y \subseteq \tau|_Y$ $U \in \tau|_Y$, $c \in U$. $\exists U' \in \tau$, $U = Y \cap U'$. $c \in U' \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B} : c \in V \subseteq U'$.
 $V \cap Y = W \in \mathcal{B}|_Y$, $c \in W$, $W = V \cap Y \subseteq U' \cap Y = U$.

Dôsledok. Ak X má spočítateľnú bázu (resp. splňa 1. axiómu spočítateľnosti) a Y je podpriestor X , tak Y má spočítateľnú bázu (resp. splňa 1. axiómu spočítateľnosti).

Úloha. Nájsť v predchádzajúcich príkladoch separabilný priestor obsahujúci podpriestor, ktorý nie je separabilný.

Axiómy oddeliteľnosti.**Definícia 1.12.** Priestor X sa nazýva

- (1) T_0 -priestor, ak pre $\forall a, b \in X$, $a \neq b$ existuje okolie U bodu a tak, že $b \notin U$ alebo existuje okolie V bodu b tak, že $a \notin V$.
- (2) T_1 -priestor, ak pre $\forall a, b \in X$, $a \neq b$ existuje okolie U bodu a tak, že $b \notin U$ a existuje okolie V bodu b tak, že $a \notin V$.
- (3) T_2 -priestor (Hausdorffovský), ak pre ľubovoľné $a, b \in X$, $a \neq b$, $\exists U(a)$ a $V(b) : U \cap V = \emptyset$.

Tvrdenie. Každý T_2 -priestor je T_1 -priestor; každý T_1 -priestor je T_0 -priestor.*Príklady.*1.45. $(\{0, 1\}, \tau_{ind})$ nie je T_0 -priestor.1.46. $(\{0, 1\}, \tau_S)$ $\tau_S = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ je T_0 -priestor, ale nie je T_1 -priestor. τ_S sa nazýva *Sierpinského priestor*.1.47. $(\mathbb{R}, \tau_{\rightarrow})$ je T_0 -priestor, ale nie je T_1 -priestor.1.48. $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$; $U = \mathbb{R} \setminus \{b\} \ni a$, $V = \mathbb{R} \setminus \{a\} \ni b$. Je to T_1 -priestor, ale nie je T_2 -priestor, lebo: $a \in U = \mathbb{R} \setminus K$, $b \in V = \mathbb{R} \setminus L$, $U \cap V = \mathbb{R} \setminus (K \cup L) \neq \emptyset$.1.49. (X, d) je metrický priestor. (X, τ_d) je T_2 -priestor, lebo: $a, b \in X$, $a \neq b$, $d(a, b) = \delta > 0$, $\varepsilon > \frac{\delta}{2}$, $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(a) \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(b) = \emptyset$.**Veta 1.17.** X je T_1 -priestor $\Leftrightarrow \forall a \in X$ $\{a\}$ je uzavretá.*Dôkaz.* $\Rightarrow$: Nech $a \in X$, $\forall b \in X \setminus \{a\}$ existuje okolie U_b také, že $U_b \subseteq X \setminus \{a\}$ $U = \bigcup_{b \in A} U_b = X \setminus \{a\} \Rightarrow$ $\{a\} = X \setminus U$ je uzavretá. $\Leftarrow$: Nech $a, b \in X$, $a \neq b$, $\{a\}, \{b\}$ uzavreté. $U = X \setminus \{b\}$ otvorená $a \in U$, $b \notin U$, $V = X \setminus \{a\}$ otvorená. $b \in V$, $a \notin V \Rightarrow X$ je T_1 -priestor.**Veta 1.18.** Ak X je T_i -priestor ($i = 0, 1, 2$) a Y je podpriestor X , tak Y je T_i -priestor.*Dôkaz.* T_1 : X je T_1 -priestor. Nech $b \in Y$. $\{b\}$ je uzavretá v X . $\{b\} = Y \cap \{b\}$ uzavretá v Y . Y je T_1 -priestor. T_2 : Nech $a, b \in Y$, $a \neq b$. Existujú otvorené $U, V \in X$ také, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$, $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ sú otvorené v Y . $a \in U'$, $b \in V'$, $U' \cap V' = \emptyset$, Y je T_2 -priestor.**II. SPOJITÉ ZOBRAZENIA**Analýza: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.**Definícia 2.1.** Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ sa nazýva *spojité*, ak pre každú otvorenú množinu V priestoru Y je $f^{-1}(V) = \{a \in X, f(a) \in V\}$ otvorená v X .*Príklady.*2.1. $f : X \rightarrow Y$, $\forall a \in X : f(a) = b_0 \in Y$. (konštantné zobrazenie). V je otvorená v Y , ak $b_0 \in V$ tak $f^{-1}(V) = X$; ak $b_0 \notin V$ tak $f^{-1}(V) = \emptyset$.2.2. X – diskretný, Y – ľubovoľný, $f : X \rightarrow Y$ je ľubovoľné. Potom f je spojité.2.3. X – ľubovoľný, Y – indiskretný, $f : X \rightarrow Y$ je ľubovoľné. Potom f je spojité.2.4. $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojité tak $f : (X, \tau_d) \rightarrow (Y, \tau_{d'})$ je spojité.2.5. $id_X : X \rightarrow X$ je spojité.2.6. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je spojité.2.7. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_z) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_d)$ je spojité.*Poznámka.* $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.**Veta 2.1.** Nech X, Y sú topologické priestory. Pre každé $a \in X$ $\mathcal{B}(a)$ je daná báza okolí a a pre každé $b \in Y$ je daná báza okolí $\mathcal{B}'(b)$ bodu b a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Potom sú ekvivalentné:

- (1) $f : X \rightarrow Y$ je spojité.
- (2) Pre každú uzavretú podmnožinu B priestoru Y $f^{-1}(B)$ je uzavretá v X .
- (3) Pre každú podmnožinu A priestoru X : $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.
- (4) Pre každé $a \in X$ a každé $V \in \mathcal{B}'(f(a))$ existuje $U \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $f[U] \subseteq V$.

Dôkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2): Nech B je uzavretá v Y . Potom $Y \setminus B$ je daná otvorená v Y a teda $f_{-1}(U)$ je otvorená v X . $f_{-1}(B) = f_{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f_{-1}(U)$ je uzavretá v X .

(2) $\Rightarrow$ (3): Nech $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$: $f_{-1}(\underbrace{f[a]}_{\text{uz.}}) \supseteq f_{-1}(f[A]) \supseteq A \Rightarrow f_{-1}(\underbrace{f[\bar{A}]}_{\text{uz.}}) \supseteq \underbrace{\bar{A}}_{\text{uz.}} \Rightarrow f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Nech $a \in X$ a $\exists V \in \mathcal{B}(f(a))$ tak, že $\forall U \in \mathcal{B}(a)$, $f(U) \not\subseteq V$. Potom $U \not\subseteq f_{-1}(V) \Rightarrow U \cap X \setminus f_{-1}(V)$ je neprázdna. Potom $a \in \overline{X \setminus f_{-1}(V)}$ a teda $f(a) \in \overline{f(X \setminus f_{-1}(V))} = \overline{f(f_{-1}(Y \setminus V))} = \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ spor.

(4) $\Rightarrow$ (1): Nech V je otvorená v Y . Treba dokázať, že $f_{-1}(V)$ je otvorená v X . Nech $a \in f_{-1}(V)$. Potom $f(a) \in V \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}'(f(a)) : W \subseteq V$. $\exists S \in \mathcal{B}(a) : f(S) \subseteq W \Rightarrow S \subseteq f_{-1}(W) \subseteq f_{-1}(V)$ je otvorená.

Veta 2.2. Nech $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $\mathcal{B}$ je báza topológie v Y a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie v Y . Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:

- (1) $f : X \rightarrow Y$ je spojité.
- (2) Pre každé $V \in \mathcal{B}$: $f_{-1}(V)$ je otvorená množina v X .
- (3) Pre každé $W \in \mathcal{S}$: $f_{-1}(W)$ je otvorená v X .

Dôkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) je jasné.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nech V je otvorená množina v Y . Treba dokázať, že $f_{-1}(V)$ je otvorená v X . Nech $a \in f_{-1}(V)$. Potom $f(a) \in V$. Existujú $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$ tak, že $f(a) \in \bigcap S_i \subseteq V$. $f_{-1}(\bigcap S_i) = \bigcap f_{-1}(S_i)$. $f_{-1}(S_i)$ otvorené. $a \in f_{-1}(\bigcap S_i) \subseteq f_{-1}(V)$.

Definícia 2.2. Nech X, Y sú topologické priestory, $f : X \rightarrow Y$, $a \in X$. Hovoríme, že f je spojité v bode a , ak pre každé okolie $V(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje okolie U bodu a tak, že $f[U] \subseteq V$.

Veta 2.3. Nech $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, X' je podpriestor X a Y' je podpriestor Y taký, že $f(X) \subseteq Y'$. Ak $f : X \rightarrow Y$ je spojité, tak aj $f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$ aj $f' : X \rightarrow Y'$, $f'(a) = f(a) \forall a \in X$ sú spojité.

Veta 2.4. Nech $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $\mathcal{U}$ je systém otvorených podpriestorov priestoru X taký, že $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Potom f je spojité $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$ $f|_U : U \rightarrow Y$ je spojité.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: je zrejmé.

$\Leftarrow$: Nech V je otvorená v Y . $\forall U \in \mathcal{U}$: $(f|_U)_{-1}(V)$ je otvorená v X . U je otvorená $\Rightarrow (f|_U)_{-1}(V) = f_{-1}(V) \cap U$ je otvorená v X . $f_{-1}(V) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (f_{-1}(V) \cap U)$ otvorená v X .

Veta 2.5. Nech X, Y sú topologické priestory a $\mathcal{V}$ je konečný systém uzavretých podpriestorov priestoru X taký, že $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$. Potom $f : X \rightarrow Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}$ $f|_V : V \rightarrow Y$ je spojité.

Príklad.

2.8.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x+1} & \text{ak } x \in (-1, -\frac{1}{2}] \\ -4x & \text{ak } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases} \quad \text{je spojité.}$$

Veta 2.6. Ak $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sú spojité zobrazenia, tak $g \circ f$ je spojité z $X \rightarrow Z$.

Dôkaz. W otvorená v Z . $(g \circ f)_{-1}(W) = f_{-1}(g_{-1}(W))$ je otvorená.

Otázka. Ak $g \circ f : X \rightarrow Z$ je spojité, či niektoré z f, g musí byť spojité?

Definícia 2.3. Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ sa nazýva *homeomorfizmus* ak f je spojité, bijektívne a f_{-1} je spojité tiež.

Príklady.

2.9. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ spojité bijektívne. $id_R^{-1} = id_R : (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ je spojité, teda je to homeomorfizmus.

2.10. Zobrazenie z príkladu č. 8 je homeomorfizmus.

2.11. $id_X : X \rightarrow X$ je homeomorfizmus.

Veta 2.7. Ak $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sú homeomorfizmy, tak $g \circ f : X \rightarrow Z$ je homeomorfizmus.

Príklad.

2.12. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = 1\}$; $f : S^1 \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ je homeomorfizmus.

V $\mathbb{R}^{n+1}$: $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}), (\sum_{i=1}^n x_i^2) + (x_{n+1} - \frac{1}{2})^2 = 1\}$.

Definícia 2.4. Spojité zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ sa nazýva *otvorené (uzavreté)* ak pre každú otvorenú (uzavretú) množinu U v X je $f[U]$ otvorená (uzavretá).

Príklad 2.13.

$id_R : (\mathbb{R}, \tau_x) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_d)$ je spojité (a, b) je otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_x)$. $id_R((0, 1]) = (0, 1]$ nie je otvorená v (X, τ_d) .

Veta 2.8. Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie X a $f : X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie. Potom f je otvorené $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}$ $f(V)$ je otvorená v Y .

Dôkaz.

$\Rightarrow$: zrejme. $\Leftarrow$: Nech U je otvorená v X . Potom existuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, $U = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V$, $f(U) = f\left(\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V\right) = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} f(V)$ otvorená $\Rightarrow$ je otvorená.

Príklady.

2.14. $X = \mathbb{R}$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} = S^1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \in S^1$, $\mathcal{B} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b, b - a < \frac{1}{2}\}$.

2.15. $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_1(x, y) \mapsto x$ projekcia na prvú zložku – otvorené zobrazenie.

Definícia 2.5. Spojité zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ sa nazýva *faktorové zobrazenie* ak f je surjektívne a pre každé $V \subseteq Y$ platí: ak $f_{-1}(V)$ je otvorená množina, tak V je otvorená.

Príklady.

2.16. $f : \mathbb{R} \rightarrow (\{0, 1\}, \tau_{ind})$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ je spojité. $V \subseteq \{0, 1\}$ a $f_{-1}(V)$ je otvorená?

Potom $f_{-1}(V) = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$. Ak $f_{-1}(V) = \emptyset \Rightarrow \exists r \in f_{-1}(V)$. Potom $\exists \varepsilon > 0 : (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq f_{-1}(V)$; $\exists s \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $s, t \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq f_{-1}(V)$ je faktorové zobrazenie.

2.17. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ je spojité, surjektívne, nie je faktorové, lebo $id_R^{-1}\{r\} = \{r\}$ otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, ale nie je otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$.

Veta 2.9a. Nech $f : X \rightarrow Y$ je spojité surjektívne zobrazenie. Potom f je faktorové $\Leftrightarrow \forall V \subseteq Y$ platí: ak $f_{-1}(V)$ je uzavretá v X , tak V je uzavretá v Y .

Veta 2.9b. Ak $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$ sú faktorové zobrazenia, tak aj $g \circ f : X \rightarrow Z$ je faktorové zobrazenie.

Dôkaz. Nech $V \subseteq Z$ a $(g \circ f)_{-1}(V)$ je otvorená v X . $(g \circ f)_{-1}(V) = g_{-1}(f_{-1}(V))$ je otvorená $\Rightarrow g_{-1}(V)$ je otvorená $\Rightarrow V$ je otvorená.

Veta 2.9c. Ak $f : X \rightarrow Y$ je surjektívne a otvorené (uzavreté) spojité zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.

Dôkaz. Nech $V \subseteq Y$ a $f_{-1}(V)$ je otvorená v X . f je otvorené $\Rightarrow f(f_{-1}(V)) = V$ je otvorená.

Príklad.

2.18. $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ otvorené zobrazenie $\Rightarrow$ faktorové.

2.19. $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $p_1(x, y) = x$ otvorené $\Rightarrow$ faktorové.

Definícia 2.6. Spojité zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je *vnorenie*, ak $f : X \rightarrow f(X)$ (podpriestor Y) je homeomorfizmus.

Veta 2.10. *Spojité zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je vnorenie $\Leftrightarrow f$ je injektívne a pre každú otvorenú (uzavretú) podmnožinu V v X , $f(V)$ je otvorená (uzavretá) v $f(X)$.*

Príklady.

2.20. Ak A je podpriestor X , tak $j : A \rightarrow X$, $j(x) = x$ je vnorenie. $j(A) = A$, $j : A \rightarrow j(A) = A$, $j = id_A$ je vnorenie.

2.21. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x)$ je spojité, injektívne, otvorené $\Rightarrow$ vnorenie.

2.22. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \frac{1}{x})$ je spojité, injektívne, otvorené $\Rightarrow$ vnorenie.

III. TOPOLOGICKÝ SÚČIN TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROV

Definícia 3.1. Nech (X, τ_X) , (Y, τ_Y) sú topologické priestory, $\mathcal{S} = \{U \times Y, U \in \tau_X\} \cup \{X \times V, V \in \tau_Y\}$, $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{U \times V, U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$. Nech $\tau_\mathcal{S} = \tau_\mathcal{B}$ je topológia určená subbázou $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Potom $(X \times Y, \tau_\mathcal{B})$ sa nazýva *topologický súčin* priestorov (X, τ_X) , (Y, τ_Y) ; $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ sa nazýva *štandardná subbáza* (báza) súčinnej topológie $\tau_\mathcal{B}$.

Označenie. $(X \times Y, \tau_\mathcal{B}) = (X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

Veta 3.1. *Nech (X, τ_X) , (Y, τ_Y) sú priestory, $\tau_\mathcal{B}$ je súčinná topológia na $X \times Y$ a τ je ľubovoľná topológia na $X \times Y$ taká, že $p_X : (X \times Y, \tau) \rightarrow (X, \tau_X)$ aj $p_Y : (X \times Y, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ sú spojité. Potom $\tau_\mathcal{B} \subseteq \tau$.*

Dôkaz. p_X spojitá $\forall U \in \tau_X : (p_X)_{-1}(U) = U \times Y \in \tau$. p_Y spojitá $\forall V \in \tau_Y : (p_Y)_{-1}(V) = X \times V \in \tau$. Teda $\mathcal{S} \subseteq \tau \Rightarrow \tau_\mathcal{S} = \tau_\mathcal{B} \subseteq \tau$.

Veta 3.2. *Nech (X, τ_X) , (Y, τ_Y) sú topologické priestory, $\mathcal{B}_X$ je subbáza topológie τ_X , $\mathcal{B}_Y$ je báza τ_Y . Nech $\tilde{\mathcal{B}} = \{U \times V; U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$. Potom $\tilde{\mathcal{B}}$ je báza topológie $\tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$ na $X \times Y$ a platí $\tau_{\tilde{\mathcal{B}}} = \tau_\mathcal{B}$.*

Dôkaz. $\bigcup_{(U,V) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y} (U \times V) = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{B}_X} U \right) \times \left(\bigcup_{V \in \mathcal{B}_Y} V \right) = X \times Y$. $U \times V, U' \times V' \in \tilde{\mathcal{B}}, (U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$. $(a, b) \in (U \times V) \cap (U' \times V')$. Potom $a \in U \cap U', b \in V \cap V' \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_X, W' \in \mathcal{B}_Y : a \in W \subseteq (U \cap U'), b \in W' \subseteq (V \cap V')$. $(a, b) \in \underbrace{W \times W'}_{\in \tilde{\mathcal{B}}} \subseteq (U \times V) \cap (U' \times V')$. $\tilde{\mathcal{B}}$ báza topológie

na $(X \times Y, \tau_\mathcal{B})$. $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \tau_{\tilde{\mathcal{B}}} \subseteq \tau_\mathcal{B}$. $V \in \mathcal{B}_Y : \bigcup_{U \in \mathcal{B}_X} (U \times V) = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{B}_X} U \right) \times V = X \times V \in \tau_\mathcal{B}$. Symetricky: $\forall U \in \mathcal{B}_X : \bigcup_{V \in \mathcal{B}_Y} (U \times V) = U \times Y \in \tau_\mathcal{B}$. $p_X : (X \times Y, \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}) \rightarrow (X, \tau_X); \forall U \in \mathcal{B}_X : (p_X)_{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. p_X spojitá. $p_Y : (X \times Y, \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}) \rightarrow (Y, \tau_Y); \forall V \in \mathcal{B}_Y : (p_Y)_{-1}(V) = X \times V \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. p_Y spojitá. p_X, p_Y sú spojité potom $\tau_\mathcal{B} \subseteq \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

$\tau_\mathcal{B} = \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

Veta 3.3. *Nech X, Y, Z sú topologické priestory a $X \times Y$ je topologický súčin a $f : Z \rightarrow X \times Y$ je zobrazenie. Potom f je spojité $\Leftrightarrow p_X \circ f$ aj $f \circ p_Y$ sú spojité.*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: zrejmé.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie $\mathcal{S} = \{U \times Y, U \text{ je otvorená v } X\} \cap \{X \times V, V \text{ je otvorená v } Y\}$. Zoberme si $U \times Y \in \mathcal{S}$, $f_{-1}(U \times Y) = f_{-1}((p_X)_{-1}(U)) = \underbrace{(p_X \circ f)_{-1}(U)}_{\text{spoj.}} \Rightarrow$ otvorená

v Z . $f_{-1}(X \times V) = f_{-1}((p_Y)_{-1}(V)) = \underbrace{(p_Y \circ f)_{-1}(V)}_{\text{spoj.}} \Rightarrow$ otvorená v Z .

Príklad.

3.1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ topologický súčin $= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_d)$, $d((a, b), (c, d)) = ((a - c)^2 + (b - d)^2)^{1/2}$. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, \frac{1}{x})$. f je spojité $\Leftrightarrow p_1 \circ f, p_2 \circ f$ sú spojité. $p_1 \circ f = p_1(f(x)) = x$, $p_2 \circ f(x) = p_2(f(x)) = \frac{1}{x}$. Oba idú z $\mathbb{R}^+$ do $\mathbb{R}$.

Veta 3.4. Ak (A, τ_A) je podpriestor (X, τ_X) a (B, τ_B) je podpriestor (Y, τ_Y) , tak $(A, \tau_A) \times (B, \tau_B)$ je podpriestor $(X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

Dôkaz. $A \times B \subseteq X \times Y$; $\mathcal{B}_{A \times B} = \{U \times V; U \in \tau_A, V \in \tau_B\}$, $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U' \times V', U' \in \tau_X, V' \in \tau_Y\}$. $\forall U \times V \in \mathcal{B}_{A \times B} \exists U' \in \tau_X, V' \in \tau_Y$ tak, že $U = U' \cap A, V = V' \cap B \Rightarrow (U' \cap A) \times (V' \cap B) = (U' \times V') \cap (A \times B)$. $\mathcal{B}_{A \times B} = \{(U' \times V') \cap (A \times B), U' \times V' \in \mathcal{B}_{X \times Y}\}$ báza podpriestoru určeného $A \times B$ v $(X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

Príklady.

3.2. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$; $[0, 1] \Rightarrow S^1 \times [0, 1]$ je podpriestor $\mathbb{R}^3$. $S^1 \times [0, 1] = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a^2 + b^2 = 1, 0 \leq c \leq 1\}$.

3.3. $S^1 \times S^1$ – tórus, anuloid.

3.4. $[0, 1] \times [0, 1]$ – štvorec.

3.5. $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$; $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X_\alpha : \forall \alpha \in I. \forall U$ otvorenú v X_α : $(p_\alpha)_{-1}(U)$ je otvorená.

$(p_\alpha)_{-1}(U) = \prod_{\beta \in I} Y_\beta; Y_\alpha = U : \forall \beta \neq \alpha Y_\beta = X_\beta. (p_{\alpha_1})_{-1}(U) \cap (p_{\alpha_2})_{-1}(V) = \prod_{\gamma \in I} Y_\gamma, Y_{\alpha_1} = U, Y_{\alpha_2} = V : \forall \gamma \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}, Y_\gamma = X_\gamma.$

Definícia 3.2. Nech $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ je systém topologických priestorov (I je indexová množina). Nech $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\mathcal{S} = \{(p_\alpha)_{-1}(U) : \alpha \in I, U \in \tau_\alpha\}$ a τ je topológia na X určená subbázou $\mathcal{S}$. Potom (X, τ) sa nazýva *topologický súčin* systému $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$; $\mathcal{S}$ sa nazýva *štandardná subbáza* súčinovej topológie a systém $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i); k \in \mathbb{N}; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I; U_i \in \tau_{\alpha_i}, \forall i = 1, \dots, k\}$ sa nazýva *štandardná báza* súčinovej topológie. Ozn. $(X, \tau) = \prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$.

Veta 3.5. Nech $(X, \tau) = \prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je topologický súčin priestorov $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$. Potom platí:

- (1) $\forall \alpha \in I p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \tau_\alpha)$ je spojité zobrazenie.
- (2) Ak $f \in (\mathbb{Z}, \tau_Z) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je zobrazenie, tak f je spojité $\Leftrightarrow \forall \alpha \in I : p_\alpha \circ f$ je spojité.
- (3) Ak τ' je topológia na X a $\forall \alpha \in I p_\alpha : (X, \tau') \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je spojité, tak $\tau \subseteq \tau'$.
- (4) Ak $\forall \alpha \in I \mathcal{B}_\alpha$ je báza topológie τ_α ; $\mathcal{S}' = \{(p_\alpha)_{-1}(V), \alpha \in I, V \in \mathcal{B}_\alpha\}$ a $\tau_{\mathcal{S}'}$ je topológia určená tým systémom $\mathcal{S}'$, tak $\tau_{\mathcal{S}'} = \tau$. Systém $\mathcal{B}' = \{\bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1} V_i : k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I, V_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}\}$ je báza $\tau_{\mathcal{S}'}$.
- (5) $\forall \alpha \in I p_\alpha : (X, \tau) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je otvorené zobrazenie a teda aj faktorové zobrazenie.

Dôkaz.

- (1) jasné.
- (2) $\Rightarrow$: zrejme. $\Leftarrow$: Nech $V \in \mathcal{S}$ tj. $\exists \alpha \in I$ a $\exists U \in \tau_\alpha$ tak, že $V = (p_\alpha)_{-1}(U)$. $f_{-1}(V) = f_{-1}((p_\alpha)_{-1}(U)) = \underbrace{(p_\alpha \circ f)_{-1}(U)}_{\text{spoj.}} \in \tau_Z \Rightarrow f$ je spojité.
- (3) $\forall \alpha \in I p_\alpha : (X, \tau') \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je spojité, tak $\forall \alpha \in I \forall U \in \tau_\alpha (p_\alpha)_{-1}(U) \in \tau$. Potom $\mathcal{S} \subseteq \tau \subseteq \tau'$.
- (4) Nech $\alpha \in I, p_\alpha : (X, \tau_{\mathcal{S}'}) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha); \forall V \in \mathcal{B}_\alpha (p_\alpha)_{-1}(V) \in \mathcal{S}' \subseteq \tau_{\mathcal{S}'} \Rightarrow p_\alpha$ je spojité $\forall \alpha \in I \xRightarrow{(3)} \tau \subseteq \tau_{\mathcal{S}'}$. $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \tau_{\mathcal{S}'} \subseteq \tau$. $\tau = \tau_{\mathcal{S}'}$.
- (5) Nech $\alpha \in I, p_\alpha : (X, \tau) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$. Nech $V \in \mathcal{B}$ je štandardná báza. Potom $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$, $U_1 \in \tau_{\alpha_1}, \dots, U_k \in \tau_{\alpha_k} : V = \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)$. Ak $\exists i : U_i = \emptyset$ potom $p_\alpha(V) = \emptyset$.
Ak $\forall i : U_i \neq \emptyset$, tak $p_\alpha(V) = \begin{cases} U_i \text{ pre } \alpha = \alpha_i \text{ patrí } \tau_{\alpha_i} \text{ napr. } p_2(U_1 \times X_2 \times U_3) = X_2 \\ X_\alpha \text{ pre } \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \tau_\alpha \text{ } p_2(X_1 \times U_2 \times U_3) = U_2 \end{cases}$
Potom p_α je otvorená.

Poznámka. $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}; \forall \alpha \in I : (X_\alpha, \tau_\alpha) = (X, \tau)$ potom píšeme $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha) = (X, \tau)^I$. $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$
 $x : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, x(\alpha) \in X_\alpha$.

Príklady.

3.6. $D_2 = \{0, 1\}$ diskretný; $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1\}\}$ báza D_2 . $D_2^2 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. $\mathcal{B}^1 = \{\{0\} \times \{0\}, \{1\} \times \{0\}, \{0\} \times \{1\}, \{1\} \times \{1\}\}$ báza D_2^2 . D_2^2 je zasa diskretná topológia.

3.7. $D_2^{\mathbb{N}}$ nemôže byť diskretný priestor. Jeho báza je nekonečný kartézsky súčin, ktorý od istého člena obsahuje činitele $\{0, 1\}$. napr. $\{0\} \times \{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{0\} \times \{1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \times \cdots$.

3.8. I nekonečná. $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I} \forall \alpha U_\alpha \in \tau_\alpha \emptyset \neq U_\alpha \neq X_\alpha$. $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ nie je otvorená v $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$.

$$x \in \prod_{\alpha \in I} U_\alpha, x \in \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \not\subseteq \prod_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Veta 3.6. *Nech $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ je systém priestorov a $\forall \alpha \in I : A_\alpha$ je neprázdna podmnožina X_α . Potom platí:*

- (1) $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ je uzavretá v $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$.
- (2) $\overline{\prod_{\alpha \in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$.

Dôkaz.

- (1) $\Rightarrow$: A je uzavretá: $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha = A = \bar{A} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha; \forall \alpha \in I, A_\alpha \neq \emptyset, \bar{A}_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \forall \alpha \in I : A_\alpha = \bar{A}_\alpha \Rightarrow$

A_α je uzavretá.

$$\Leftarrow: \bar{A} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha = A \Rightarrow A \text{ je uzavretá.}$$

- (2) $\forall \alpha \in I : p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ je spojitý. $p_\alpha[\bar{A}] \subseteq \overline{p_\alpha[A]} = \bar{A}_\alpha \Rightarrow \bar{A} \in (p_\alpha)_{-1}(\bar{A}_\alpha) = \prod_{\beta \in I} Y_\beta;$

$$Y_\alpha = \bar{A}_\alpha, Y_\beta = X_\beta \text{ pre } \forall \beta \in I. \text{ Potom } \bar{A} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} (p_\alpha)_{-1}(\bar{A}_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha.$$

Opačná inklúzia: $\supseteq$: Nech $x \in \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I p_\alpha(x) \in \bar{A}_\alpha$. Nech V je prvok štandardnej

bázy $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ taký, že $x \in V$. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$ a $\exists U_1, \dots, U_k : \forall i = 1, \dots, k : U_i$ je otvorená

podmnožina X_{α_i} . $V = \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$. $Y_{\alpha_i} = U_i \forall i = 1, \dots, k : Y_{\alpha_i} = X_{\alpha_i}$ pre

$\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$. $\forall \alpha \in I Y_\alpha$ je otvorená v X_α . $x \in V \Rightarrow \forall \alpha \in I p_\alpha(x) \in \bar{A}_\alpha$ a Y_α je okolie $p_\alpha(x) \Rightarrow Y_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$. $V \cap A = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \cap \prod_{\alpha \in I} A_\alpha = \prod_{\alpha \in I} \underbrace{(Y_\alpha \cap A_\alpha)}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A} : \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha \subseteq \bar{A}$.

Veta 3.7.

- (1) Ak $\forall \alpha \in I : X_\alpha$ je T_i -priestor ($i = 0, 1, 2$), tak $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je T_i -priestor.
- (2) Ak $\forall n \in \mathbb{N} X_n$ je separabilný (resp. vyhovuje 1. axióme spočítateľnosti; má spočítateľnú bázu), tak $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ je separabilný (resp. vyhovuje 1. axióme spočítateľnosti; má spočítateľnú bázu).

Dôkaz.

- (1) Napr. pre $i=2$: $\forall \alpha \in I : X_\alpha$ je T_2 -priestor; $x, y \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \neq y$. Potom $\exists \alpha \in I : p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$. $p_\alpha(x), p_\alpha(y) \in X_\alpha \Rightarrow$ existujú otvorené U, V v X_α tak, že $p_\alpha(x) \in U, p_\alpha(y) \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. $(p_\alpha)_{-1}(U),$

$(p_\alpha)_{-1}(V)$ sú otvorené v $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$; $x \in (p_\alpha)_{-1}(U)$, $y \in (p_\alpha)_{-1}(V)$, $(p_\alpha)_{-1}(U) \cap (p_\alpha)_{-1}(V) = \emptyset$.

Teda $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je T_2 -priestor.

- (2) Nech $\forall n \in \mathbb{N} : X_n$ je separabilný tj. $\exists M_n \subseteq X_n$, $\bar{M}_n \subseteq X_n$, M_n je spočítateľná. $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Zvoľme ľubovoľný $a \in A$. $\forall n \in \mathbb{N} : p_n(a) \in M_n$. $M = \{b \in A; \{k \in \mathbb{N}, p_k(b) \neq p_k(a)\} \text{ je konečná}\}$.
 M je spočítateľná: Nech $x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Nech V je prvok štandardnej bázy topológie $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$,

$x \in V$. $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\exists U_1, \dots, U_k$ kde U_i je otvorená v X_{n_i} . $V = \bigcap_{i=1}^k (p_{n_i})_{-1}(U_i) = \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
 $Y_{n_i} = U_i$; $Y_n = X_n$ ak $n \neq n_1, \dots, n_k$. $\forall n \in \mathbb{N} : p_n(x) \in Y_n$ otvorená v X_n . $p_n(x) \in \bar{M}_n = X_n \Rightarrow Y_n \cap M_n \neq \emptyset \Rightarrow V \cap M = \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cap \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n = \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cap M_n \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{M} \Rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \subseteq \bar{M}$.

IV. FAKTOROVÉ ZOBRAZENIE

Veta 4.1. Nech (X, τ) je topologický priestor, Y je množina a $f : X \rightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie. Potom $\tau_f = \{V \in \mathcal{P}(Y), f_{-1}(V) \in \tau\}$ je topológia na Y a zobrazenie $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_f)$ je faktorové zobrazenie.

Dôkaz. $\emptyset, Y \in \tau_f$, $V, V' \in \tau_f$, $(f_{-1})(V), f_{-1}(V') \in \tau$. $f_{-1}(V \cap V') = f_{-1}(V) \cap f_{-1}(V') \in \tau \Rightarrow V \cap V' \in \tau_f$.
 $\mathcal{S} \subseteq \tau_f$, $\forall U \in \mathcal{S} : f_{-1}(U) \in \tau$. $f_{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} f_{-1}(U) \in \tau$. f je spojitý, surjektívne. Nech $V \subseteq Y$ a $f_{-1}(V) \in \tau$. Potom $V \in \tau_f$.

Definícia 4.1. Topológia τ_f z Vety 4.1 sa nazýva faktorová topológia určená zobrazením f .

Príklady.

4.1. $\mathbb{R}$ s obvyčajnou topológiou. $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$; $\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : f(x) = 1$.
 $V \in \tau_f \Leftrightarrow f_{-1}(V)$ je otvorená v $\mathbb{R}$. $\emptyset \in \tau_f$, $\{0, 1\} \in \tau_f$, $f_{-1}(\{1\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie je otvorená v $\mathbb{R} \Rightarrow \{1\} \notin \tau_f$.
 $f_{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ nie je otvorená v $\mathbb{R} \Rightarrow \{0\} \notin \tau_f$. $\tau_f = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$ indiskrétna topológia.

4.2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$; $g(x) = 0$ pre $x > 0$; $g(x) = 1$ pre $x \leq 0$. $\tau_g = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. $g_{-1}(\{0\}) = (0, \infty)$ otvorená v $\mathbb{R}$. $g_{-1}(\{1\}) = (-\infty, 0]$ nie je otvorená.

4.3. $h : \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$; $h(x) = 0$ pre $x < \sqrt{2}$, $h(x) = 1$ pre $x > \sqrt{2}$. $\tau_h = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$.
 $h_{-1}(\{0\}) = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ otvorená v $\mathbb{Q}$; $h_{-1}(\{1\}) = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ otvorená v $\mathbb{Q}$.

Definícia 4.2. Nech (X, τ) je topologický priestor, E je relácia ekvivalencie na X ; $X/E = \{E(x); x \in X\}$ je faktorová množina (rozklad X) určená reláciou E a $p_E : X \rightarrow X/E$; $p_E(x) = E(x)$. Nech $\tau_E = \tau_{p_E}$ je faktorová topológia na X/E určená zobrazením p_E . Potom priestor $(X/E, \tau_E)$ sa nazýva faktorový priestor priestoru (X, τ) určený reláciou E .

Príklady.

4.4. $\mathbb{R}$; $x \sim y \Leftrightarrow$ ak sú naraz racionálne, alebo iracionálne. $\mathbb{R}/\sim = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. $p_\sim : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$;
 $p_\sim(x) = \mathbb{Q}$ pre $\forall x \in \mathbb{Q}$; $p_\sim(x) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pre $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\tau_\sim = \{\emptyset, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\}$.

4.5. $\mathbb{R}$; $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ alebo $x, y \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}/\sim = \{\mathbb{N}\} \cup \{\{a\}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\}$. $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$, $p(a) = \{a\}$,
 $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $p(n) = \mathbb{N}$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$.

Veta 4.3. Nech $f : X \rightarrow Y$ je spojitý zobrazenie a E_f je relácia ekvivalencie na X definovaná $aE_fb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Nech $g : X/E_f \rightarrow Y$ je zobrazenie $g(E_f(x)) = f(x)$ a $p_{E_f} : X \rightarrow X/E_f$ je prirodzená projekcia priestoru X na faktorový priestor X/E_f . Potom g je spojitý zobrazenie. Navyše ak f je faktorové zobrazenie, tak g je homeomorfizmus.

Dôkaz. $f = g \circ p_{E_f}$ $p_{E_f} : X \rightarrow X/E_f$, $p_{E_f}(x) = E_f(x)$ potom to vidno z definície: $g \circ E_f = f$. $g \circ p_{E_f}$ je spojitý; p_{E_f} je faktorové $\Rightarrow g$ je spojitý. Nech f je faktorové zobrazenie. Potom f je surjektívne $\Rightarrow g$ je surjektívne. g je prosté $\Rightarrow g$ je bijektívne. $f = g \circ p_{E_f}$; $p_{E_f} = g^{-1} \circ f \Rightarrow g^{-1}$ je spojitý. Teda g je homeomorfizmus.

Príklady.

4.6. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou. $xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. $E(0) = \mathbb{Z}$, $E(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R} : E(a) = a + \mathbb{Z}$; $a \in [0, 1] \Rightarrow E(a)$ – všetky triedy. $(\mathbb{R}/E, \tau_E)$ $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ je to spojité, otvorené, surjektívne $\Rightarrow$ faktorové. $xE_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ $E_f = E$.

4.7. $\mathbb{R}$; $xEy \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q}$ alebo $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}/E = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. $f(x) = 0$ ak $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = 1$ ak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.8. $\mathbb{R}$; $xEy \Leftrightarrow x = y$ alebo $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}/E = \{\{x\}; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \setminus \{n \in \mathbb{N}; n \geq 2\}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{n \in \mathbb{N}; n \geq 2\} = \mathbb{R}$ $f(x) = x$ ak $x \notin \mathbb{N}$, $f(x) = 1$ ak $x \in \mathbb{N}$. $g(\{x\}) = x$, $g(\mathbb{N}) = 1$. $(\mathbb{R}, \tau_f)$ nevyhovuje 1. axióme spočítateľnosti;

1 nemá spočítateľnú bázu okolí. Predpokladajme, že existuje spočítateľná báza okolí $V_1, \dots, V_n, \dots$ bodu 1 v $(\mathbb{R}, \tau_f)$. $1 \in V_1$; $f_{-1}(V_1)$ otvorená v $\mathbb{R}$; $\mathbb{N} \subseteq f_{-1}(V_1)$ otvorená $\exists \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ tak, že $(1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1) \subseteq f_{-1}(V_1)$, $f((1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1)) = (1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1) \subseteq V_1$.

$1 \in V_2$; $\mathbb{N} \subseteq f_{-1}(V_2) \Rightarrow 2 \in f_{-1}(V_2)$ otvorená. $\exists \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$, $(2 - \varepsilon_2, 2 + \varepsilon_2) \subseteq f_{-1}(V_2)$. $f(2 - \varepsilon_2, 2 + \varepsilon_2) = \{1\} \cup ((2 - \varepsilon_2, 2 + \varepsilon_2) \setminus \{2\})$.

$1 \in V_n \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq f_{-1}(V_n) \Rightarrow n \in f_{-1}(V_n)$ otvorená. $\exists \frac{1}{2} > \varepsilon_n > 0 : (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \subseteq f_{-1}(V_n) \Rightarrow f((n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)) = \{1\} \cup ((n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \setminus \{n\})$.

Definujme si: $V = (1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, 1 + \frac{\varepsilon_1}{2}) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} [(n - \frac{\varepsilon_n}{2}, n + \frac{\varepsilon_n}{2}) \setminus \{n\}] \subseteq \mathbb{R}$. $f_{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n - \frac{\varepsilon_n}{2}, n + \frac{\varepsilon_n}{2})$

otvorená v $\mathbb{R} \Rightarrow V$ je otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_f)$. Bod $1 + \frac{\varepsilon_1}{2} \in V_1 \setminus V \Rightarrow V_1 \not\subseteq V \dots 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} \in V_n \setminus V \Rightarrow V_n \not\subseteq V \dots$ spor s tým, že $V_1, V_2, \dots$ je báza okolí bodu 1.

Topologický súčet.

Definícia 4.3. Nech $((X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I})$ je systém topologických priestorov a $\forall \alpha, \beta \in I : \text{ak } \alpha \neq \beta, \text{ tak } X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. Nech $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Potom $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X), \forall \alpha \in I : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha\}$ je topológia na X .

$\bigcup_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ je báza τ . Priestor (X, τ) sa nazýva topologický súčet systému $((X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I})$

ozn.: $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ $(X \cup Y, \tau) = (X, \tau_X) \oplus (Y, \tau_Y)$.

Vlastnosti. Nech $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$. Potom

- (1) Pre každé α je X_α otvorená a súčasne uzavretá v (X, τ) .
- (2) Ak $\forall \alpha \in I : (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je T_i -priestor ($i = 0, 1, 2$) (vyhovuje 1. axióme spočítateľnosti), tak $\bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je T_i -priestor (resp. vyhovuje 1. axióme spočítateľnosti).
- (3) $\forall \alpha \in I : (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je podpriestor $\bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$.

V. REGULÁRNE, ÚPLNE REGULÁRNE A NORMÁLNE PRIESTORY

Definícia 5.1. Nech X je topologický priestor. Potom:

- (1) X sa nazýva *regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a každé $c \in X \setminus A$ existujú otvorené množiny $U, V \in X$ tak, že $c \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.
Regulárny T_1 -priestor sa nazýva T_3 -priestor.
- (2) X sa nazýva *úplne regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a každé $c \in X \setminus A$ existuje spojitá zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$ také, že $f(c) = 1$, $f[A] \subseteq \{0\}$.
Úplne regulárny T_1 -priestor sa nazýva $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.
- (3) X sa nazýva *normálny*, ak pre ľubovoľné uzavreté množiny A, B v X také, že $A \cap B = \emptyset$ existujú otvorené množiny U, V pre ktoré $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.
Normálny T_1 -priestor sa nazýva T_4 -priestor.

Príklad.

5.1. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je $T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$ -priestor. Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ je uzavretá. $c \in \mathbb{R} \setminus A$. $\exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. $(c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq [c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. $V = \mathbb{R} \setminus [c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}] \supseteq A$, $c \in (c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}) = U$ otvorená. $\Rightarrow U \cap V = \emptyset$. $A \subseteq \mathbb{R} \setminus (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. $f(c) = 1$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

5.2. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. A je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_z)$. $c \notin A$. $\exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c] \cap A = \varepsilon$. $(c - \varepsilon, c]$ je aj otvorená aj uzavretá $\Rightarrow$ aj jej komplement je uzavretý aj otvorený.

$f : (\mathbb{R}, \tau_z) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (c - \varepsilon, c] \\ 0 & x \notin (c - \varepsilon, c] \end{cases}$ je to spojité zobrazenie.
 $\{[0, b], b \in (0, 1)\} \cup \{(a, 1], a \in (0, 1)\}$ je subbáza topológie $[0, 1]$. $f(c) = 1$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

Veta 5.1. Každý úplne regulárny priestor je regulárny.

Dôkaz. Nech X je úplne regulárny. Nech $A \subseteq X$, A uzavretá, $c \notin A$. Existuje spojité zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$; $f(c) = 1$; $f[A] \subseteq \{0\}$. $f_{-1}(\frac{1}{2}, 1] = U$ otvorená; $c \in U$; $V = f_{-1}[0, \frac{1}{2})$ je otvorená, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. Teda X je regulárny.

Dôsledok. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor je T_3 -priestor.

Príklad.

5.3. A_2 je indiskrétny priestor na $\{0, 1\}$, je regulárny, nie je T_2 -priestor.

Veta 5.2. Každý T_3 -priestor je T_2 -priestor.

Dôkaz. X je T_3 -priestor. Nech $a, b \in X$, $a \neq b$. $\{b\}$ uzavretá, $a \notin \{b\} \xrightarrow{X \text{ reg.}} \exists U, V$ otvorená také, že $a \in U$, $\{b\} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. X je T_2 -priestor.

Veta 5.3. Nech X je topologický priestor a pre každé $c \in X$ $\mathcal{B}_c$ je báza okolí bodu c . Potom platí: X je regulárny $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}_c \exists V \in \mathcal{B}_c : \bar{V} \subseteq U$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech $U \in \mathcal{B}_c$. $A = X \setminus U$ je uzavretá množina a $c \notin A$. X je regulárny potom existujú otvorené $\bar{W}, W'$ tak, že $c \in W$, $A \subseteq W'$ a $W \cap W' = \emptyset$. $X \setminus A \supseteq X \setminus W'$. $W \subseteq X \setminus W'$ je uzavretá. Potom $\bar{W} \subseteq X \setminus W' \subseteq X \setminus A = U$. W je okolie $c \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_c$ tak, že $W \supseteq V \Rightarrow \bar{W} \supseteq \bar{V}$. Teda máme $\bar{V} \subseteq \bar{W} \subseteq U$.

$\Leftarrow$: Nech A je uzavretá množina v X . $c \in X \setminus A$. $X \setminus A$ je okolie $c \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}_c$, $c \in U \subseteq X \setminus A$. Existuje $V \in \mathcal{B}_c$, $\bar{V} \subseteq U$. $c \in V$ otvorená. $W = X \setminus \bar{V} \supseteq X \setminus U = A$. $c \in V$, $A \subseteq W$ $V \cap W = \emptyset$.

Príklady.

5.4. $P_1 = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ je T_2 -priestor a nie je regulárny (ani T_3). $\mathcal{O}_1(c, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], y > 0 \text{ a } (x - c)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(c, 0)\}$ uzavretá menšieho okolia $\mathcal{O}_2$ nebude $\subseteq \mathcal{O}_1$, lebo bude obsahovať aj body typu $(c \pm \varepsilon, 0)$.

5.5. $P_4; ([0, \infty), \tau)$ $\mathcal{B}_a = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty); \varepsilon > 0\}$ pre $a > 0$. $\mathcal{B}_0 = \{[0, \varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}; \varepsilon > 0\}$. $[0, \delta) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = [0, \delta)$. $0 \notin A$. P_4 je T_2 -priestor a nie je regulárny.

Veta 5.4. Nech X je priestor a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie priestoru X . Potom X je úplne regulárny $\Leftrightarrow \forall c \in X \forall U \in \mathcal{S}$ také, že $c \in U$ existuje spojité zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$ také, že $f(c) = 1$ a $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: $X \setminus U$ uzavretá. $c \notin X \setminus U \Rightarrow$ existuje $f : X \rightarrow [0, 1]$ spojité, $f(c) = 1$, $f[X \setminus U] = \{0\}$.

$\Leftarrow$: Nech A je uzavretá v X a $c \in X \setminus A$ otvorená. Potom existujú $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}$ také, že $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq X \setminus A$. $A \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus U_i)$. $\forall i : c \in U_i \in \mathcal{S}$ potom existujú spojité zobrazenia $f_i : X \rightarrow [0, 1]$, $f_i(c) = 1$ a $f_i[X \setminus U_i] \subseteq \{0\}$. Nech $f : X \rightarrow [0, 1]$; $\forall x \in X : f(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ spojité. $f(c) = \min\{f_1(c), \dots, f_k(c)\} = 1$. Nech $a \in A$. Potom $\exists i : a \in X \setminus U_i \Rightarrow f_i(a) = 0 \Rightarrow f(a) = \min\{\underbrace{f_1(a)}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{f_i(a)}_{=0}, \dots, \underbrace{f_k(a)}_{\geq 0}\} = 0$. tj. $f[A] \subseteq \{0\}$.

$g : X \rightarrow [0, 1]^k$; $g(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ spojité. $p_i \circ g = f_i$.

$h : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]$ spojité $h(x_1, \dots, x_k) = \min\{x_1, \dots, x_k\}$ $f = h \circ g$

$h_{-1}[a, 1] = [a, 1]^k$, $h_{-1}[0, b) = [0, b) \times [0, 1]^{k-1} \cup [0, 1] \times [0, 1] \cup [0, 1]^{k-2} \cup \dots \cup [0, 1]^{k-1} \times [0, b)$.

Veta 5.5.

- (1) Každý podpriestor regulárneho (resp. T_3 -, úplne regulárneho; $T_{3\frac{1}{2}}$ -) priestoru je regulárny (resp. T_3 -, úplne regulárny, $T_{3\frac{1}{2}}$ -) priestor.
- (2) Ak $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém regulárnych (resp. T_3 -, úplne regulárnych, $T_{3\frac{1}{2}}$ -) priestorov, tak $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je regulárny (resp. T_3 -, úplne regulárny, $T_{3\frac{1}{2}}$ -) priestor.

Dôkaz.

- (1) Nech X je regulárny a Y je podpriestor X . Nech $a \in Y$, B je uzavretá podmnožina Y a $a \notin B$. Potom existuje uzavretá podmnožina B' priestoru X taká, že $B' \cap Y = B$. $a \in Y$, $a \notin B \Rightarrow a \notin B'$. X je regulárna potom existujú otvorené $U, V \in X$ také, že $a \in U$, $B' \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$, U', V' sú otvorené v Y , $a \in U'$, $B \subseteq V'$ a $U' \cap V' = \emptyset$.
- (2) Nech $\forall \alpha \in I$ X_α je regulárny. Nech $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Nech $x \in X$. $\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{P}(x), x \in V \text{ a } V \text{ je prvok štandardnej bázy súčinovej topológie}\}$. Nech $V \in \mathcal{B}_x$, potom existujú $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$ a $\forall i = 1, \dots, k$, U_i je otvorená v X_{α_i} , $V = \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(U_i)$. $x \in V \Rightarrow \forall i = 1, \dots, k : p_{\alpha_i}(x) \in U_i$. Systém všetkých okolí $\eta_{p_{\alpha_i}}(x)$ v X_{α_i} je báza okolí. X_{α_i} regulárna. $U_i \in \eta_{p_{\alpha_i}}(x) \Rightarrow$ existuje $V_i \in \eta_{p_{\alpha_i}}(x)$ také, že $\bar{V}_i \subseteq U_i$. $U = \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(V_i) \in \mathcal{B}_x$; $x \in U \Rightarrow x \in \mathcal{B}_x$. $U = \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(\bar{V}_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(U_i) = V \Rightarrow \bar{U} \subseteq \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})^{-1}(\bar{V}_i) \subseteq V$.

Dôsledok Vety 5.3. X je regulárny $\Leftrightarrow \forall c \in X \forall U \in \eta(x) \exists V \in \eta(x) : \bar{V} \subseteq U$.*Dôkaz.* Nech $\forall \alpha \in I$ X_α je úplne regulárny. $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Nech $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie.

Nech $V \in \mathcal{S}$, $x \in V$ v X . $\exists \alpha_0 \in I \exists U \in X_{\alpha_0}$ otvorená: $V = (p_{\alpha_0})^{-1}(U)$. $x \in V \Rightarrow p_{\alpha_0}(x) \in U$. Pretože X_{α_0} je úplne regulárny existuje spojitý zobrazenie $f_{\alpha_0} : X_{\alpha_0} \rightarrow [0, 1]$; $f_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}(x)) = 1$, $f_{\alpha_0}[X_{\alpha_0} \setminus U] \subseteq \{0\}$. Nech $f = f_{\alpha_0} \circ p_{\alpha_0} : X \rightarrow [0, 1]$ je spojitý. $f(x) = (f_{\alpha_0} \circ p_{\alpha_0})(x) = 1$. $\forall y \in X \setminus V$ $p_{\alpha_0}(y) \in X_{\alpha_0} \setminus U \Rightarrow f_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}(y)) = 0 = f(y) \Rightarrow f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$. Teda X je úplne regulárny.

Veta 5.6. (o reprezentácii $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestorov)

Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor $\Leftrightarrow$ existuje A tak, že X je homeomorfný s niektorým podpriestorom priestoru $[0, 1]^A$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. $A = C(X, [0, 1])$ množina všetkých spojitých zobrazení $f : X \rightarrow [0, 1]$. $\forall f : p_f(h(x)) = f(x)$. Chceme ukázať, že X je homeomorfný s $h[X]$. $\forall f \in C(X, [0, 1]) : p_f \circ h = f$ je spojitý $\Rightarrow h$ je spojitý. Nech $x, x' \in X$, $x \neq x'$. $\{x'\}$ je uzavretá. $x \notin \{x'\} \Rightarrow \exists f : X \rightarrow [0, 1]$ spojitý také, že $f(x) = 1$, $f(x') = 0$. $p_f(h(x)) = f(x) \neq f(x') = p_f(h(x')) \Rightarrow h(x) \neq h(x') \Rightarrow h$ je spojitý.

Nech A je uzavretá v X . Chceme ukázať, že $h[A]$ je uzavretá v $h[X]$. Nech $y \in h[X] \setminus h[A]$. Potom $\exists x \in X : h(x) = y \Rightarrow x \notin A$. X je úplne regulárny, potom existuje spojitý $f : X \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 1$ a $f[A] \subseteq \{0\}$. $f = p_f \circ h$. $f(A) = p_f(h(A)) \subseteq \{0\}$; $f(x) = p_f(h(x)) = p_f(y) = 1$. $U = (p_f)^{-1}(0, 1]$ je otvorená v $C(X, [0, 1])$. $h[A] \cap U = \emptyset$, $y \in U$. $U' = U \cap h(x)$ otvorená v $h[X]$. $y \in U'$, $U' \cap h[A] = \emptyset$. Teda $h[A]$ je uzavretá v $h[X]$ a $h : X \rightarrow h[X]$ je homeomorfizmus.

$\Leftarrow$: Nech X je homeomorfný nejakému podpriestoru X' priestoru $[0, 1]^A$. Priestor $[0, 1]$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. $[0, 1]^A$ je tiež $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor $\Rightarrow X'$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor potom X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Poznámka. Ak X je T_4 -priestor, tak X je T_3 -priestor.

Príklady.

5.6. Príklad na $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor, ktorý nie je normálny a teda ani T_4 -priestor.

$P_6 = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ $\{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ báza τ_z .

$\{(a, b] \times (c, d], a, b, c, d \in \mathbb{R}; a < b < c < d\}$ je báza topológie v $(\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$.

$D := \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $V := (-b-1, -b] \times (b-1, b]$ je otvorená v P_6 . $V \cap D = \{(-b, b)\}$ je otvorená v D . D je diskretný aj uzavretý v P_6 . P_6 je separabilný. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ je hustá v P_6 . $((a, b] \times (c, d]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Nech P_6 je normálny. $\forall A \subseteq D$ A je uzavretá v $D \Rightarrow A$ je uzavretá v P_6 . Nech teda $A \subseteq D$ je ľubovoľná. Potom $A, D \setminus A$ sú uzavreté v D a teda aj v P_6 a $A \cap (D \setminus A) = \emptyset$. Potom existujú otvorené U_A, V_A v P_6 : $U_A \supseteq A$, $V_A \supseteq D \setminus A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$. $\text{card } \mathcal{P}(D) = 2^{\mathcal{C}}$ (kardinalita potenčnej množiny D).

Pre $\forall A \in \mathcal{P}(D)$ vyberieme U_A a položíme $U'_A = U_A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. $\mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$; $A \mapsto U'_A$. Nech $A, A' \in \mathcal{P}(D)$, $A \neq A'$. Potom $A \setminus A' \neq \emptyset \vee A' \setminus A \neq \emptyset$. Nech $A \setminus A' \neq \emptyset$. Chceme ukázať, že $U'_A \neq U'_{A'}$. Nech $c \in A \setminus A'$. $U'_A = U_A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $U'_{A'} = U_{A'} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. $\exists V_A : A \subseteq U_A$, $D \setminus A \subseteq V_A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$, U_A, V_A sú otvorené. $\exists V_{A'} : A' \subseteq U_{A'}$, $D \setminus A' \subseteq V_{A'}$, $U_{A'} \cap V_{A'} = \emptyset$, $U_{A'}, V_{A'}$ sú otvorené.

$c \in A$, $c \in D \setminus A' \Rightarrow c \in U_A \cap V_{A'} \neq \emptyset \Rightarrow W := (U_A \cap V_{A'}) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \emptyset$, $W \subseteq U'_A$. $W \cap U_{A'} = \emptyset \Rightarrow W \cap U'_{A'} = \emptyset \Rightarrow U'_A \neq U'_{A'}$. $\text{card } \mathcal{P}(D) = 2^{\mathcal{C}}$, $\text{card}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathcal{C}$ spor, lebo neplatí: $2^{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}$.

Teda P_6 nie je normálny. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor $\Rightarrow P_6 = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Veta 5.7. Ak X je regulárny a má spočítateľnú bázu, tak X je normálny.

Dôkaz. Nech A, B sú uzavreté v X , $A \cap B = \emptyset$. Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza X . $\forall x \in A$; $x \notin B$ tj. $x \in X \setminus B$ otvorená tj. $X \setminus B \in \eta(x)$. X je regulárna $\Rightarrow \exists U'_x \in \eta(x)$ tak, že $\bar{U}_x \subseteq X \setminus B$ tj. $\bar{U}_x \cap B = \emptyset$. U_x je otvorená, $x \in U_x \Rightarrow \exists V_x \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_x \subseteq U_x$. Potom $\bar{V}_x \subseteq \bar{U}_x \Rightarrow \bar{V}_x \cap B = \emptyset$. $\mathcal{S}_A = \{V_x, x \in A\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{S}_A = \{V_n\}_{n=1}^\infty$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcup_{x \in A} V_x \supseteq A$, $\forall n \in \mathbb{N} : \bar{V}_n \cap B = \emptyset$.

Podobne dostaneme $\mathcal{S}_B = \{W_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \supseteq B$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \bar{W}_n \cap A = \emptyset$. $\forall n \in \mathbb{N} :$

$\tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{p \leq n} \bar{W}_p$ otvorená. $\tilde{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{V}_n \supseteq A$. $\tilde{W}_m = W_m \setminus \bigcup_{p \leq m} \bar{V}_p$ otvorená $\tilde{W} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{W}_m \supseteq B$.

Zoberme ľubovoľné $\tilde{V}_n, \tilde{W}_m$. Ukážeme, že sú disjunktné.

- 1.) $m \leq n$: $\tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$, hneď vidno: $\tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$, $\tilde{W}_m \subseteq W_m \subseteq \bar{W}_m \Rightarrow \tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$.
- 2.) $n \leq m$: $\tilde{W}_m \cap \tilde{V}_n = \emptyset$, $\tilde{V}_n \subseteq V_n \subseteq \bar{V}_n \Rightarrow \tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$.

Príklad.

5.7. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je normálny priestor.

Veta 5.8. X je normálny $\Rightarrow$ pre každú uzavretú množinu A a každú otvorenú množinu $U \supseteq A$ existuje otvorená množina V tak, že $A \subseteq V$, $\bar{V} \subseteq U$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: A uzavretá, U otvorená. $A \subseteq U$. $A, X \setminus U$ sú otvorené, $A \cap X \setminus U = \emptyset$, teda existujú otvorené V, W tak, že $A \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$, $V \cap W = \emptyset$. $X \setminus U \subseteq W \Rightarrow U \supseteq X \setminus W$ uzavretá. $V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subseteq X \setminus W$ uzavretá $\Rightarrow \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

$\Leftarrow$: podobne.

Veta 5.9. Urysohnova Lema

X je normálny $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné uzavreté množiny A, B v X , $A \cap B = \emptyset$ existuje spojité zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$, $f[A] \subseteq \{0\}$, $f[B] \subseteq \{1\}$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech X je normálny, A, B sú uzavreté v X a $A \cap B = \emptyset$. Nech $[0, 1]_{\mathbb{Q}} := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Utvoríme systém $\bar{V}_r$, $r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- (1) $\forall r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ je V_r otvorená.
- (2) Ak $r < r'$, tak $\bar{V}_r \subseteq V_{r'}$.
- (3) $A \subseteq V_0$, $B \subseteq X \setminus V_1$.

$[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ môžeme zoradiť do postupnosti $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, kde $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.

Indukciou:

1°: $k = 2$: $V_1 = X \setminus B$ otvorená. $A \subseteq V_1 \stackrel{5.8}{\Rightarrow} \exists U$ otvorená: $A \subseteq U$, $\bar{U} \subseteq V_1$. $V_0 = U$, $V_0 = V_{r_1}$, $V_1 = V_{r_2}$ otvorené. $r_1 < r_2 \Rightarrow \bar{V}_{r_1} \subseteq V_{r_2}$, $A \subseteq V_{r_1}$, $B \subseteq X \setminus V_{r_2}$. $\bar{V}_{r_1} \subseteq V_{r_2} \Rightarrow \exists U$ otvorená $\bar{V}_{r_1} \subseteq U$, $\bar{U} \subseteq V_{r_2}$. $V_{r_3} = U$. $V_{r_1}, V_{r_2}, V_{r_3}$. $\bar{V}_{r_3} \subseteq V_{r_2}$. $r_1 < r_3 \Rightarrow \bar{V}_{r_1} \subseteq V_{r_3}$.

2° Indukčný krok: Nech $k \geq 2$ a existuje už systém $V_{r_1}, \dots, V_{r_k}$ taký, že

- (1_k) $\forall i \leq k$: V_{r_i} je otvorená.
- (2_k) $\forall i, j \leq k$: Ak $r_i < r_j$ tak $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$.
- (3_k) $A \subseteq V_{r_1}$, $B \subseteq X \setminus V_{r_k}$.

r_{k+1} : Nech $l, m \leq k$ sú také, že r_l je najväčšie z r_i , $i \leq k$ také, že $r_l \leq r_{k+1}$ a r_m je najmenšie z r_i , $i \leq k$ také, že $r_{k+1} < r_m$. Potom existuje otvorená W tak, že $\bar{V}_{r_l} \subseteq W$, $\bar{W} \subseteq V_{r_m}$, $V_{r_{k+1}} = W$. Máme systém $V_{r_1}, \dots, V_{r_{k+1}}$ taký, že:

- (1_{k+1}) $\forall i \leq k+1 : V_{r_i}$ je otvorená.
- (2_{k+1}) $\forall i, j \leq k+1$: ak $r_i < r_j$, tak $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$. Lebo: ak $i \neq k+1 \neq j$ tak OK. Nech $j = k+1$, $i < k+1$, $r_i < r_{k+1}$. Potom $r_i \leq r_l \Rightarrow \bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_l} \subseteq \bar{V}_{r_l} \subseteq V_{r_{k+1}}$. Teraz nech $i = k+1$, $j \leq k$, $r_{k+1} < r_j$. Potom $r_m \leq r_j$. $\bar{V}_{r_{k+1}} \subseteq V_{r_m} \subseteq V_{r_j}$.
- (3_{k+1}) $A \subseteq V_{r_i}$, $B \subseteq X \setminus V_{r_j}$.

Indukciou dostaneme $V_{r_1}, \dots, V_{r_k}, \dots$ tj. $(V_r, r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}})$ ktorý spĺňa:

- (1) $\forall r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}} : V_r$ je otvorená.
- (2) Ak $r < r'$ tak $\bar{V}_r \subseteq V_{r'}$. Pretože $r = r_i$, $r' = r_j$. $i \leq j$ potom pre $V_{r_1}, \dots, V_{r_j}$ použijeme (2_j) $r_i < r_j \Rightarrow \bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$.
- (3) $A \subseteq V_{r_1} = V_0$, $B \subseteq X \setminus V_{r_2} = V_1$.

Teraz definujeme zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$ takto: $f(x) = \inf\{r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}; x \in V_r\}$; $x \in V_1$ a $f(x) = 1$ pre $x \in X \setminus V_1$. $f[B] \subseteq \{1\}$ platí. $\forall x \in A : x \in V_0 \Rightarrow f(x) = \inf\{r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}; x \in V_r\} = 0$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

f je spojitý: $\mathcal{S} = \{[0, a); a \in (0, 1)\} \cup \{(b, 1]; b \in (0, 1)\}$ je subbáza $[0, 1]$. Zoberme $x \in f_{-1}([0, a)) \Leftrightarrow f(x) < a \Leftrightarrow \exists r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}, r < a : x \in V_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{r < a \\ r \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}}} V_r$ otvorená. $x \in f_{-1}((b, 1]) \Leftrightarrow b < f(x) \Rightarrow \exists r' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}} :$

$b < r' < r < f(x) \Rightarrow \exists r, r' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}} : b < r' < r : \bar{V}_{r'} \subseteq V_r, x \notin V_r \Rightarrow \exists r' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}} : b < r' x \in X \setminus \bar{V}_{r'} \Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{r' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}} \\ b < r'}} (X \setminus \bar{V}_{r'})$. Ukázali sme, že $f_{-1}((b, 1]) = \bigcup_{b < r'} (X \setminus \bar{V}_{r'})$ otvorená.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech A, B sú uzavreté v X , $A \cap B = \emptyset$. Potom existuje spojitý zobrazenie $f : X \rightarrow [0, 1]$; $f[A] \subseteq \{0\}$, $f[B] \subseteq \{1\}$. Potom $U = f_{-1}([0, \frac{1}{3}])$, $V = f_{-1}([\frac{2}{3}, 1])$. $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, U, V otvorené $U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ je normálny.

Dôsledok. Každý T_4 -priestor je T_3 -priestor.

Príklad.

5.8. Ak (X, d) je metrický priestor, tak (X, τ_d) je normálny. Nech A, B sú uzavreté v (X, τ_d) , $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$. $f : (X, \tau_d) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$. $f(x)$ je spojitá.

5.9. $Y = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor, ale nie je normálny. $Y \cong Y' \subseteq [0, 1]^A$ kompaktný T_2 -priestor, teda je normálny. Y' nie je normálny. Teda Y' je nenormálny podpriestor normálneho priestoru. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ je normálny, ale $(\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je normálny.

Veta 5.10. (Tietzeho Veta)

Ak X je normálny, A je uzavretý podpriestor priestoru X a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý zobrazenie, tak existuje spojitý zobrazenie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $\forall x \in A : g(x) = f(x)$.

VI. KOMPAKTNÉ PRIESTORY

Definícia 6.1.

- (1) Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva *pokrytie* priestoru X (resp. podmnožiny A priestoru X) ak $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ (resp. $A \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$). Ak všetky prvky $\mathcal{S}$ sú otvorené množiny v X , tak $\mathcal{U}$ sa nazýva *otvorené pokrytie*.
- (2) Priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X existuje konečné podpokrytie $\mathcal{U}'$ priestoru X tak, že $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}'$.
- (3) Podmnožina A priestoru X sa nazýva *kompaktná*, ak podpriestor priestoru X určený A je kompaktný priestor.

Príklady.

6.1. Každý konečný priestor je kompaktný.

6.2. Každý indiskrétne priestor je kompaktný.

6.3. Nech X je množina a τ je kofinitná topológia na X . $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X); X \setminus U \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$. (X, τ) je kompaktný T_1 -priestor. Dôkaz: $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (X, τ) . $U \in \mathcal{U}$, $U \neq \emptyset$, $X \setminus U = \{x_1, \dots, x_k\}$ existujú $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$: $x_1 \in U_1, \dots, x_k \in U_k$. $\mathcal{U}' = \{U, U_1, \dots, U_k\}$ je konečné pokrytie X , $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

6.4. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je kompaktný T_2 -priestor. Dôkaz: $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie $[a, b]$. $K := \{c \in [a, b]; \text{ existuje konečné pokrytie } \mathcal{U}' \text{ intervalu } [a, c], \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'\}$. $K \neq \emptyset$, lebo $a \in K$. Nech $d := \sup K$. Existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $d \in U$. Ak $d = a$, tak $d \in K$. Nech $d > a$. $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $(d - \varepsilon, d + \varepsilon) \cap [a, b] \subseteq U$. $d - \varepsilon < d \Rightarrow \exists c \in K : c > d - \varepsilon$, $(c \leq d)$. $[c, d] \subseteq (d - \varepsilon, d] \subseteq U$, $c \in K \Rightarrow \exists U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}; [a, c] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k$. Potom $[c, d] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U$. Teda $d \in K$. Nech $d < b$, $U \in \mathcal{U}$, $d \in U$. $[d, d + \varepsilon) \subseteq U$. Nech $c' \in (d, d + \varepsilon)$. $[d, c'] \subseteq U$, $[a, c'] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U \Rightarrow c' \in K$, $c' > d \dots$ spor. Teda $d = b \in K$.

Veta 6.1. Nech X je priestor a A je podmnožina X . Potom A je kompaktná $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{U}$ množiny A otvorenými množinami v X existuje konečné pokrytie $\mathcal{S}'$ množiny A tak, že $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{U}$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $\mathcal{V}$ je systém otvorených množín v X taký, že $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq A$. Potom $\mathcal{U} = \{V \cap A, V \in \mathcal{V}\}$

otvorené pokrytie podpriestoru A . A je kompaktný priestor $\Rightarrow \exists V_1 \cap A, \dots, V_k \cap A$ tak $\bigcup_{i=1}^k (V_i \cap A) = A$.

Potom $\bigcup_{i=1}^k V_i \supseteq A$ tj. $\{V_1, \dots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$ je konečné pokrytie A .

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie priestoru A . Pre každé $V \in \mathcal{V}$ vyberme otvorenú množinu U_V v priestore X ; $U_V \cap A = V$. Potom $\mathcal{U} = \{U_V, V \in \mathcal{V}\}$ je systém otvorených množín v X , pre ktorý $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} U_V \supseteq A$. Potom existujú $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^k U_{V_i} \supseteq A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k U_{V_i} = A$. ($U_{V_i} \cap A = V_i$). $\{V_1, \dots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$. Teda A je kompaktný.

Definícia 6.2. Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva *centrovaný*, ak pre ľubovoľný konečný neprázdny systém $\{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathcal{S}$ platí $\bigcap_{i=1}^k A_i \neq \emptyset$.

Príklady.

6.6. $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 0 \in A\}$ je centrovaný.

6.7. $\mathcal{S} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus U \text{ je konečná}\}$ je centrovaný. Dôkaz: $U_1, \dots, U_k; \bigcap_{i=1}^k U_i \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^k U_i \neq \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^k U_i = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{R} \setminus U_i)$ je konečná.

Veta 6.2. Ak X je topologický priestor, tak nasledujúce výroky sú ekvivalentné:

- (1) X je kompaktný.
- (2) Pre každý centrovaný systém $\mathcal{V}$ uzavretých podmnožín priestoru X : $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \neq \emptyset$.
- (3) Pre každý centrovaný systém $\mathcal{S}$ podmnožín X : $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} \bar{A} \neq \emptyset$.

Dôkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín X taký, že $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \emptyset$. Nech

$\mathcal{U} = \{X \setminus V; V \in \mathcal{V}\}$. $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} (X \setminus V) = X \setminus \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = X \Rightarrow \mathcal{U}$ je otvorené pokrytie X . Nech $U_1, \dots, U_k$ je

ľubovoľný neprázdny konečný systém prvkov z $\mathcal{U}$. Potom existujú $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{V}$ tak, že $U_1 = X \setminus V_1$, $\dots$, $U_k = X \setminus V_k$. $\bigcup_{i=1}^k U_i = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus V_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k V_i \neq X$, lebo $\bigcap_{i=1}^k V_i \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ak $\mathcal{S}$ je centrováný systém, tak aj $\mathcal{S}' = \{\bar{A}; A \in \mathcal{S}\}$ je centrováný systém uzavretých množín $\Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{S}} \bar{A} \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nech X nie je kompaktný. Potom existuje otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X také, že pre ľubovoľný konečný systém $\{U_1, \dots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ platí $\bigcup_{i=1}^k U_i \neq X$. $\mathcal{S} := \{X \setminus U, U \in \mathcal{U}\}$ je to centrováný systém. Nech $\emptyset \neq \{X \setminus U_1, \dots, X \setminus U_k\} \subseteq \mathcal{S}$. $\bigcap_{i=1}^k (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \neq \emptyset$. $\mathcal{S}$ je centrováný

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} \bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{(X \setminus U)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (X \setminus U) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X \setminus X = \emptyset.$$

Veta 6.3. Nech X je priestor, $\mathcal{B}$ je báza topológie X . Potom X je kompaktný $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{S}$ priestoru X také, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ existuje konečné pokrytie $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ priestoru X .

Dôkaz. $\Rightarrow$: zrejme.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie X . Pre každé $x \in X$ vyberme $U_x \in \mathcal{U}$ tak, že $x \in U_x$. Pre každé x vyberme $V_x \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_x \subseteq U_x$. $\mathcal{S} = \{V_x, x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ je pokrytie X tj. $\bigcup_{x \in X} V_x = X$. Existuje $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in X$ tak, že $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k} = X$. $\forall i = 1, \dots, k : V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ a $\bigcup_{i=1}^k U_{x_i} = X$.

$\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\} \subseteq \mathcal{U}$.

Príklad 6.8. $(0, 1) \subseteq [0, 1]$, ale $(0, 1)$ nie je kompaktný. Teda podpriestor kompaktnej množiny nemusí byť kompaktný.

Veta 6.4.

- (1) Každý uzavretý podpriestor A kompaktného priestoru X je kompaktný.
- (2) Každý kompaktný podpriestor A T_2 -priestoru X je uzavretý podpriestor.

Dôkaz.

- (1) Nech $\mathcal{S}$ je centrováný systém uzavretých podmnožín priestoru A . Potom, pretože A je uzavretý, $\mathcal{S}$ je centrováný systém uzavretých podmnožín v X , X je kompaktný $\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{S}} C \neq \emptyset$. Teda A je kompaktný.
- (2) Nech $c \notin A$. $\forall a \in A$ existujú otvorené množiny U_a, V_a tak, že $a \in U_a$, $c \in V_a$. $\{V_a; a \in A\}$ je otvorené pokrytie A . Existuje $a_1, \dots, a_k \in A$: $V := V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_k} \supseteq A$, $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_k}$ otvorená, $c \in U$, $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq V \Rightarrow U \cap A = \emptyset$. $X \setminus A$ je otvorená $\Rightarrow A$ je uzavretá.

Dôsledok. Ak X je kompaktný T_2 -priestor a $A \subseteq X$, tak A je kompaktná $\Leftrightarrow A$ je uzavretá.

Príklad 6.9. Nech (X, τ_X) je ľubovoľný topologický priestor. Nech $c \notin X$. $Y = X \cup \{c\}$, $\tau_Y = \tau_X \cup \{Y\}$. Potom (Y, τ_Y) je topológia, je to kompaktný priestor. Ak $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (Y, τ_Y) , tak existuje $U \in \mathcal{U}$: $c \in U \Rightarrow U = Y \Rightarrow \{Y\} \subseteq \mathcal{U}$. (X, τ_X) je otvorený podpriestor (Y, τ_Y) . Ak (X, τ_X) je T_0 -priestor, tak aj (Y, τ_Y) je T_0 -priestor. Ak $X \neq \emptyset$, tak (Y, τ_Y) nie je T_1 -priestor.

Veta 6.5. Nech X je T_2 -priestor a A, B sú kompaktné podmnožiny v X , $A \cap B = \emptyset$. Potom existujú otvorené množiny $U, V \in X$ tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Dôkaz.

a) Nech $a \in A$. Potom $\forall b \in B$, $a \neq b$ a teda existujú otvorené množiny U_b, V_b tak, že $a \in U_b$, $b \in V_b$ a $U_b \cap V_b = \emptyset$. $\mathcal{V} = \{V_b, b \in B\}$ je otvorené pokrytie B – kompaktná, preto existuje $b_1, \dots, b_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$ tak, že $B \subseteq V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_k} = V$ je otvorená. $U_{b_1}, \dots, U_{b_k}$, $\forall i : a \in U_{b_i}$, $U = \bigcap_{i=1}^k U_{b_i}$ otvorená množina. $\forall i = 1, \dots, k : U \cap V_{b_i} = \emptyset$, $(U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset)$. Potom $U \cap V = \emptyset$. $a \in U$, $b \in V$.

b) Podľa **a)** pre každé $a \in A$ existujú otvorené množiny W_a, S_a tak, že $a \in W_a$, $B \subseteq S_a$, $W_a \cap S_a = \emptyset$. $\mathcal{W} = \{W_a, a \in A\}$ je otvorené pokrytie A – kompaktná $\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in A$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m W_{a_i} = W$

otvorená. $\forall i : B \subseteq S_{a_i} \Rightarrow B \subseteq \bigcap_{i=1}^m S_{a_i} = S$ otvorená; $\forall i : S \cap W_{a_i} \subseteq S_{a_i} \cap W_{a_i} = \emptyset \Rightarrow S \cap W = \emptyset, A \subseteq W, B \subseteq S$.

Veta 6.6. Ak X je kompaktný T_2 -priestor, tak X je normálny (a aj T_4 -priestor).

Dôkaz. Ak A, B sú uzavreté v X , $A \cap B = \emptyset$, tak A, B sú kompaktné v X . Ďalej použijeme vetu 6.5.

Dôsledok. Ak X je kompaktný T_2 -priestor, tak X a aj každý jeho podpriestor je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor (a teda aj T_3 -priestor).

Veta 6.7. Nech $f : X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie. Potom platí:

- (1) Ak A je kompaktná podmnožina X , tak $f[A]$ je kompaktná podmnožina Y . (Špeciálne: Ak X je kompaktný, tak $f[X]$ je kompaktný v Y .)
- (2) Ak X je kompaktný a Y je T_2 -priestor, tak f je uzavreté zobrazenie. Ak navyše f je surjektívne, tak f je aj faktorové zobrazenie.
- (3) Ak X je kompaktný a Y je T_2 -priestor a f je bijektívne, tak f je homeomorfizmus.
- (4) Ak $Y = \mathbb{R}$ a $X \neq \emptyset$ je kompaktný, tak existujú $a, b \in X$ tak, že $\forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Dôkaz.

- (1) Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie $f[A]$, tj. $f[A] \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Potom $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V), V \in \mathcal{V}\}$ je otvorené pokrytie A v X . Teda $\exists V_1, \dots, V_k \in \mathcal{V}, A \subseteq \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(V_i) \Rightarrow f[A] \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_i$. $\{V_1, \dots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$. $f[A]$ je kompaktná.
- (2) Nech A je uzavretá v X . Potom A je kompaktná v X a teda $f[A]$ je kompaktná v Y . Y je T_2 -priestor, potom $f[A]$ je uzavretá v Y .
- (3) Stačí ukázať, že f^{-1} je spojité. Nech A je uzavretá v X . Potom $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ je uzavretá v Y a teda f je spojité.
- (4) $f[X] \neq \emptyset$ je kompaktná v $\mathbb{R}$. Potom $f[X]$ je ohraničená v $\mathbb{R}$. Nech $c := \inf f[X], d := \sup f[X]$. $f[X]$ je kompaktná $\Rightarrow f[X]$ je uzavretá $\Rightarrow c, d \in f[X]$. Existujú $a, b \in X$ tak, že $f(a) = c, f(b) = d$ a $\forall x \in X : f(a) = c \leq f(x) \leq d = f(b)$.

Definícia 6.3. Priestor X sa nazýva *lokálne kompaktný*, ak pre každé $a \in X$ existuje okolie U bodu a také, že $\bar{U}$ je kompaktná množina v X .

Príklady.

6.10. Každý kompaktný priestor je lokálne kompaktný.

6.11. Každý diskretný priestor je lokálne kompaktný.

6.12. $\mathbb{R}$ s obyčajnou topológiou je lokálne kompaktný.

6.13. $\mathbb{Q}$ ako podpriestor $\mathbb{R}$ je topologický priestor, ktorý nie je lokálne kompaktný. *Dôkaz:* Nech U je okolie bodu 0 v $\mathbb{Q}$ také, že $\bar{U}$ je kompaktný v $\mathbb{Q}$. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(-\varepsilon, \varepsilon)_Q = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. $(-\varepsilon, \varepsilon)_Q \subseteq U$. Nech $\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 0 < \delta < \varepsilon$. Potom $(-\delta, \delta)_Q \subseteq U$. Potom $\overline{(-\delta, \delta)_Q} \subseteq \bar{U}$ a teda $\overline{(-\delta, \delta)_Q}$ je kompaktná. $\overline{(-\delta, \delta)_Q}^Q = \overline{(-\delta, \delta)_Q}^R = [-\delta, \delta] \cap \mathbb{Q} = (-\delta, \delta)_Q$. Potom $(-\delta, \delta)_Q$ je kompaktná v $\mathbb{Q}$. Nech $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť kladných racionálnych čísel taká, že $r_n \rightarrow \delta$ v $\mathbb{R}$. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-r_n, r_n) = (-\delta, \delta)$. Potom

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-r_n, r_n)_Q = (-\delta, \delta)_Q$. Systém $\{(-r_n, r_n)_Q, n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie $\mathbb{Q}$, ale nedá sa z neho vybrať konečné podpokrytie. Keby áno: $(-r_{k_1}, r_{k_1}), \dots, (-r_{k_m}, r_{k_m})$. $r_{k_j} := \max\{r_{k_1}, \dots, r_{k_m}\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m (-r_{k_i}, r_{k_i}) = (-r_{k_j}, r_{k_j}) \subsetneq (-\delta, \delta)_Q$. Teda $(-\delta, \delta)_Q$ nie je kompaktný. Spor.

Veta 6.8.

- (1) Ak X je lokálne kompaktný T_2 -priestor, tak pre každé $a \in X$ a každé okolie U bodu a existuje okolie V bodu a také, že $\bar{V}$ je kompaktná množina a $\bar{V} \subseteq U$.
- (2) Ak X je regulárny lokálne kompaktný priestor, tak pre každé $a \in X$ a každé okolie U bodu a existuje okolie V bodu a také, že $\bar{V}$ je kompaktná množina a $\bar{V} \subseteq U$.

Dôkaz.

- (1) Nech $a \in X$ a U je okolie a v X . Existuje okolie W bodu a také, že $\bar{W}$ je kompaktná množina. Potom $U \cap W =: U'$ je okolie bodu a v X a aj v podpriestore $\bar{W}$. $\bar{W}$ je kompaktný $\Rightarrow \bar{W}$ je regulárny priestor. Potom existuje okolie V bodu a vo $\bar{W}$ tak, že $\bar{V} \subseteq U'$. V je okolie a aj v podpriestore U' priestoru $\bar{W}$. ($V \cap U' = V$). Teda V je otvorená v U' ; U' je otvorená v X , potom V je otvorená aj v X a teda V je okolie a v X . $V \subseteq \bar{W}$ uzavretá v X . Potom $\bar{V}^X = \bar{V}^{\bar{W}}$ resp. ($\bar{V}^X \subseteq \bar{W}^X$). $\bar{V}$ je uzavretý podpriestor $\bar{W}$. Potom $\bar{V}$ je kompaktná množina v X , $\bar{V} \subseteq U' \subseteq U$. V je okolie a v X , $\bar{V}$ je kompaktná, $\bar{V} \subseteq U$.

Veta 6.9. Alexandrovova kompaktifikácia

Nech (X, τ_X) je lokálne kompaktný T_2 -priestor, $c \notin X$. Nech $Y = X \cup \{c\}$ a $\tau_Y = \tau_X \cup \{V \in \mathcal{P}(Y) : c \in V, X \setminus V \text{ je kompaktná množina v } (X, \tau_X)\}$. Potom (Y, τ_Y) je kompaktný T_2 -priestor, (X, τ_X) otvorený podpriestor (Y, τ_Y) a ak (X, τ_X) nie je kompaktný, tak $\bar{X} = Y$ v (Y, τ_Y) .

Dôkaz. Ak $V \in \tau_Y$, tak $V \cap X \in \tau_X$. $V \in \tau_Y \Rightarrow V \in \tau_X$ alebo $c \in V$ a $X \setminus V$ je kompaktný v (X, τ_X) . Potom $V \cap X = V \in \tau_X$ alebo $c \in V$, $X \setminus V = X \setminus (V \cap X)$ je kompaktná a teda uzavretá v (X, τ_X) . Potom $V \cap X \in \tau_X$. Treba ukázať, že τ_Y je topológia na Y :

$\emptyset, Y \in \tau_Y$. Nech $U, V \in \tau_Y$. Ak $U, V \in \tau_X \Rightarrow U \cap V \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Nech $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y \setminus \tau_X$. Potom $V \cap X \in \tau_X$ a aj $U \cap V = U \cap (V \cap X) \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Podobne ak $U \in \tau_Y \setminus \tau_X$, $V \in \tau_X$.

Nech $U, V \in \tau_Y \setminus \tau_X$. Potom $c \in U \cap V$. $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, $X \setminus U$ a $X \setminus V$ sú kompaktné v (X, τ_X) a aj ich (konečné) zjednotenie je kompaktné v (X, τ_X) . Teda $U \cap V \in \tau_Y$. Nech $\mathcal{S} \subseteq \tau_Y$. Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau_X$, tak $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Nech $\exists V \in \mathcal{S}$, $c \in V$. Potom $X \setminus V$ je kompaktná v (X, τ_X) .

$W := \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \ni c$. Vieme, že $\forall A \in \mathcal{S} : A \cap X \in \tau_X \Rightarrow X \setminus (A \cap X) = X \setminus A$ je uzavretá v (X, τ_X) .

$X \setminus W = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je uzavretá v (X, τ_X) , $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A) \subseteq X \setminus V$ je kompaktná. $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je uzavretá v $(X \setminus V)$, potom $X \setminus W = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je kompaktná v $(X \setminus V)$, a teda aj v (X, τ_X) . Teda $W \in \tau_Y$.

Teda (Y, τ_Y) je topologický priestor a (X, τ_X) je podpriestor (Y, τ_Y) .

Nech $a, b \in Y$, $a \neq b$. (X, τ_X) je T_2 -priestor, tak existujú $U, V \in \tau_X \subseteq \tau_Y$, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Nech $a \in X$, $b = c$. (X, τ_X) je lokálne kompaktný, existuje okolie U bodu a v (X, τ_X) tak, že $\bar{U}$ je kompaktná v (X, τ_X) . $c \notin \bar{U}$. $V = (X \setminus \bar{U}) \cup \{c\} \in \tau_Y$, lebo $c \in V$ a $X \setminus V = \bar{U}$ je kompaktná v (X, τ_X) ; $U \cap V = \emptyset$. Teda (Y, τ_Y) je T_2 -priestor.

Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (Y, τ_Y) . Potom existuje $U_c \in \mathcal{U}$ tak, že $c \in U_c$. Pre každé $U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}$, $U^X = U \cap X$ je otvorená v (X, τ_X) . $X \setminus U_c$ je kompaktná v (X, τ_X) . $\bigcup_{U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}} U \supseteq X \setminus U_c$, $X \setminus U_c \subseteq X$,

preto $\bigcup_{U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}} U^X \supseteq X \setminus U_c$. $\{U^X : U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}\}$ je otvorené pokrytie $X \setminus U_c$ v (X, τ_X) . Potom existujú

$U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}$. $U_1^X \cup \dots \cup U_k^X \supseteq X \setminus U_c \Rightarrow U_1 \cup \dots \cup U_k \supseteq X \setminus U_c \Rightarrow U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U_c = Y$. Teda (Y, τ_Y) je kompaktný.

Ak (X, τ_X) nie je kompaktný, tak $\{c\} \notin \tau_Y$, teda pre každé okolie V bodu c platí $V \neq \{c\}$ a teda $V \cap X \neq \emptyset$. Teda $c \in \bar{X}$ v (Y, τ_Y) . $\square$

Dôsledok. Každý lokálne kompaktný T_2 -priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Príklad 6.14. $X = (0, 1)$, $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, $Y = f[X]$. Kompaktné množiny v Y sú uzavreté intervaly, ktoré neobsahujú bod $[1, 0]$. Ich komplementy tvoria systém okolí bodu $[1, 0]$.

Veta 6.10.

- (1) Ak A je uzavretý podpriestor lokálne kompaktného priestoru X , tak A je lokálne kompaktný.
 (2) Ak A je otvorený podpriestor lokálne kompaktného T_2 -priestoru X , tak A je lokálne kompaktný.

Dôkaz.

- (1) Nech $c \in A$. $c \in X \Rightarrow$ existuje okolie U v X bodu c tak, že $\bar{U}$ je kompaktný v X . $V = U \cap A$ je okolie c v A . $\bar{V}^A \subseteq \bar{U}$, $\bar{V}^A$ je uzavretá v A , $A \cap \bar{U}$ je uzavretá v $\bar{U}$ a teda aj kompaktná. $\bar{V}^A$ je uzavretá v $A \cap \bar{U}$ je kompaktná, potom $\bar{V}^A$ je kompaktná v A .

- (2) Nech $c \in A$. A je okolie c v X a podľa vety 6.8 existuje okolie V bodu c v X tak, že $\bar{V}$ je kompaktná v X a $\bar{V} \subseteq A$. Potom V je okolie c v A a $\bar{V}^A = \bar{V}$ kompaktná, teda A je lokálne kompaktná.

Centrované systémy, filtre a ultrafiltre.

Definícia 6.4. Nech X je množina.

- (1) Systém $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *centrovaný systém* na X a pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ a $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$ platí $\bigcap_{i=1}^k C_i \neq \emptyset$.
- (2) Systém $\mathcal{H}$ sa nazýva *báza filtra* na X , ak $\mathcal{H} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{H}$ a pre ľubovoľné $U, V \in \mathcal{H}$ existuje $W \in \mathcal{H}$ tak, že $W \subseteq U \cap V$.
- (3) Systém $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *filter* na X , ak
 - 1.) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
 - 2.) Ak $F, F' \in \mathcal{F}$ tak $F \cap F' \in \mathcal{F}$.
 - 3.) Ak $F \in \mathcal{F}$ a $V \in \mathcal{P}(X)$ taká, že $F \subseteq V$, tak $V \in \mathcal{F}$.
- (4) Filter $\mathcal{U}$ na X sa nazýva *ultrafilter* na X , ak pre každý filter $\mathcal{G}$ na X , pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ platí $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. tj. $\mathcal{U}$ je maximálny vzhľadom na $\subseteq$.

Príklady. 6.15. $\mathcal{C} = \{\mathbb{N} \setminus \{n\}; n \in \mathbb{N}\}$ je centrovaný systém na $\mathbb{N}$, ktorý nie je báza filtra.

6.16. $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \{(c - \varepsilon, c + \varepsilon), \varepsilon > 0\}$ je báza filtra a nie je to filter.

6.17. Každá báza okolí bodu v topologickom priestore je báza filtra.

6.18. $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \setminus A \text{ je konečná}\}$, zrejme $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Je to filter, ale nie je to ultrafilter.

6.19. $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \setminus A \text{ je spočítateľná}\}$ je filter na $\mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$, lebo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.

6.20. $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), 0 \in A\}$ je ultrafilter na $\mathbb{R}$.

6.21. $Y \subseteq X$, $\mathcal{F}$ je filter na Y , tak $\mathcal{F}$ je báza filtra na X .

Veta 6.11.

- (1) Ak $\mathcal{C}$ je centrovaný systém, tak $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \{H \in \mathcal{P}(X); \exists k \in \mathbb{N} \exists C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C} : H = \bigcap_{i=1}^k C_i\}$ je báza filtra.
- (2) Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra na X , tak $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{V \in \mathcal{P}(X); \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq V\}$ je filter na X .
- (3) Ak $\mathcal{F}$ je filter a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ taká, že $\forall F \in \mathcal{F} \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq F$, tak $\mathcal{H}$ je báza filtra a $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}$. ($\mathcal{F}$ je generovaný $\mathcal{H}$).

Dôkaz.

- (1) $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$; $\emptyset \notin \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Ak $H, H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, tak $H \cap H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$.
- (2) $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Ak $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ tak $\exists H, H' \in \mathcal{H} : H \subseteq A, H' \subseteq B$. Potom existuje $H'' \in \mathcal{H}$ tak, že $H'' \subseteq H \cap H' \subseteq A \cap B$. Teda $A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Nech $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a $U \in \mathcal{P}(X)$ tak, že $F \subseteq U$. Potom existuje $H \in \mathcal{H}$, $H \subseteq F \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Veta 6.12.

- (1) Ak $\mathcal{C}$ je centrovaný systém na X ; $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, tak $f[\mathcal{C}] = \{f[C]; C \in \mathcal{C}\}$ je centrovaný systém na Y .
- (2) Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra na X a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, tak $f[\mathcal{H}] = \{f[H]; H \in \mathcal{H}\}$ je báza filtra na Y .

Dôkaz.

(2) Ak $H \in \mathcal{H}$, tak $H \neq \emptyset$ a $f[H] \neq \emptyset$, teda $\emptyset \notin f[\mathcal{H}]$. Nech $A, B \in f[\mathcal{H}]$. Potom existujú $C, D \in \mathcal{H} : A = f[C], B = f[D]$. Existuje $F \in \mathcal{H}$, $F \subseteq C \cap D$. Potom $f[F] \subseteq f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D] = A \cap B$; $f[F] \in f[\mathcal{H}]$. Teda $f[\mathcal{H}]$ je báza filtra na Y .

Príklad 6.22. Obraz filtra nemusí byť filter: $\mathcal{F}$ je filter na X ; Y má aspoň dva prvky; $c \in Y$ a $f : X \rightarrow Y$; $f(x) = c$ pre $\forall x \in X$. $f[\mathcal{F}] = \{\{c\}\}$ je báza filtra, ale nie je to filter, lebo $Y \notin f[\mathcal{F}]$.

Veta 6.13. Ak $\mathcal{C}$ je centrováný systém na X , tak existuje centrováný systém $\mathcal{U}$ na X taký, že $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ a pre každý centrováný systém $\mathcal{V}$ na X taký, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ platí $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. (tj. $\mathcal{U}$ je maximálny centrováný systém na X vzhľadom na $\subseteq$. Navyše $\mathcal{U}$ je vždy ultrafilter.)

Dôkaz. Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých centrováných systémov na X , pre ktoré $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $(\mathcal{S}, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Nech $\emptyset \neq R$ je reťazec v $(\mathcal{S}, \subseteq)$. Nech $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{D} \in R} \mathcal{D}$. $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Nech $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}$. $\forall i = 1, \dots, k \exists \mathcal{D}_i \in R : M_i \subseteq \mathcal{D}_i$. Existuje $n \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\forall i = 1, \dots, k : \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}_n$. Potom $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{D}_n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k M_i \neq \emptyset$. Teda $\mathcal{M}$ je centrováný systém na X . $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ (lebo $\forall \mathcal{D} \in R : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$) tj. $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$ a $\forall \mathcal{D} \in R : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$, teda $\mathcal{M}$ je horné ohraňenie R . Podľa Zornovej lemy existuje maximálny prvok $\mathcal{U}$ v $(\mathcal{S}, \subseteq)$.

Zrejme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. Nech $\mathcal{V}$ je centrováný systém na X , pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Pretože $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ a teda $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$ je maximálny v $(\mathcal{S}, \subseteq)$, tak $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ je ultrafilter. $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Nech $A, B \in \mathcal{U}$. Nech $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ je centrováný systém na X ; $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$. Nech $A \in \mathcal{U}$ a $V \in \mathcal{P}(X)$ taká, že $A \subseteq V$. $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{V\}$ je centrováný systém na X . $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V} \Rightarrow V \in \mathcal{U}$. Teda $\mathcal{U}$ je filter na X . Nech $\mathcal{U}'$ je filter na X a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Potom $\mathcal{U}'$ je centrováný systém na X a teda $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Teda $\mathcal{U}$ je ultrafilter. $\square$

Dôsledok. Ak $\mathcal{F}$ je centrováný systém (v. báza filtra, v. filter) na X , tak existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X , pre ktorý $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Veta 6.14. Nech $\mathcal{F}$ je filter na X . Potom platí:

- (1) $\mathcal{F}$ je ultrafilter na $X \Leftrightarrow$ pre každé $U \in \mathcal{P}(X)$, pre ktoré $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$ platí $U \in \mathcal{F}$.
- (2) $\mathcal{F}$ je ultrafilter na $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{F}$ alebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Dôkaz.

- (1) $\Rightarrow$: $U \in \mathcal{P}(X)$, $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$. $\mathcal{V} = \mathcal{F} \cup \{U\}$ je centrováný systém. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Existuje maximálny centrováný systém $\mathcal{W}$ na X , pre ktorý $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ je ultrafilter. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{W}$ a $U \in \mathcal{W} = \mathcal{F}$.
 $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter. Potom $\exists \mathcal{G}$ na X taký, že $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Nech $U \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Zrejme $\forall F \in \mathcal{F} : F \in \mathcal{G}$ potom $F \cap U \in \mathcal{G} \Rightarrow F \cap U \neq \emptyset$. tj. $\exists U \in \mathcal{P}(X)$, $U \notin \mathcal{F}$ a $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$.
- (2) $\Rightarrow$: Nech $A \subseteq X$ taká, že $A \notin \mathcal{F}$. Podľa (1) musí existovať $F \in \mathcal{F} : A \cap F = \emptyset$. Potom $F \subseteq X \setminus A$ a teda $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
 $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter. Potom existuje filter $\mathcal{G}$ na X také, že $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. $\exists A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F} : A \in \mathcal{G} \Rightarrow X \setminus A \notin \mathcal{G} \Rightarrow X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Teda $\exists A \subseteq X$ tak, že $A \notin \mathcal{F}$ a aj $X \setminus A \notin \mathcal{F}$.

Kompaktné priestory (pokračovanie).

Veta 6.15. Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém kompaktných priestorov, tak aj $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je kompaktný priestor.

Dôkaz. $I = \emptyset : \prod_{\alpha \in \emptyset} X_\alpha = \{*\}$ vždy kompaktný. Ak $\exists \alpha \in I : X_\alpha = \emptyset$, tak $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \emptyset$ je kompaktný. Ak $I \neq \emptyset$ a $\forall \alpha \in I X_\alpha \neq \emptyset : X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Nech $\mathcal{C}$ je centrováný systém na X . Chceme dokázať, že $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C} \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X taký, že $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V} \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C}$. Stačí ukázať, že $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V} \neq \emptyset$. Nech $\alpha \in I$. Potom $p_\alpha[\mathcal{U}] = \{p_\alpha[V], V \in \mathcal{U}\}$ je báza filtra a teda aj centrováný systém na X_α . Teda $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \overline{p_\alpha[V]} \neq \emptyset$ (lebo X_α je kompaktný.) $\forall \alpha \in I$ vyberieme $c_\alpha \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \overline{p_\alpha[V]}$ a zoberieme $c \in X$ taký, že $p_\alpha(c) = c_\alpha$. Ukážeme, že $c \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V}$. Nech $V \in \mathcal{U}$ a U je ľubovoľné okolie c v X .

Existujú $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$ a U_1 otvorené v $X_{\alpha_1}, \dots, U_k$ otvorené v X_{α_k} tak, že $c \in \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \subseteq U$.

Pre $\forall i = 1, \dots, k : p_{\alpha_i}(c) = c_{\alpha_i} \in U_i$. $c_{\alpha_i} \in p_{\alpha_i}[V] \Rightarrow U_i \cap p_{\alpha_i}[V] \neq \emptyset$. $(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \cap V \neq \emptyset$. Teda $\forall V \in \mathcal{U} : (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \in \mathcal{U}$. $\forall i = 1, \dots, k : (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \in \mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{U} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset$. Potom $\forall V \in \mathcal{U} : c \in \bar{V}$ a teda $c \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V} \neq \emptyset$. Teda X je kompaktný.

Poznámka. Veta 6.15. sa občas nazýva aj *Tichonovova veta*, ale vo všeobecnosti to dokázal Čech. Opačná implikácia platí za predpokladu neprázdneho systému s neprázdnyimi množinami.

Dôsledok 1. Pre ľubovoľnú množinu A je $[0, 1]^A$ kompaktný T_2 -priestor.

Dôsledok 2. Každá uzavretá ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$ je kompaktná.

Veta 6.16. (o reprezentácii kompaktných $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestorov)

Priestor X je kompaktný T_2 -priestor $\Leftrightarrow$ existuje množina A tak, že X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $[0, 1]^A$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech X je kompaktný T_2 -priestor. Potom X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. Potom existuje A tak, že X je homeomorfný s podpriestorom X' priestoru $[0, 1]^A$. Priestor X' je kompaktný a teda uzavretý v $[0, 1]^A$ (lebo $[0, 1]^A$ je T_2 -priestor.).

$\Leftarrow$: Nech X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $X' = [0, 1]^A$. Pretože $[0, 1]^A$ je kompaktný T_2 -priestor $\Rightarrow X'$ je kompaktný T_2 -priestor $\Rightarrow X$ je kompaktný T_2 -priestor.

Definícia 6.5. Nech X je priestor. Usporiadaná dvojica $(b_X, B(X))$ sa nazýva *kompaktifikácia* priestoru X , ak $B(X)$ je kompaktný T_2 -priestor; $b_X : X \hookrightarrow B(X)$ je vnorenie a $\overline{b_X[X]} \subseteq B(X)$.

Veta 6.17. Pre každý $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor existuje kompaktifikácia $(b_X, B(X))$.

Dôkaz. Ak X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor, tak existuje množina A a vnorenie $j_X : X \hookrightarrow [0, 1]^A$. $B(X) = \overline{j_X[X]}$ je kompaktný podpriestor $[0, 1]^A$. $b_X : X \rightarrow B(X)$, $\forall a \in X$, $b_X(a) = j_X(a)$; $(b_X, B(X))$ je kompaktný v X .

Príklad 6.23. Podpriestor normálneho priestoru nemusí byť normálny:

$X = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor, ale nie je normálny. Existuje kompaktifikácia $(b_X, B(X))$ priestoru X . $b_X(X) = X'$ je podpriestor kompaktného T_2 -priestoru $B(X) \Rightarrow X'$ je T_4 -priestor $\Rightarrow$ je normálny, ale X' nebol normálny.

Príklad 6.24. $\mathbb{N}$ s diskretnou topológiou; $\mathbb{N}^*$ je Alexandrovova kompaktifikácia na $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

$\tau_{\mathbb{N}^*} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{\omega\}) : \omega \in U \text{ a } \mathbb{N} \setminus U \text{ je konečná}\}$.

Príklad 6.25. $\mathbb{R}$ s diskretnou topológiou; $\mathbb{R}^*$ je Alexandrovova kompaktifikácia v $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$\tau_{\mathbb{R}^*} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{\infty\} : \infty \in V \text{ a } \mathbb{R} \setminus V \text{ je konečná}\}$. $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$ sú kompaktné T_2 -priestory a aj $\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$ je kompaktný T_2 -priestor, teda aj T_4 -priestor.

Nech $Y = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*) \setminus \{(\infty, \omega)\}$ je podpriestor otvoreného priestoru $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*)$, ktorý je lokálne kompaktný. $A' := \mathbb{R}^* \times \{\omega\}$ je uzavretá v $X := \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$; $B' := \{\infty\} \times \mathbb{N}^*$ je uzavretá v X . $A' \cap Y = \mathbb{R} \times \{\infty\} = A$ je uzavretá v Y , $B' \cap Y = \{\infty\} \times \mathbb{N} = B$ je uzavretá v Y ; $A \cap B = \emptyset$. Nech U je otvorená v Y a platí $B \subseteq U$. Podpriestor $\mathbb{R}^* \times \{n\}$ v X ($n \in \mathbb{N}$) je homeomorfný s $\mathbb{R}^*$. $\mathbb{R}^* \times \{n\}$ je podpriestor v Y . $U_n = U \cap (\mathbb{R}^* \times \{n\})$ je otvorená v $\mathbb{R}^* \times \{n\} \Rightarrow U_n = W_n \times \{n\}$. $A_n = \mathbb{R} \setminus W_n$ je konečná. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

je spočítateľná $\Rightarrow \emptyset \neq \mathbb{R} \setminus A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n = W$. $\forall n \in \mathbb{N} : W \times \{n\} \subseteq W_n \times \{n\} = U_n$. Teda

$W \times \mathbb{N} \subseteq U$. Nech V je otvorená v Y taká, že $A \subseteq V$. Potom V je otvorená aj v X . Zoberme si $r \in W$. $\{r\} \times \mathbb{N}^*$ je podpriestor Y ; $\{r\} \times \mathbb{N}^* \cong \mathbb{N}^*$. $V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*)$ je otvorená v $\{r\} \times \mathbb{N}^* \Rightarrow V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*) = \{r\} \times V_r$, $\mathbb{N} \setminus V_r$ je konečná $\Rightarrow \emptyset \neq V_r \setminus \{(r, \omega)\}$ tj. $\exists k \in \mathbb{N} : (r, k) \in V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*) \Rightarrow (r, k) \in V$. $r \in W \Rightarrow (r, k) \in W \times \mathbb{N} \subseteq U \Rightarrow V \cap U \neq \emptyset$. Teda Y je normálny.

VII. SÚVISLÉ PRIESTORY A LINEÁRNE SÚVISLÉ PRIESTORY

Definícia 7.1. Priestor X sa nazýva *súvislý*, ak sa nedá vyjadriť ako zjednotenie dvoch neprázdnych otvorených a disjunktných podmnožín. tj. ak $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, U, V sú otvorené $\Rightarrow U = \emptyset$ alebo $V = \emptyset$. Podmnožina A priestoru X sa nazýva *súvislá*, ak podpriestor určený množinou A priestoru X je

súvislý. Priestor X sa nazýva *lokálne súvislý*, ak každý prvok $a \in X$ má bázu okolí, ktorej všetky prvky sú súvislé množiny.

Príklad 7.1. Jednoprvkový priestor je súvislý.

7.2. Každý indiskrétny priestor je súvislý.

7.3. Každý diskretný priestor s aspoň dvomi prvkami nie je súvislý.

7.4. $X = (0, 1) \cup [2, 3]$ podpriestor priestoru $\mathbb{R}$. $U = (0, 1)$, $V = [2, 3]$ sú otvorené v X , disjunktné, preto X nie je súvislý.

Tvrdenie 7.1. Podmnožina I priestoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je súvislá $\Leftrightarrow I = \emptyset$, alebo I je jednoprvková, alebo I je interval.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech I má aspoň dva prvky a I nie je interval. Teda $\exists a, b \in I$; $a < b$ a $\exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$ a $c \notin I$. $U := (-\infty, c) \cap I$; $V := (c, \infty) \cap I$. U, V sú otvorené v I , $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = I$. $a \in U \neq \emptyset$, $b \in V \neq \emptyset$. I nie je súvislá.

$\Leftarrow$: $\emptyset \checkmark$; jednoprvková $\checkmark$. Nech teda I je interval v $\mathbb{R}$. Predpokladajme, že I nie je súvislý podpriestor. Potom existujú U, V otvorené v I , $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cup V = I$. Nech $a \in U$, $b \in V$, $a < b$. Nech $A' = \{x \in U, x \leq b\} \subseteq U$, $a \in A' \neq \emptyset$. Nech $c = \sup A'$. Platí teda $a \leq c \leq b$. Potom $c \in I$ a teda $c \in U$, alebo $c \in V$. Nech $c \in U$. U je otvorená v $I \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I \subseteq U (\subseteq I)$. Pretože $b > c \Rightarrow b \geq c + \varepsilon$. Nech $d = c + \frac{\varepsilon}{2} \in U$, ale $d < b$, $d \in U \Rightarrow d \in A'$. Lenže $d > c$ čiže spor. Teda nech $c \in V$. $\exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I \subseteq V$. $\forall x \in A'$, $x < c$, $(c - \varepsilon, c) \subseteq V \Rightarrow \forall x \in A'$, $x \leq c - \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon$ je horné ohraničenie A' , $c - \varepsilon < c$ – spor.

Príklad 7.5. Podpriestory $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $Y = \{0, 1\}$ nie sú súvislé podpriestory $\mathbb{R}$.

7.6. $[0, 1]$ je súvislý priestor.

Veta 7.1. Ak $f : X \rightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie a X je súvislý priestor, tak aj Y je súvislý priestor.

Dôkaz. Nech Y nie je súvislý. Potom existujú otvorené podmnožiny U, V v Y tak, že $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = Y$. Nech $U' = f^{-1}(U)$, $V' = f^{-1}(V)$. Potom U', V' sú otvorené, $U' \neq \emptyset \neq V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ a $U' \cup V' = X$. Teda X nie je súvislý – spor.

Dôsledok. Ak f je spojitý, $f : X \rightarrow Y$ a A je súvislá podmnožina X , tak $f[A]$ je súvislá podmnožina Y .

Veta 7.2. Nech $(A_\alpha, \alpha \in I)$ je systém súvislých podmnožín priestoru X a $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Potom $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je súvislá množina.

Dôkaz. Nech $p \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$; U, V sú otvorené podmnožiny A , $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = A \Rightarrow p \in U$ alebo $p \in V$. BUNO $p \in U$ a $\alpha \in I$. Potom $U_\alpha = U \cap A_\alpha$, $V_\alpha = V \cap A_\alpha$ sú otvorené v A_α , $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$, $U_\alpha \cup V_\alpha = A_\alpha$, $p \in U_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow V_\alpha = \emptyset$. Teda $\forall \alpha \in I : V \cap A_\alpha = \emptyset \Rightarrow V \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \emptyset \Rightarrow V \cap A = V = \emptyset$. Teda A je súvislý.

Definícia 7.2. Nech $p \in X$ a $C_p = \bigcup \{A; A \text{ je súvislá podmnožina } X \text{ a } p \in A\}$. Potom C_p sa nazýva *komponta súvislosti* X obsahujúca p .

Veta 7.3. Nech A je súvislá podmnožina v priestore X a $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Potom B je súvislá v X .

Dôkaz. Nech B nie je súvislá. Potom existujú otvorené množiny U, V v podpriestore B také, že $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = B$, $U, V \neq \emptyset$. Nech $a \in U$. Potom $a \in B \subseteq \bar{A}$. Existuje U' otvorená v X , $U' \cap B = U$. $a \in U'$ okolie a . Potom $U' \cap A = U \cap A \neq \emptyset$. Nech $b \in V$. Potom podobne z toho vyplýva, že $V \cap A \neq \emptyset$. $U_1 = U \cap A$, $V_1 = V \cap A$ sú otvorené v A , $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $U_1 \neq \emptyset \neq V_1$, $U_1 \cup V_1 = A$. Teda A nie je súvislá.

Dôsledok. Ak A je súvislá podmnožina X , tak aj $\bar{A}$ je súvislá podmnožina X .

Príklad 7.7. $X = \mathbb{R}^2$; $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1], y = \sin \frac{\pi}{x}\}$. $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \sin \frac{\pi}{x})$ je spojitý a $A = f((0, 1])$. $A \cup \{(0, 0)\}$, $(0, 0) \in \bar{A}$. $A \cup \{(0, 0)\}$ je súvislá v $\mathbb{R}^2$. $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ je súvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

Veta 7.4. *Nech X je priestor. Potom pre každé $p \in X$ komponenta súvislosti C_p je najväčšia súvislá množina obsahujúca p a C_p je uzavretá. Ak $p, q \in X$, tak $C_p = C_q$, alebo $C_p \cap C_q = \emptyset$.*

Dôkaz. maximalita OK. Nech $p \in X$; C_p je súvislá a preto $\bar{C}_p$ je súvislá. $p \in \bar{C}_p \Rightarrow \bar{C}_p \subseteq C_p \Rightarrow C_p = \bar{C}_p$ teda C_p je uzavretá.

Nech $p, q \in X$ a $C_p \cap C_q \neq \emptyset$. Nech $a \in C_p \cap C_q$. Potom C_p je súvislá množina obsahujúca a , potom $C_a \supseteq C_p$. Potom C_a je súvislá množina, $p \in C_a \Rightarrow C_a \subseteq C_p$. Teda $C_p = C_a$. Podobne $C_q = C_a$.
 $\bigcup_{p \in X} C_p = X$; $\{C_p; p \in X\}$ rozklad X na uzavreté súvislé množiny = komponenty súvislosti.

Príklady.

7.8. $\mathbb{R}; \forall a \in \mathbb{R} : C_a = \mathbb{R}$.

7.9. X je diskretný priestor. $\forall a \in X : C_a = \{a\}$.

7.10. $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{a\}$. Ak $b \in C_a$, $b < a$, tak $(-\infty, b) \cap C_a$ je otvorená a súčasne uzavretá v C_a ; $A \neq \emptyset$, $A \neq C_a$ spor.

Definícia 7.3. Priestor X sa nazýva *totálne nesúvislý*, ak má aspoň dva rôzne prvky a všetky komponenty súvislosti sú jednoprvkové.

Veta 7.5. *Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je ľubovoľný systém súvislých priestorov, tak aj $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech $I \neq \emptyset$ a $\forall \alpha \in I : X_\alpha \neq \emptyset$. Nech $p \in X$. Nech $K = \{q \in X; \{\alpha \in I, q_\alpha \neq p_\alpha\} \text{ je konečná } \}$. Dokážeme, že $K \subseteq C_p$. Nech $q \in K$, $q \neq p$ a $\{a \in I; p_a \neq q_a\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. $q \in C_p$?

Indukciou vzhľadom na n :

1° $n = 1$, $\{\alpha \in I, q_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1\}$. $X_p^{(\alpha_1)} = \{\alpha \in X, \forall \alpha \neq \alpha_1, a_\alpha = p_\alpha\} = \{\dots \{p_\alpha\} \times \dots \times \dots X_{\alpha_i} \times \dots \times \{p_\alpha\} \dots\}$. $X_p^{(\alpha_1)}$ je homeomorfný s X_{α_1} a teda súvislý. $p \in X_p^{(\alpha_1)} \Rightarrow X_p^{(\alpha_1)} \subseteq C_p \Rightarrow q \in C_p$.

2° Platí pre ľubovoľné p a $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že platí pre ľubovoľné p a $n + 1$. Nech $\{\alpha \in I, q_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$. Nech $q' \in X$. $q'_{\alpha_1} = q_{\alpha_1}, \dots, q'_{\alpha_n} = q_{\alpha_n}$, $q'_{\alpha_{n+1}} = p_{\alpha_{n+1}}$. $\{\alpha \in I, q'_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ a z indukčného predpokladu $q' \in C_p$. Teda $C'_q = C_p$. $q' \in X$. $\{\alpha \in I; q'_\alpha \neq q_\alpha\} = \{\alpha_{n+1}\}$. $X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \cong X_{\alpha_{n+1}}$ je súvislý $\Rightarrow X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \subseteq C_{q'}$, $q \in X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \Rightarrow q \in C_{q'} = C_p$. Teda pre $\forall q \in K : q \in C_p \Rightarrow K \subseteq C_p$. Platí $\bar{K} = X$, C_p je uzavretý $\Rightarrow X = \bar{K} \subseteq C_p$.

Príklad 7.11. $P_7 = ([0, \infty), \tau)$; $\mathcal{B}(a) = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty); \varepsilon > 0\}$; $\mathcal{B}(0) = \{[0, \varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \varepsilon > 0\}$. P_7 je súvislý, ale nie je lokálne súvislý. Totiž: $Y = (0, \infty)$ je podpriestor P_7 , je totožný s podpriestorom v $\mathbb{R}$. Y je súvislý podpriestor. $P_7 = \bar{Y}$ je súvislý. V bode 0 neexistuje báza okolí, ktoré sú všetky súvislé. Nepriamo: Nech $\mathcal{B}'(0)$ je taká báza okolí. $O_1 = [0, 1) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ okolie 0. Existuje $V \in \mathcal{B}'(0)$, $V \subseteq O_1$, $0 \in V$, $\exists \varepsilon > 0 : [0, \varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$, $0 \in V : \exists a \in V, a > 0$. Potom $\exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < a, \frac{1}{k} \notin O_1 \Rightarrow \frac{1}{k} \notin V$. $[0, \frac{1}{k})$ je otvorená v P_7 . $(\frac{1}{k}, \infty)$ je otvorená v P_7 . $U_1 = [0, \frac{1}{k}) \cap V$ otvorená vo V ; $U_2 = (\frac{1}{k}, \infty) \cap V$ je otvorená vo V . $U_1 \cup U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow V$ nie je súvislá, spor.

Lineárne súvislé priestory.

Definícia 7.4. Priestor X sa nazýva *lineárne súvislý*, ak pre každé $a, b \in X$ existuje spojité zobrazenie $f : [0, 1] \rightarrow X$ tak, že $f(0) = a$, $f(1) = b$. Podmnožina A priestoru X sa nazýva *lineárne súvislá*, ak podpriestor určený A je lineárne súvislý.

X je *lokálne lineárne súvislý*, ak $\forall a \in X$ existuje báza okolí a , ktoré sú všetky lineárne súvislé.

Príklad 7.12. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ je lineárne súvislý; je aj lokálne lineárne súvislý.

7.13. Každý interval v $\mathbb{R}$ je lineárne súvislá množina.

7.14. $\mathbb{R}^n$ je lineárne súvislý a aj lokálne lineárne súvislý.

7.15. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je lineárne súvislý.

Veta 7.6. *Ak X je lineárne súvislý, tak X je súvislý.*

Dôkaz. Nech $a \in X$, C_a je komponenta súvislosti a . Nech $b \in X$. Potom existuje spojité zobrazenie $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. $B = f[0, 1]$ je súvislý podpriestor X , $a \in B \Rightarrow B \subseteq C_a$, $b \in B \Rightarrow b \in C_a$. Teda $X \subseteq C_a \Rightarrow X$ je súvislý.

Príklad 7.16. P_8 je podpriestor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $A = \{(x, \sin \frac{\pi}{x}), x \in (0, 1]\}$. $f : x \mapsto (x, \sin \frac{\pi}{x})$ je spojité zobrazenie. $A = f[[0, 1]]$ je súvislá. $(0, 0) \in \bar{A} \Rightarrow P_8 = A \cup \{(0, 0)\}$ je súvislý. Zoberme si body $(0, 0)$ a

$(1, 0) \in P_8$. Nech existuje spojité zobrazenie $g : [0, 1] \rightarrow P_8$, $g(0) = (0, 0)$, $g(1) = (1, 0)$. Nech existuje $a \in (0, 1) : (a, \sin \frac{\pi}{a}) \neq g(t)$ pre $\forall t \in [0, 1]$. $g([0, 1])$ je súvislá množina v P_8 . Nech p je priamka $x = a$. $p \cap g([0, 1]) = \emptyset$. Zoberme si $U = \{(x, y) : x > a\}$ je otvorená v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $V = \{(x, y) : x < a\}$ je otvorená v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $U' = U \cap g([0, 1])$ je otvorená v $g([0, 1])$. $V' = V \cap g([0, 1])$ je otvorená v $g([0, 1])$. $(0, 0) \in U'$, $(1, 0) \in V' \Rightarrow U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cup V' = g([0, 1])$. Teda $g([0, 1])$ nie je súvislý. Spor. Teda $g([0, 1]) = P_8 \Rightarrow P_8$ je kompaktný $\Rightarrow P_8$ je uzavretý podpriestor v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. spor. P_8 nie je lineárne súvislý.

Veta 7.7. Ak X je lineárne súvislý, $f : X \rightarrow Y$ je spojité a surjektívne zobrazenie, tak aj Y je lineárne súvislý.

Dôkaz. Nech $c, d \in Y$. Potom $\exists a, b \in X$ tak, že $f(a) = c$, $f(b) = d$. X je lineárne súvislý, potom existuje spojité $g : [0, 1] \rightarrow X$, $g(0) = a$, $g(1) = b$. $h = f \circ g : [0, 1] \rightarrow Y$, $h(0) = f(g(0)) = c$, $h(1) = f(g(1)) = d$. Teda Y je lineárne súvislý.

Dôsledok. Ak $f : X \rightarrow Y$ je spojité, A je lineárne súvislá podmnožina X , tak $f[A]$ je lineárne súvislá podmnožina Y .

Veta 7.8. Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém lineárne súvislých priestorov, tak $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je lineárne súvislý.

Dôkaz. Nech $I \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in I : X_\alpha \neq \emptyset$. (Inak triviálne platí.) Nech $a, b \in X$. $\forall \alpha \in I$, $p_\alpha(a), p_\alpha(b) \in X_\alpha$ a teda existuje spojité $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow X_\alpha$; $f_\alpha(0) = p_\alpha(a)$, $f_\alpha(1) = p_\alpha(b)$. $p_\alpha \circ f = f_\alpha$, f je spojité. $f(0) = a$, $f(1) = b$. $p_\alpha(f(0)) = p_\alpha(a) = f_\alpha(0)$, $p_\alpha(f(1)) = p_\alpha(b) = f_\alpha(1)$. Teda X je lineárne súvislý.

Veta 7.9. Nech X je priestor a $\sim$ je relácia na X definovaná nasledovne: Pre každé $x, y \in X : x \sim y \Rightarrow$ existuje spojité $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$. Potom $\sim$ je relácia ekvivalencie na X a všetky triedy ekvivalencie sú lineárne súvislé množiny. Ak A je lineárne súvislá podmnožina X , tak existuje $L \in X/\sim$ tak, že $A \subseteq L$.

Dôkaz. $\forall x \in X : x \sim x$ je zrejmé. Nech $x \sim y$. Potom existuje spojité $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$. Potom $g : [0, 1] \rightarrow X$, $\forall t \in [0, 1] : g(t) = f(1 - t)$ je spojité a $g(0) = f(1) = y$, $g(1) = f(0) = x$ a teda $y \sim x$. Tranzitívnosť: Nech $x \sim y$, $y \sim z$. Potom existujú spojité zobrazenia $f, g : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$, $g(0) = y$, $g(1) = z$. Definujme $h : [0, 1] \rightarrow X$, $h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pre } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{pre } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ je spojité. $h(0) = x$, $h(1) = z \Rightarrow x \sim z$.

$\forall A \in X/\sim$ je A lineárne súvislá: Nech $a, b \in A \Rightarrow a \sim b$ a existuje spojité $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. Ukážeme, že $f([0, 1]) \subseteq A$ tj. f je spojité zobrazenie z $[0, 1]$ do A . Nech $c \in f([0, 1])$. Potom $\exists r \in [0, 1] : f(r) = c$. Nech $c \neq a, b \Rightarrow r \in (0, 1)$. Nech $g : [0, 1] \rightarrow [0, r]$, $g(t) = r \cdot t$, g je spojité $g(0) = 0$, $g(1) = r$. Potom $h : [0, 1] \rightarrow X$, $h(t) = f(g(t))$ je spojité, $h(0) = f(g(0)) = f(0) = a$, $h(1) = f(g(1)) = f(r) = c \Rightarrow a \sim c \Rightarrow c \in A$. Teda $f([0, 1]) \subseteq A$, a $f : [0, 1] \rightarrow A$ je spojité, $f(0) = a$, $f(1) = b$, teda A je lineárne súvislý priestor. Nech B je lineárne súvislá podmnožina X , $B \neq \emptyset$, nech $a \in B$ potom $B \subseteq L(a) = \{c \in X : c \sim a\}$. Nech $b \in B \Rightarrow$ existuje spojité $f : [0, 1] \rightarrow B$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. B podpriestor $X \Rightarrow f : [0, 1] \rightarrow X$ je spojité, potom $a \sim b$ v X potom $b \in L(a) \Rightarrow B \subseteq L(a)$. $\square$

Definícia 7.4. Triedy ekvivalencie relácie $\sim$ z vety 7.9 sa nazývajú komponenty lineárnej súvislosti priestoru X . tj. ak $a \in X$, tak $L(a) = \{b \in X, a \sim b\}$ je komponenta lineárnej súvislosti obsahujúca a .

$(b \in L(a) \Leftrightarrow L(a) = L(b), b \notin L(a) \Leftrightarrow L(a) \cap L(b) = \emptyset); a \in X \Rightarrow L(a) \subseteq C_a$.

VIII. KONVERGENCIA V TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROCH

Definícia 8.1. Nech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť v priestore X . Hovoríme, že $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k $a \in X$, ak pre ľubovoľné okolie U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0 : a_n \in U$.

Príklady.

8.1. $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$ $\{n\} : 1, 2, 3, \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ je jediné okolie obsahujúce všetky prvky.

8.2. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus U \text{ je spočítateľná}\} \cup \{\emptyset\}$. $a_n \rightarrow a$ v $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$. $\{a\}$ je okolie a , $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n = a$. V $(\mathbb{R}, \tau)$: $a_n \rightarrow a$, $\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq a\} = K$; $U = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{a_n, n \in K\}}_{\text{spoč.}}$ $\in \tau$, $a \in U$, U je

okolie a , $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \in U \Rightarrow n \notin K$; $\forall n \in K : n \leq n_0 \Rightarrow K$ je konečná = $\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq a\}$. (skoro konštantná postupnosť)

Konvergenca pomocou filtrov.

Nech $a_n \rightarrow a$ v X , $\forall n \in \mathbb{N} : F_n = \{a_k, k \geq n\}$, $\emptyset \neq \mathcal{H} = \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ je báza filtra v X . $a_n \in F_n \neq \emptyset$, $n \leq m : F_n \cap F_m = F_m$. Pre každé okolie U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N} : A_{n_0} \subseteq U$. $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \supseteq \eta(a)$; $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow \exists F_n \in \mathcal{H} : F_n \subseteq U$.

Definícia 8.2. c je hromadný bod $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ak $\forall U \in \eta(c) \forall n \in \mathbb{N} \exists k > n : a_k \in U \Leftrightarrow \forall U \in \eta(c) \forall F_n \in \mathcal{H}, F_n \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall F_n \in \mathcal{H} : a \in \bar{F}_n \Leftrightarrow a \in \bigcap_{F_n \in \mathcal{H}} \bar{F}_n$.

Definícia 8.3. Nech X je topologický priestor, $a \in X$, $\mathcal{H}$ je báza filtra na X , $\mathcal{F}$ je filter na X a $\eta(a)$ je systém všetkých okolí bodu a . Potom hovoríme, že:

- (1) $\mathcal{F}$ konverguje k a v X , ak $\mathcal{F} \supseteq \eta(a)$.
- (2) a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$, ak $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$.
- (3) $\mathcal{H}$ konverguje k a , ak $\forall U \in \eta(a) \exists H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq U$. (tj. $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \supseteq \eta(a)$)
- (4) a je hromadný bod $\mathcal{H}$, ak $a \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \bar{H}$.

Ozn. $\mathcal{F} \rightarrow a$, $a \in \lim \mathcal{F}$, $a = \text{limita } \mathcal{F}$ ak $\mathcal{F} \rightarrow a$. $\mathcal{H} \rightarrow a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \rightarrow a$.

Veta 8.1.

- (1) Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra v priestore X , $\mathcal{H} \rightarrow a$, tak a je hromadný bod $\mathcal{H}$.
- (2) Ak $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X ; a je hromadný bod $\mathcal{U}$, tak $\mathcal{U} \rightarrow a$.

Dôkaz.

- (1) Nech $U \in \eta(a)$ a $F \in \mathcal{H}$. Existuje $F' \in \mathcal{H}$, $F' \subseteq U$. Existuje $F'' \in \mathcal{H}$ také, že $F'' \subseteq F' \cap F$. Potom $F'' \subseteq U$, $F'' \subseteq F \Rightarrow \emptyset \neq F'' \subseteq U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \forall F \in \mathcal{H}, a \in F \Rightarrow a \in \bigcap_{F \in \mathcal{H}} \bar{F}$.
- (2) Nech $U \in \eta(a)$, $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{U}} \bar{F} \Rightarrow \forall F \in \mathcal{U} : U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \supseteq \eta(a) \Rightarrow \mathcal{U} \rightarrow a$. $\square$

Poznámka. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $F_n = \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{H} = \{\{a\}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{F \subseteq \mathcal{P}(X); a \in F\}$.

Príklad.

8.3. Treba nájsť filter $\mathcal{G}$, ktorý konverguje k 0 v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou. $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq G\}$ je filter na $\mathbb{R}$. $\mathcal{G} \rightarrow 0$: $\mathcal{U} \in \eta(0)$, $\exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U \Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq U$.

Veta 8.2.

- (1) Ak $\mathcal{F}_a$ je filter v priestore X taký, že $\mathcal{F}_a = \{F \in \mathcal{P}(X); a \in F\}$, tak $\mathcal{F}_a \rightarrow a$.
- (2) Ak $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sú filtre v priestore X , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \rightarrow a$ v X , tak aj $\mathcal{G} \rightarrow a$.
- (3) Ak a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$ v X , tak existuje filter $\mathcal{G}$ v X , $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ a $\mathcal{G} \rightarrow a$.

Dôkaz. $\mathcal{F} \rightarrow a \Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \eta(a)$; báza filtra $\mathcal{H} \rightarrow a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \rightarrow a$. $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq F$, $\eta(a) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U \in \eta(a) \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq U$. a je hromadný bod filtra (bázy filtra) $\mathcal{F} \Leftrightarrow a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$.

- (1) $\eta(a) \subseteq \mathcal{F}_a \Rightarrow \mathcal{F}_a \rightarrow a$.
- (2) $\mathcal{F} \rightarrow a, \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} \Rightarrow \eta(a) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \eta(a) \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \rightarrow a$.
- (3) $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \Leftrightarrow \forall U \in \eta(a), \forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{H} = \{U \cap F, U \in \eta(a), F \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{H}$ bude báza filtra X . $\emptyset \notin \mathcal{H}$. Ak $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, tak existujú $U_1, U_2 \in \eta(a)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tak, že $H_1 = U_1 \cap F_1$, $H_2 = U_2 \cap F_2$ a $H_1 \cap H_2 = U_1 \cap F_1 \cap U_2 \cap F_2 = \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \eta(a)} \cap \underbrace{F_1 \cap F_2}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{H}$. $\eta(a) \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$;

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{G} := \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \rightarrow a \Rightarrow \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}.$$

$x_n \rightarrow a$ v x , ak $\forall U \in \eta(a)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U$.

Príklady.

8.4. $(\mathbb{R}, \tau)$ $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus U \text{ je spočítateľná}\} \cup \{\emptyset\}$. $x_n \rightarrow a$ $\{k \in \mathbb{N}, x_k \neq a\}$ je spočítateľná, potom $\{x_k, x_k \neq a\}$ je spočítateľná, potom $\mathbb{R} \setminus \{x_k, x_k \neq a\} = U$ je okolie a . $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: x_n \in U \Leftrightarrow x_n = a$.

8.5. $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, x_n \rightarrow a$. Ako k tomu priradiť filter? $A_n = \{x_k, k \geq n\}, \mathcal{H} = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ bude báza filtra. $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U \in \eta(a) \exists A_{n_0} \in \mathcal{H} : A_{n_0} \subseteq U; \mathcal{F}_{\mathcal{H}}; x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \eta(a) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

8.6. Podpostupnosti: $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathcal{H}' = \{A'_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$. $A'_{n_k} = \{x_{n_k}, l \geq k\} \subseteq A_{n_k} = \{x_p, p \geq n_k\}$. $A'_{n_k} \subseteq A_{n_k} \subseteq A_k \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}'} \supseteq \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}'} \supseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

8.7. Konštantné postupnosti: $x_n = a, \forall n : A_n = \{a\}$.

Cvičenie. $A \subseteq X$ a $\mathcal{G}$ je báza filtra (filter) na A , tak $\mathcal{G}$ je báza filtra v X .

Veta 8.3. *Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X, c \in X$. Potom platí $c \in \bar{A} \Leftrightarrow$ existuje báza filtra na A , ktorá konverguje k c v X . (tj. ako báza filtra na X .)*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $c \in \bar{A}$. Položme $\mathcal{H} = \{U \cap A, U \in \eta(c)\}$. $\mathcal{H}$ je báza filtra na A . $\mathcal{H} \rightarrow c$ v X ? Nech $U \in \eta(c)$. Potom $U \cap A \in \mathcal{H}$ a $U \cap A \subseteq U$. Teda $\mathcal{H} \rightarrow c$ v X .

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{H}$ je báza filtra na A a $\mathcal{H} \rightarrow c$ v X . Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq U$. Potom $\emptyset \neq H \subseteq U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$. Teda $c \in \bar{A}$.

Veta 8.4. *Priestor X je T_2 -priestor $\Leftrightarrow$ každý filter v X má najviac jednu limitu.*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nepriamo. Nech existuje filter $\mathcal{F}$ na X taký, že $\mathcal{F} \rightarrow a, \mathcal{F} \rightarrow b$ a $a \neq b$. Potom existuje $U \in \eta(a), V \in \eta(b)$ tak, že $U \cap V = \emptyset$. $\mathcal{F} \rightarrow a \Rightarrow U \in \mathcal{F}, \mathcal{F} \rightarrow b \Rightarrow V \in \mathcal{F} \Rightarrow U, V \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$ spor.

$\Leftarrow$: Nepriamo. Nech X nie je T_2 -priestor. Potom $\exists a, b \in X, a \neq b$ také, že $\forall U \in \eta(a), \forall V \in \eta(b)$ platí $U \cap V \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{H} = \{U \cap V, U \in \eta(a), V \in \eta(b)\}$ je báza filtra. $\eta(a) \subseteq \mathcal{H}, \eta(b) \subseteq \mathcal{H} \Rightarrow \eta(a) \cap \eta(b) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \rightarrow a, b$ spor.

Veta 8.5. *Nech $(X_{\alpha}, \alpha \in I)$ je systém topologických priestorov, $X = \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ je topologický súčin $(X_{\alpha}, \alpha \in I)$ a $\mathcal{F}$ je báza filtra (filter) na $X, c \in X$. Potom $\mathcal{F} \rightarrow c$ v $X \Leftrightarrow \forall \alpha \in I : p_{\alpha}[\mathcal{F}] \rightarrow p_{\alpha}(c)$, kde $p_{\alpha}[\mathcal{F}] = \{p_{\alpha}[F], F \in \mathcal{F}\}$.*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $\mathcal{F} \rightarrow c$ v X a $\alpha \in I$. Nech U je okolie $p_{\alpha}(c)$ v X_{α} . Potom $(p_{\alpha})_{-1}(U)$ je okolie c v X . Potom $\exists F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \subseteq (p_{\alpha})_{-1}(U)$. Potom $p_{\alpha}[F] \subseteq U$. Teda $p_{\alpha}[\mathcal{F}] \rightarrow p_{\alpha}(c)$ v X_{α} .

$\Leftarrow$: Nech $\forall \alpha \in I : p_{\alpha}[\mathcal{F}] \rightarrow p_{\alpha}(c)$ v X_{α} . Nech W je okolie c v X . Potom $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$ a otvorené množiny U_1 v $X_{\alpha_1}, \dots, U_k$ v X_{α_k} tak, že $c \in \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \subseteq W$. Potom $\forall i = 1, \dots, k: p_{\alpha_i}(c) \in U_i$ tj. U_i je okolie $p_{\alpha_i}(c)$. Potom $\forall i = 1, \dots, k \exists F_i \in \mathcal{F}$ tak, že $p_{\alpha_i}(F_i) \subseteq U_i$. Potom $\forall i = 1, \dots, k : F_i \subseteq (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^k (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \subseteq W$. Existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \subseteq \bigcap_{i=1}^k F_i$ a teda $F \subseteq W$. Teda $\mathcal{F} \rightarrow c$.

Príklad 8.8. $\text{id}:(\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$. $x_n \rightarrow a$ v $(\mathbb{R}, \tau) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n = a \Rightarrow \text{id}(x_n) \rightarrow a$ v $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$. Zachováva konvergenciu, ale nie je spojitá.

Veta 8.6. *Nech X, Y sú topologické priestory, $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Potom f je spojitý $\Leftrightarrow$ pre každé $a \in X$ a každú bázu filtra $\mathcal{G}$ v X takú, že $\mathcal{G} \rightarrow a$ platí $f[\mathcal{G}] \rightarrow f(a)$ v Y .*

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech V je okolie $f(a)$ v Y . Potom $f_{-1}(V)$ je okolie bodu a v X . Potom $\exists H \in \mathcal{G}$ tak, že $H \subseteq f_{-1}(V)$. Potom $f(H) \subseteq V, f(H) \in f[\mathcal{G}]$. Teda $f[\mathcal{G}] \rightarrow f(a)$ v Y .

$\Leftarrow$: Nech f nie je spojitý. Potom $\exists a \in X$ a okolie V bodu $f(a)$ v Y tak, že pre každé okolie $U \in \eta(a)$ platí $f[U] \not\subseteq V$. $\eta(a)$ je báza filtra v X . $\eta(a) \rightarrow a$. $f[\eta(a)] = \{f(U), U \in \eta(a)\} \not\rightarrow f(a)$, lebo existuje okolie V bodu $f(a)$ také, že $\forall H \in f[\eta(a)], H \not\subseteq V$. $\square$

Príklad.

8.9. $\mathcal{F}$ je ultrafilter $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$, $U \in \eta(a)$, $\forall F \in \mathcal{F}$, $U \cap F \neq \emptyset$. Potom $U \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \rightarrow a$.

8.10. $\mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus F \text{ je konečná}\}$ je filter. $(a-1, a+1) \notin \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \nrightarrow a$. $a \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{F}$, $\mathbb{R} \setminus F$ je konečná. U je okolie a . $U \not\subseteq \mathbb{R} \setminus F \Leftrightarrow U \cap F \neq \emptyset$. $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$. a je limitou, ale nie je hromadným bodom.

$(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus U \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$. $\mathcal{F} \rightarrow a$ pre $\forall a \in \mathbb{R}$ v $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$.

IX. SIETE

Definícia 9.1. Usporiadaná dvojica $(A, \leq)$, kde $A \neq \emptyset$ je množina a $\leq$ je relácia na A , sa nazýva *usmernená množina*, ak platí:

- (1) $\forall a \in A : a \leq a$.
- (2) $\forall a, b, c \in A : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
- (3) $\forall a, b \in A \exists c \in A : a \leq c \wedge b \leq c$.

Príklady.

9.1. $(\mathbb{N}, \leq)$ je usmernená množina.

9.2. $A = \{K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), K \text{ je konečná}\}$, $(A, \subseteq)$ usmernená množina. $K, L \in A \Rightarrow K \cup L \in A$, $K, L \subseteq K \cup L$.

9.3. X je topologický priestor $a \in X$, $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí a ; $(\mathcal{B}(a), \leq)$, $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$, $(\mathcal{B}(a), \supseteq)$.

9.4. $(\mathbb{R}, \leq)$, kde $a \leq b \Leftrightarrow a = b$; nie je usmernená, lebo neplatí (3).

Definícia 9.2. Nech $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina, X je topologický priestor. Potom ľubovoľné zobrazenie $f : \Sigma \rightarrow X$ sa nazýva *siet' v X* .

Ozn. $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$.

Definícia 9.3. Nech X je topologický priestor, $c \in X$ a $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X . Hovoríme, že sieť $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ *konverguje* k c v X , ak pre každé okolie $U \in \eta(c)$ existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $\forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. Bod c sa nazýva *limita siete S* . Ozn. $\lim_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma = c$; $X_\sigma \rightarrow c$. Bod c sa nazýva *hromadný bod siete S* , ak pre každé $U \in \eta(c)$ a $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \in \Sigma$ tak, že $\sigma' \geq \sigma$ a $X_{\sigma'} \in U$.

Veta 9.1. Nech X je priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom $c \in \bar{A} \Leftrightarrow$ existuje sieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v A taká, že $X_\sigma \rightarrow c$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$: Nech $c \in \bar{A}$. $(\Sigma, \leq) = (\eta(c), \subseteq)$ je usmernená množina. $\eta(c) \mapsto A$, $X_U \in U \cap A (\neq \emptyset)$, $(X_U, U \in \eta(c))$ je sieť v A . Ukážeme, že $X_U \rightarrow c$. Nech V je ľubovoľné okolie bodu c (tj. $V \in \eta(c)$). $U_0 = V$, $\forall U \in \eta(c)$, $U_0 \supseteq U$, $X_U \in U \subseteq U_0 = V$.

$\Leftarrow$: Nech $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v A , $X_\sigma \rightarrow c$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma \forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. Potom $X_\sigma \in U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

Príklad 9.5. $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), 0 \in U \text{ a } \mathbb{R} \setminus U \text{ je spočítateľná}\}$. Je jasné, že $0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$. Nech $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je ľubovoľná postupnosť v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. tj. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$. $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je okolie 0. Neplatí, že $x_n \rightarrow 0$.

Definícia 9.4. Nech $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ a $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sú siete v X . Potom sieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sa nazýva *podsieť siete (zjemnenie) $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$* , ak existuje zobrazenie $\phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ tak, že platí:

- (1) Pre každé $\sigma_0 \in \Sigma$ existuje $\sigma'_0 \in \Sigma'$ tak, že pre všetky $\sigma' \in \Sigma'$: ak $\sigma' \geq \sigma'_0$, tak $\phi(\sigma') \geq \sigma_0$.
- (2) Pre každé $\sigma' : X_{\phi(\sigma')} = Y_{\sigma'}$.

Veta 9.2. Nech X je priestor, $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X a $c \in X$. Potom platí:

- (1) Ak $X_\sigma \rightarrow c$, tak pre každú podsieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ platí $Y_{\sigma'} \rightarrow c$.
- (2) Ak c je hromadný bod siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, tak existuje podsieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ taká, že $Y_{\sigma'} \rightarrow c$.

Dôkaz.

- (1) Nech $X_\sigma \rightarrow c$ a $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ je podsieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Teda $\exists \phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ také, že $\forall \sigma_0 \in \Sigma \exists \sigma'_0 \in \Sigma' \forall \sigma' \geq \sigma'_0 : \phi(\sigma') \geq \sigma_0$ a $Y_{\sigma'} = X_{\phi(\sigma')}$ pre $\forall \sigma' \in \Sigma'$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma$ tak,

- že $\forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. $\exists \sigma'_0 \in \Sigma'$ tak, že $\forall \sigma' \geq \sigma'_0 : \phi(\sigma') \geq \sigma_0$. Nech $\sigma' \geq \sigma'_0$. Potom $\phi(\sigma') \geq \sigma_0$ a $Y_{\sigma'} = X_{\phi(\sigma')} \in U$, teda $Y_{\sigma'} \rightarrow c$.
- (2) Nech c je hromadný bod $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Teda $\forall U \in \eta(c) \forall \sigma_0 \in \Sigma \exists \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$.
 $\Sigma' = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \eta(c); X_\sigma \in U\} \neq \emptyset$. Definujme: $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2) \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2 \wedge \sigma_1 \leq \sigma_2$.
 $(\Sigma', \leq)$ je usmernená množina. $(\sigma, U) \leq (\sigma, U) \Leftrightarrow U \supseteq U \wedge \sigma \leq \sigma$. $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2)$,
 $(\sigma_2, U_2) \leq (\sigma_3, U_3) \Rightarrow U_1 \supseteq U_2, U_2 \supseteq U_3, \sigma_1 \leq \sigma_2, \sigma_2 \leq \sigma_3 \Rightarrow U_1 \supseteq U_3 \wedge \sigma_1 \leq \sigma_3$. $(\sigma_1, U_1),$
 $(\sigma_2, U_2) \in \Sigma'; U = U_1 \cap U_2 \in \eta(c) : \exists \sigma_3 \geq \sigma_1, \sigma_3 \geq \sigma_2 \exists \sigma_4 \geq \sigma_3 : X_{\sigma_4} \in U$. Potom
 $(\sigma_4, U) \in \Sigma', \sigma_1 \leq \sigma_4, U_1 \supseteq U$ a $\sigma_2 \leq \sigma_4, U_2 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_4, U)$ a $(\sigma_2, U_2) \leq (\sigma_4, U)$.
Nech $\sigma_0 \in \Sigma$. Existuje $\sigma \geq \sigma_0, X_\sigma \in U$. Potom $(\sigma, U) \in \Sigma'$. $U_1 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_1, U_1) \leq (\sigma, U)$;
 $U_2 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_2, U_2) \leq (\sigma, U)$. $(\Sigma', \leq)$ je usmernená množina. $\phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma, \phi(\sigma, U) = \sigma$. Nech
 $\sigma_0 \in \Sigma$. Potom existuje $\sigma_1 \in \Sigma, \sigma_1 \geq \sigma_0$ tak, že $X_{\sigma_1} \in U$. $\sigma'_0 = (\sigma_1, U)$. Nech $(\sigma, V) \in \Sigma'$ a
 $(\sigma, V) \geq \sigma'_0 = (\sigma_1, U)$. Potom $\phi(\sigma, V) = \sigma \geq \sigma_1 \geq \sigma_0$ tj. $\phi(\sigma, V) \geq \sigma_0$. $(Y_{(\sigma, V)}, (\sigma, V) \in \Sigma')$.
 $Y_{(\sigma, V)} = X_\sigma = X_{\phi(\sigma, V)}$ je to sieť v X tj. $\forall (\sigma, V) \in \Sigma'$ platí $Y_{(\sigma, V)} = X_{\phi(\sigma, V)}$. $(Y_{(\sigma, V)}, (\sigma, V) \in \Sigma')$
je podsieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $X_{\sigma_0} \in U$ tj. $(\sigma_0, U) \in \Sigma'$. Nech
 $\Sigma' \ni (\sigma, V) \geq (\sigma_0, U)$. Potom $X_\sigma \in V, \sigma \geq \sigma_0, V \subseteq U$. Potom $Y_{(\sigma, V)} = X_\sigma \in V \subseteq U$. Ukázali
sme, že $Y_{(\sigma, V)} \rightarrow c$.

Veta 9.3. Ak $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v priestore X , tak $\mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{P}(X); \exists \sigma_0 \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F\}$ je filter v X a platí: Ak $c \in X$, tak $S \rightarrow c \Leftrightarrow \mathcal{F}_S \rightarrow c$.

Dôkaz. $X \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$. $F, F' \in \mathcal{F}_S : \exists \sigma_0, \sigma'_0 \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F, \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma'_0\} \subseteq F'$. Keďže Σ je usmernená potom $\exists \sigma_1 \in \Sigma$ tak, že $\sigma_0, \sigma'_0 \leq \sigma_1$. $\{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_1\} \subseteq F \cap F' \Rightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}_S$. Ak $F \in \mathcal{F}_S$, $U \subseteq X, F \subseteq U$. $\exists \sigma_0 \in \Sigma \forall \sigma \geq \sigma_0 : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_S$. $\mathcal{F}_S$ je filter.

$\Rightarrow$: Nech $S \rightarrow c$. Nech U je ľubovoľné okolie c . Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathcal{F}_S \rightarrow c$.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{F}_S \rightarrow c$. Nech U je ľubovoľné okolie c . Potom $U \in \mathcal{F}_S$. Potom $\exists \sigma_0 : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq U \Rightarrow \exists \sigma_0 \in \Sigma \forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U \Rightarrow S \rightarrow c$.

Veta 9.4. Nech $\mathcal{F}$ je filter v priestore $X \neq \emptyset, \Sigma = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F}; x \in F\}$ a $(x, F) \leq (y, G) \Leftrightarrow F \supseteq G$. Potom $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina, $S_F = \{X_{(x, F)}, (x, F) \in \Sigma\}$, kde $X_{(x, F)} = x$ je sieť v X a platí: ak $c \in X$, tak $\mathcal{F} \rightarrow c \Leftrightarrow S_F \rightarrow c$.

Dôkaz. $x \in X, (x, X) \in \Sigma \neq \emptyset$. $(x, F) \leq (x, F) \Leftrightarrow F \supseteq F$ platí reflexívnosť. $(x, F) \leq (y, G), (y, G) \leq (z, H) \Rightarrow F \supseteq G, G \supseteq H \Rightarrow F \supseteq H \Rightarrow (x, F) \leq (z, H)$ tranzitívnosť. $(x, F), (y, G) \in \Sigma \Rightarrow F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$. z ľubovoľné v $F \cap G, (z, F \cap G) \in \Sigma, (x, F) \leq (z, F \cap G) \Leftrightarrow F \supseteq F \cap G, (y, G) \leq (z, F \cap G) \Leftrightarrow G \supseteq F \cap G$. Teda $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina.

$(x, F) \mapsto x$ je zobrazenie $\Sigma \rightarrow X$. tj. $S_F = \{X_{(x, F)}, (x, F) \in \Sigma\}$ je sieť v X .

$\Rightarrow$: Nech $\mathcal{F} \rightarrow c$. Nech U je ľubovoľné okolie c . Potom $U \in \mathcal{F}, \sigma_0 = (c, U) \in \Sigma$. Pre každé $(x, F) \in \Sigma$ také, že $(x, F) \geq (c, U)$ platí $F \subseteq U$ a teda $X_{(x, F)} = x \in F \subseteq U$ tj. $X_{(x, F)} \in U$. Teda sme dokázali, že $S_F \rightarrow c$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $S_F \rightarrow c$. Nech U je okolie c . Potom $\exists (x_0, F_0) \in \Sigma$ tak, že $\forall (x, F) \geq (x_0, F_0) : X_{(x, F)} \in U$. Nech $x \in F_0$. Potom $(x, F) \geq (x_0, F_0)$. Potom $X_{(x, F_0)} = x \in U$. Teda $F_0 \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}$. Teda $\mathcal{F} \rightarrow c$.

Príklad 9.6.

Nech f je ohraničená funkcia na $[a, b]$. $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ je delenie. $d_i = [x_{i-1}, x_i]$. $(\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\forall i : \xi_i \in d_i$. $\Sigma = \{(D, (\xi_i))\}$, D je delenie intervalu a $(\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in d_i$. $(D, (\xi_i)) \leq (D', (\xi'_i)) \Leftrightarrow \gamma(D') \leq \gamma(D)$. ($\gamma(D)$ je norma delenia D). $(D, (\xi_i)) \mapsto S_f(D, (\xi_i)) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$. $S_f(D, (\xi_i)) \rightarrow a$. $\forall \varepsilon > 0 \exists (D_0, (\xi_i^0)) \in \Sigma : (D, (\xi_i)) \geq (D_0, (\xi_i^0))$. $\delta = \gamma(D_0) > 0$.

X. METRIZOVATEĽNÉ PRIESTORY, METRIZÁCIA TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROV

Definícia 10.1. Nech X je množina. Zobrazenie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *pseudometrika*, ak platí:

- (1) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$.
- (2) $\forall x \in X : d(x, x) = 0$.
- (3) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.
- (4) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ak navyše platí:

- (5) $\forall x, y \in X : \text{ak } d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, potom d sa nazýva *metrika* na X .

Príklady.

10.1. $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ je metrika na $\mathbb{R}$.

10.2. $\mathbb{R}$, $d_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x = y \\ 1 & \text{inak} \end{cases}$ je metrika na $\mathbb{R}$.

10.3. $\mathbb{R}$, $d_2(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ je metrika na $\mathbb{R}$.

10.4. $\mathbb{R}$, $\rho(x, y) = 0$ pre $\forall x, y \in \mathbb{R}$ potom ρ je pseudometrika a nie je metrika.

Poznámka. Nech d je (pseudo-) metrika na X . Potom $\tau_d = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in X, d(a, x) < \varepsilon\} \subseteq U\}$ je topológia na X .

Príklady.

10.5. X , $d(x, y) = 0$ pre $\forall x, y \in X$. $\tau_d = \{\emptyset, X\}$ indiskrétna topológia.

10.6. X , $d_1(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$, $a \in X$, $0 < \varepsilon < 1$: $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{a\}$, $\tau_{d_1} = \mathcal{P}(X)$ diskretná topológia.

Definícia 10.2. Priestor (X, τ) sa nazýva *metrizovateľný*, ak existuje metrika d na X tak, že $\tau_d = \tau$.

Príklady.

10.7. $(\mathbb{R}, \tau)$, τ – obvyklá topológia; $d(x, y) = |x - y| \Rightarrow \tau = \tau_d$; $d_1(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. $\tau_{d_1} = \tau_d = \tau$. $\mathcal{B}^d(a) = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}$; $\mathcal{B}^{d_1}(a) = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}$. $\mathcal{O}_2^{d_1}(a) = \mathbb{R}$.

10.8. Priestor, ktorý nie je metrizable: $(\mathbb{R}, \tau_-)$, $\tau_- = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Nie je metrizable, lebo $d(x, y) = r$, zoberme si $\mathcal{O}_{r/2}(x) \cap \mathcal{O}_{r/2}(y) = \emptyset$. To znamená, že každý metrizable priestor je T_2 -priestor.

Veta 10.1. Ak (X, τ) je metrizable, tak každý podpriestor priestoru (X, τ) je metrizable.

Dôkaz. $Y \subseteq X$; (Y, τ_Y) podpriestor (X, τ) . $\tau_Y = \{U \cap Y, U \in \tau\}$. Existuje $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_d = \tau$. $d' = d \upharpoonright_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow d'$ je metrika. $U \in \tau_{d'} \Leftrightarrow \forall c \in U \exists \varepsilon > 0 \mathcal{O}_\varepsilon^{d'}(c) \subseteq U \Leftrightarrow \forall c \in U \exists \varepsilon > 0 \mathcal{O}_\varepsilon^d(c) \cap Y \subseteq U \Leftrightarrow U \in \tau_Y$.

Lema 10.1. Ak (X, τ) je metrizable priestor, tak existuje metrika d_1 na X ohraničená 1, (tj. $\forall x, y \in X : d_1(x, y) \leq 1$) tak, že $\tau_{d_1} = \tau$.

Dôkaz. (X, τ) je metrizable, potom existuje metrika d na X tak, že $\tau_d = \tau$. Nech $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Potom d_1 je metrika na X a $\tau_{d_1} = \tau_d = \tau$, $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

Veta 10.2.

- (1) Ak $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém metrizable priestorov a pre $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta : X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, tak aj priestor $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je metrizable.
- (2) Ak $((X_n, \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ je systém metrizable priestorov, tak aj $(X, \tau) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$ je metrizable.

Dôkaz.

- (1) $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ nech d_α je metrika na X_α okrem 1 taká, že $\tau_{d_\alpha} = \tau_\alpha$. Definujme $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} d_\alpha(x, y) & \text{ak existuje } \alpha \in I \text{ tak, že } x, y \in X_\alpha \\ 1 & \text{ak } x \in X_\alpha, y \in X_\beta \text{ a } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad d \text{ je metrikou na } X \text{ a } \tau_d = \tau.$$

- (2) $(X, \tau) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$. Pre $\forall n \in \mathbb{N}$ nech d_n je metrika na X_n okrem 1 taká, že $\tau_{d_n} = \tau_n$.

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n). \text{ Definujme } d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot d_n(p_n(x), p_n(y)).$$

$$0 \leq \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq \frac{1}{2^n}. \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1. \quad d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = d(y, x). \quad \forall x, y, z \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}:$$

$$d_n(p_n(x), p_n(z)) \leq d_n(p_n(x), p_n(y)) + d_n(p_n(y), p_n(z)) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(z)) \leq$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} (d_n(p_n(x), p_n(y)) + d_n(p_n(y), p_n(z))) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) +$$

$$+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(y), p_n(z)) = d(x, y) + d(y, z).$$

$p_n : (X, \tau_d) \rightarrow (X_n, \tau_n) = (X_n, \tau_{d_n})$ je spojité. Nech $x \in X$, $\varepsilon > 0$. $\forall y \in X$ pre ktoré $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ platí: $\frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq d(x, y) \Rightarrow d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq 2^n d(x, y) < \varepsilon$. p_n je spojité pre $\forall n$, preto $id : (X, \tau_{d_n}) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n) = (X, \tau)$ je spojité. $p_n \circ id = p_n$ je spojité pre

$\forall n \in \mathbb{N}$. Platí $\tau \subseteq \tau_d$. Nech $U \in \tau_d$, $x \in U$. $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon^d(x) \subseteq U$.

$$y \in \mathcal{O}_\varepsilon^d(x) \Leftrightarrow d(x, y) = \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) + \dots + \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)).$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 \Rightarrow$ pre $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. $\mathcal{O}_{\varepsilon/2}^{d_k}(p_k(x))$ je okolie $p_k(x)$ v (X_k, τ_k) . Množina $W = \mathcal{O}_{\varepsilon/2}^{d_1}(p_1(x)) \times \dots \times \mathcal{O}_{\varepsilon/2}^{d_k}(p_k(x)) \times X_{k+1} \times \dots = (p_1)_{-1} \left(\mathcal{O}_{\varepsilon/2}^{d_1}(p_1(x)) \right) \cap \dots \cap (p_k)_{-1} \left(\mathcal{O}_{\varepsilon/2}^{d_k}(p_k(x)) \right)$ je prvkom štandardnej bázy τ a teda $W \in \tau$, $x \in W$. Nech $y \in W$. Potom $d_1(p_1(x), p_1(y)) < \frac{\varepsilon}{2}, \dots, d_k(p_k(x), p_k(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) + \dots + \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $d(x, y) = \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) + \dots + \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Teda $y \in \mathcal{O}_\varepsilon^d(x) \subseteq U$. Teda $W \subseteq U$, $U \in \tau$ tj. $\tau_d = \tau$.

Dôsledok.

$[0, 1]^{\mathbb{N}}$ je metrizovateľný priestor. napr. $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$, kde $x_n = p_n(x)$, $y_n = p_n(y)$.

Veta 10.3. Urysohnova metrizačná

Ak X je regulárny T_1 -priestor ($=T_3$ -priestor) so spočítateľnou bázou, tak X je metrizovateľný.

Dôkaz. X je T_3 -priestor so spočítateľnou bázou, potom X je T_4 -priestor, a teda normálny. Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza topológie na X . Položme $\mathcal{C} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}; \bar{U} \subseteq V\}$. Je to spočítateľný systém a teda $[0, 1]^{\mathcal{C}}$ je metrizovateľný. Ukážeme, že X je homeomorfný s podpriestorom priestoru $[0, 1]^{\mathcal{C}}$. Nech $(U, V) \in \mathcal{C}$, potom $\bar{U} \subseteq V$ a potom $\bar{U} \cap (X \setminus V) = \emptyset$ a $\bar{U}, X \setminus V$ sú uzavreté. X je normálny, potom (z Urysohnovej lemy) existuje spojité zobrazenie $f_{(U,V)} : X \rightarrow [0, 1]$; $f[\bar{U}] \subseteq \{0\}$, $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Potom existuje spojité $f : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}}$ také, že $\forall (U, V) \in \mathcal{C}$ platí: $p_{(U,V)} \circ f = f_{(U,V)}$.

f je prosté: Nech $x, y \in X$, $x \neq y$. $x \in X \setminus \{y\}$ je otvorená. Existuje $V \in \mathcal{B} : x \in V \subseteq X \setminus \{y\}$. $\mathcal{B}_x = \{W \in \mathcal{B}, x \in W\}$ je báza okolí v x . X je regulárny. $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}_x : \bar{U} \subseteq V$. Potom $x \in U$, $U \in \mathcal{B}$. $(U, V) \in \mathcal{C}$. $f_{(U,V)} : X \rightarrow [0, 1]$; $f_{(U,V)}(x) = 0$. $x \in \bar{U}$, $f_{(U,V)}(y) = 1$. $f_{(U,V)}(x) = p_{(U,V)}(f(x)) \neq$

$\neq p_{(U,V)}(f(y)) = f_{(U,V)}(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. $f : X \rightarrow f[X]$ podpriestor $[0, 1]^C$. Treba ešte ukázať, že ak A je uzavretá v X , tak $f[A]$ je uzavretá v $f[X]$. Nech $b \in f[X] \setminus f[A]$. Potom existuje $a \in X : f(a) = b$, pričom $a \notin A$. $a \in X \setminus A$ je otvorená v X , potom $\exists V_1 \in \mathcal{B}$, $a_1 \in V_1 \subseteq X \setminus A$. X je regulárny potom $\exists U_1 \in \mathcal{B}$, $u \in U_1$, $\bar{U}_1 \subseteq V_1$. $f_{(U_1, V_1)} : X \rightarrow [0, 1]$, $f_{(U_1, V_1)}(a) = 0$, $f_{(U_1, V_1)}[A] \subseteq \{1\}$, lebo $A \subseteq X \setminus V_1$. $W = (p_{(U_1, V_1)})_{-1}([0, \frac{1}{2}])$ je otvorená v $[0, 1]^C$, $p_{(U_1, V_1)}(b) = p_{(U_1, V_1)}(f(a)) = f_{(U_1, V_1)}(a) = 0$. Teda $b \in W$. Ak $y \in f[A]$, tak $y = f(x)$, $x \in A$. Potom $p_{(U_1, V_1)}(y) = p_{(U_1, V_1)}(f(x)) = f_{(U_1, V_1)}(x) = 1$. Teda $f[A] \cap W = \emptyset$. Nech $W' = W \cap f[X]$. Potom W' je otvorená v $f[X]$, $b \in W'$, $W' \cap f[A] = \emptyset$. Teda $f[A]$ je uzavretá v $f[X]$ a teda $f : X \rightarrow f[X]$ je homeomorfizmus. $f[X]$ je metrizovateľný, potom X je metrizovateľný.

Veta 10.4. Ak (X, d) je metrický priestor, tak $d : (X, \tau_d) \times (X, \tau_d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.

Dôkaz. $(x, y), (x', y') \in X \times X$. $d(x, y), d(x', y')$. $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq d(x, x') + d(y', y) + d(x', y') \Rightarrow d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y')$. Podobne $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y', y)$. Z toho: $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$. Nech $\varepsilon > 0$. Zoberme $\mathcal{O}_{\varepsilon/2}^d(x) \times \mathcal{O}_{\varepsilon/2}^d(y)$ okolie (x, y) v $(X, \tau_d) \times (X, \tau_d)$. $\forall (x', y') \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x) \times \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(y)$. $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Veta 10.5. Ak (X, ρ) je pseudometrický priestor, tak $d : (X, \tau_\rho) \times (X, \tau_\rho) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.

Vzdialenosti. (X, d) je metrický priestor; $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$, $c \in X$: $d(c, A) := \inf\{d(c, a), a \in A\}$. $A, B \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $d(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}$.

Veta 10.6. Ak (X, τ) je topologický priestor, d je metrika na X taká, že $d : (X, \tau) \times (X, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie a A je ľubovoľná neprázdna podmnožina v X , tak zobrazenie $f_A : (X, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_A(x) = d(x, A)$ je spojité. (Špeciálne $f_A : (X, \tau_d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité.)

Dôkaz. Nech $x, y \in X$. Ukážeme, že $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$, $f_A(x) = d(x, A)$, $f_A(y) = d(y, A)$. $\forall a \in A$: $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. $\forall a \in A$: $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a) \Rightarrow d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$; $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Podobne: $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y) \Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Nech $\varepsilon > 0$, $(x, x) \in (X, \tau) \times (X, \tau)$, d je spojité, existuje okolie $U \times V$ bodu (x, x) tak, že $\forall (y, y') \in U \times V$ a $|d(x, x') - d(y, y')| < \varepsilon$. U, V sú otvorené v (X, τ) . U je okolie x . Nech $y \in U$. Potom $(y, x) \in U \times V$. Potom $|d(x, x) - d(y, x)| = d(x, y) < \varepsilon$. Teda existuje U okolie x také, že $\forall y \in U$: $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y) < \varepsilon$. f_A je spojité.

Definícia 10.3. Nech X je topologický priestor.

- (1) Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *lokálne konečný (diskrétny)* v X , ak pre každý $a \in X$ existuje okolie $U_a \in \eta(a)$ tak, že $\{V \in \mathcal{S}, V \cap U_a\}$ je konečná. (má najviac jeden prvok).
- (2) Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *σ -lokálne konečný (diskrétny)*, ak $\mathcal{S}$ je zjednotením spočítateľného systému lokálne konečných (resp. diskretných) systémov v X .
- (3) Nech $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sú pokrytia X . Hovoríme, že $\mathcal{U}$ je *zjemnenie* $\mathcal{V}$ (píšeme $\mathcal{U} < \mathcal{V}$), ak $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} : U \subseteq V$.

Príklady.

10.9. Každý konečný systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je lokálne konečný.

10.10. $\mathcal{S} = \{(n, n+1), n \in \mathbb{N}\}$ lokálne konečný systém v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou; nie je diskretný.

10.11. Ak $\mathcal{S}$ je diskretný systém v X , tak $\forall U, V \in \mathcal{S} : U \cap V = \emptyset$.

10.12. Ak $\mathcal{S}$ je systém množín v metrickom priestore (X, d) a $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\forall U, V \in \mathcal{S} : d(U, V) \geq r$, tak $\mathcal{S}$ je diskretný v (X, τ_d) .

10.13. $X, \mathcal{S} = \mathcal{P}(X), \mathcal{S}' = \{X\} \Rightarrow \mathcal{S} < \mathcal{S}'$ a aj $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$.

Veta 10.7. Nech (X, τ) je metrický priestor. Potom pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru (X, τ) existuje σ -diskrétné otvorené pokrytie $\mathcal{S}$ priestoru (X, τ) také, že $\mathcal{S} < \mathcal{U}$.

Dôkaz. Nech $\forall U \in \mathcal{U} : U \neq \emptyset$. Vyberme $U \in \mathcal{U}$. Nech $\leq$ je dobré usporiadanie $\mathcal{U}$ tj. $(\mathcal{U}, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. $U_n = \{x \in U; d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{2^n}\}$. $U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$. Platí $d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. Nech $a \in U_n$, $b \in X \setminus U_{n+1}$. Potom $d(b, X \setminus U) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Potom $\exists c \in X \setminus U : d(b, c) < \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow d(a, c) \geq \frac{1}{2^n} \Rightarrow -d(b, c) > \frac{-1}{2^{n+1}}$. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \Rightarrow d(a, b) \geq d(a, c) - d(b, c) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

$U_n^* = U_n \setminus \bigcup_{V < U} V_{n+1}$, $U_n^* \subseteq U_n$. Nech $U, V \in \mathcal{U}$, $V < U$. $V_n^* \subseteq V_n$, $U_n^* \cap V_{n+1} = \emptyset \Rightarrow U_n^* \subseteq X \setminus V_{n+1}$,
 $d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$; $d(U_n^*, V_n^*) \geq d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. $\tilde{U}_n = \{x \in X; d(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$ je
 otvorená. $(f_{U_n^*} : (X, \tau_d) \rightarrow \mathbb{R})$ je spojitý a $\tilde{U}_n = (f_{U_n^*})^{-1}(-\infty, \frac{1}{2^{n+3}})$. $\forall U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$: $U < V$ alebo
 $V < U \Rightarrow d(U_n^*, V_n^*) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$. $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{S}_n = \{\tilde{U}_n, U \in \mathcal{U}\}$ je diskretný systém otvorených množín.
 Nech $S \in \mathcal{S}$. Potom $\exists U \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N} : S = \tilde{U}_n \subseteq U \Rightarrow \mathcal{S} < U$. Nech $a \in X$. Existuje najmenší prvok
 $U \in (\mathcal{U}, \leq)$ tak, že $a \in U$. $X \setminus U$ je uzavretá, $\exists \delta > 0 : \mathcal{O}_\delta(a) \cap X \setminus U = \emptyset$. $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < \delta$. Platí:
 $d(a, X \setminus U) \geq \delta > \frac{1}{2^n} \Rightarrow a \in U_n$ tj. $\exists n \in \mathbb{N} : a \in U_n$. $\forall V < U$, $a \notin V \Rightarrow a \notin V_{n+1}$. ($V_{n+1} \subseteq V$). Teda
 $a \in U_n^* = U_n \setminus \bigcup_{V < U} V_{n+1}$. $\forall U \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$ U_n je otvorená. $a \in U_n^* \subseteq \tilde{U}_n \in \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ je pokrytie (X, τ) .

Veta 10.8. Každý metrizovateľný priestor má bázu $\mathcal{B}$, ktorá je σ -diskretná.

Dôkaz. $\mathcal{U}_n = \{\mathcal{O}_{1/n}(x), x \in X\}$ je otvorené pokrytie (X, τ_d) . Predpokladali sme, že existuje metrika
 d na X tak, že $\tau_d = \tau$. Potom existuje σ -diskretné otvorené pokrytie $\mathcal{B}_n$ priestoru (X, τ_d) také, že
 $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$, $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Ak $\mathcal{B}_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{n,k} \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{n,k}$. $\mathcal{B}$ je σ -diskretný. Ukážeme, že $\mathcal{B}$
 je báza τ . $\mathcal{B} \subseteq \tau$. $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{O}_{1/n}(c) \subseteq U$. $\mathcal{B}_n$ je pokrytie $(X, \tau) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_n : c \in V$.
 $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$ tj. $\exists \mathcal{O}_{1/n}(y) \in \mathcal{U}_n$ tak, že $V \subseteq \mathcal{O}_{1/n}(y)$. $c \in V \Rightarrow c \in \mathcal{O}_{1/n}(y)$. Nech $z \in \mathcal{O}_{1/n}(y)$.
 Potom $d(c, z) \leq d(c, y) + d(y, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow z \in \mathcal{O}_{1/n}(c)$; $V \subseteq \mathcal{O}_{1/n}(y) \subseteq \mathcal{O}_{2/n}(c) \subseteq U$. Teda
 $\exists V \in \mathcal{B} : c \in V \subseteq U$. $\mathcal{B}$ je báza v (X, τ) .

Veta 10.9. Nech X je regulárny T_1 -priestor (tj. T_3 -priestor). Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:

- (1) X je metrizovateľný.
- (2) X má σ -diskretnú bázu.
- (3) X má σ -lokálne konečnú bázu.

Dôkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2) sme dokázali. (2) $\Rightarrow$ (3) je triviálna. (3) $\Rightarrow$ (1) je náročná.

Veta 10.10. Každý kompaktný metrizovateľný priestor má spočítateľnú bázu (a teda je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $[0, 1]^{\mathbb{N}}$).

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}$ je σ -diskretná báza v X . $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$; $\mathcal{B}_n$ je diskretný systém. $\forall x \in X \exists U(x) \in \eta(x)$:
 $\{V \in \mathcal{B}_n, V \cap U(x) \neq \emptyset\}$ má najviac jeden prvok. $\{U(x), x \in X\}$ je otvorené pokrytie $X \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in X$
 tak, že $U(x_1) \cup \dots \cup U(x_k) = X$. $\emptyset \neq V \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \exists ! V \cap U(x_j) \neq \emptyset$. $\mathcal{B}_n \rightarrow \{1, \dots, j\}$, $V \mapsto j$, $V \cap U(x_j) \neq \emptyset$
 je prosté zobrazenie. Teda $\mathcal{B}_n$ je konečná, potom aj $\mathcal{B}$ je spočítateľná.

XI. CVIČENIA

1. Základné pojmy.

Cvičenie 1.1.

Nech X je množina a $\mathcal{V}$ je systém podmnožín množiny X spĺňajúci nasledujúce podmienky:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{V}$.
- (2) Ak $A, B \in \mathcal{V}$, tak $A \cup B \in \mathcal{V}$.
- (3) Ak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$, tak $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{V}$.

Dokážte, že $\tau_{\mathcal{V}} = \{X \setminus A, A \in \mathcal{V}\}$ je topológia na X a taká, že $\mathcal{V}$ je systém všetkých uzavretých množín v $(X, \tau_{\mathcal{V}})$.

Cvičenie 1.2.

Nech $\mathcal{S}$ je neprázdny systém topológií na množine X . Dokážte, že $\tau_{\mathcal{S}} := \bigcap_{\tau \in \mathcal{S}} \tau$ je topológia na X .

Cvičenie 1.3. Nájdite všetky topológie na $\{0, 1\}$ resp. na $\{0, 1, 2\}$.

2. Metrika.

Cvičenie 2.1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Dokážte, že $\tau_d = \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Cvičenie 2.2. Nech d je metrika na X . Dokážte, že $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$, $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ aj $d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$, $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ sú metriky na X a $\tau_d = \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Cvičenie 2.3.

Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel, $a, b \in \mathbb{N}$. Označme $\mathbb{N}_{a,b} = \{a + n \cdot b, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Dokážte, že:

- (1) Systém $\mathcal{B} = \{\mathbb{N}_{a,b}; a, b \in \mathbb{N}\}$ je báza topológie na $\mathbb{N}$.
- (2) V topológii $\tau_{\mathcal{B}}$ určenej bázou $\mathcal{B}$ sú množiny $\mathbb{N}_{a,b}$ súčasne otvorené aj uzavreté.
- (3) S využitím poznatku, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ existuje prvočíslo p také, že p delí n a s použitím topológie $\tau_{\mathcal{B}}$ dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Cvičenie 2.4. Nech $\mathcal{B}_1$ je báza topológie τ_1 a $\mathcal{B}_2$ je báza topológie τ_2 na X . Nech pre každé $V \in \mathcal{B}_1$ a $a \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}_2$ tak, že $x \in W \subseteq V$. Dokážte, že $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Cvičenie 2.5. Definujte pojem bázy (subbázy) pre systém všetkých uzavretých množín v topologickom priestore. Sformulujte analogické tvrdenia k tvrdeniam o báze (subbáze) topológie.

Cvičenie 2.6. Dokážte, že v ľubovoľnom topologickom priestore platí $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Uvedte príklad topologického priestoru a jeho podmnožín A, B tak, aby platilo $\overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Cvičenie 2.7. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $\text{Int } A = \bigcup \{U \in \mathcal{P}(X), U \text{ je otv., } U \subseteq A\}$. Dokážte:

- (1) $\text{Int } A \subseteq A$ pre $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.
- (2) $\text{Int } X = X$.
- (3) $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.
- (4) $\text{Int } (\text{Int } A) = \text{Int } A$.
- (5) A je ohraničená v X práve vtedy, keď $\text{Int } A = A$.

Cvičenie 2.8. Nech (X, τ) je topologický priestor, $A \subseteq X$. Bod $c \in X$ sa nazýva hraničný bod množiny A v (X, τ) , ak pre každé okolie U bodu c : $U \cap A \neq \emptyset$ aj $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. $b(A)$ označuje množinu všetkých hraničných bodov množiny A .

- (1) Určte $b(\mathbb{Q})$, $b(\mathbb{N})$, $b((0, 1))$, $b([0, 1])$ v $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $(\mathbb{R}, \tau_{\rightarrow})$, $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$.
- (2) Dokážte, že $b(A) = \bar{A} \cap X \setminus A$.
- (3) Dokážte, že $\bar{A} = A \cup b(A)$.

Cvičenie 2.9. *Nech (X, τ) je topologický priestor, $A \subseteq B \subseteq X$. Dokážte, že $(A, \tau|_A)$ je podpriestor $(B, \tau|_B)$ a $A, (\tau|_B)_A$ je podpriestor (X, τ) .*

Cvičenie 2.10. *Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre podmnožinu A priestoru (X, τ) tak, aby platilo:*

- (1) $M \subseteq A$ je otvorená v $(A, \tau|_A) \Leftrightarrow M$ je otvorená v (X, τ) .
- (2) $M \subseteq A$ je uzavretá v $(X, \tau|_A) \Leftrightarrow M$ je uzavretá v (X, τ) .

3. Zobrazenia.

Cvičenie 3.1. *Nech X, Y sú topologické priestory, $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $a \in X$, $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí a v X , $\mathcal{B}(f(a))$ je báza okolí $f(a)$ v Y . Dokážte, že nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

- (1) f je spojité v a .
- (2) Pre každé $V \in \mathcal{B}(f(a))$ existuje $U \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $f[U] \subseteq V$.
- (3) Pre každú podmnožinu $A \subseteq X$ ak $a \in \bar{A}$, tak $f(a) \in \overline{f[A]}$.

Cvičenie 3.2. *Dokážte, že ak $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sú sekvenciálne spojité zobrazenia, tak zobrazenie $g \circ f : X \rightarrow Z$ je sekvenciálne spojité.*

Cvičenie 3.3. *Dokážte, že ak $f : X \rightarrow Y$ je spojité v bode a a $g : Y \rightarrow Z$ je spojité v bode $f(a)$, tak $g \circ f : X \rightarrow Z$ je spojité v a .*

Cvičenie 3.4. *Nech τ, τ' sú topológie na X . Dokážte, že $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ je spojité zobrazenie práve vtedy, keď $\tau \supseteq \tau'$.*

Cvičenie 3.5. *Overte, že priestory $(\mathbb{R}, \tau_d)$ a $(\mathbb{R}, \tau_z)$ nie sú homeomorfné.*

Cvičenie 3.6. *Nech $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$. Nájdite všetky homeomorfizmy $(X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$.*

Cvičenie 3.7. *Overte, že platí:*

- (1) $\sin : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je uzavreté a nie je otvorené.
- (2) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ je otvorené, ale nie je uzavreté.

Cvičenie 3.8.

Nech $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou a $[-1, 1] \times [-1, 1]$ je tiež podpriestor $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou. Ukážte, že D_2 je homeomorfný s $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Cvičenie 3.9. *Dokážte, že ak $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$ sú vnorenia, tak $g \circ f : X \rightarrow Z$ je vnorenie.*

Cvičenie 3.10. *Nech $f : X \rightarrow Y$ je faktorové zobrazenie, A je podpriestor X , $f[A]$ je podpriestor Y . Ukážte na príklade, že $f|_A : A \rightarrow f[A]$ nemusí byť faktorové zobrazenie.*

Cvičenie 3.11. *Nech $f : X \rightarrow Y$ je faktorové zobrazenie, $B \subseteq Y$. Dokážte, že ak B je uzavreté alebo otvorené v Y , tak zobrazenie $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \rightarrow B$ je faktorové zobrazenie.*

Cvičenie 3.12. *Dokážte, že zobrazenia $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a_1, \dots, a_n) = \max\{a_1, \dots, a_n\}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(a_1, \dots, a_n) = \min\{a_1, \dots, a_n\}$ sú spojité.*

Cvičenie 3.13. *Nech (X, d_1) , (Y, d_2) sú metrické priestory. Dokážte, že $d : (X, Y) \times (X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, $d((a, b), (c, d)) = d_1(a, c) + d_2(b, d)$ je metrika na $X \times Y$. Ďalej dokážte, že $(X \times Y, \tau_d) = (X, \tau_{d_1}) \times (Y, \tau_{d_2})$.*

Cvičenie 3.14. *Nech X, Y sú priestory a $X \times Y$ je ich topologický súčin. Dokážte, že:*

- (1) Pre každé $a \in X$ je podpriestor $\{a\} \times Y$ priestoru $X \times Y$ homeomorfný s Y .
- (2) Pre každé $b \in Y$ je podpriestor $X \times \{b\}$ priestoru $X \times Y$ homeomorfný s X .

Cvičenie 3.15. *Nech $f, g : X \rightarrow Y$ sú spojité zobrazenia, Y je T_2 -priestor a $E = \{a \in X, f(a) = g(a)\}$. Dokážte, že E je uzavretá podmnožina X .*

4. Faktorové priestory.

Cvičenie 4.1. *Nech $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^2$ a $I = [0, 1]$ je podpriestor $\mathbb{R}$.*

- (1) *Nech E je relácia ekvivalencie na I taká, že $xEy \Leftrightarrow x = y$ alebo $\{x, y\} = \{0, 1\}$. Dokážte, že faktorový priestor I/E je homeomorfný s S^1 .*
- (2) *Nech E je relácia ekvivalencie na $I \times I$ taká, že $(x, y)E(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$ alebo $(y = y' \wedge \{x, x'\} = \{0, 1\})$. Dokážte, že $(I \times I)/E$ je homeomorfný s priestorom $S^1 \times I$.*
- (3) *Nech E je relácia ekvivalencie na $I \times I$ taká, že $(x, y)E(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \vee (y = y' \wedge \{x, x'\} = \{0, 1\}) \vee (x = x' \wedge \{y, y'\} = \{0, 1\})$. Dokážte, že $(I \times I)/E$ je homeomorfný s priestorom $S^1 \times S^1$.*

Cvičenie 4.2. *Dokážte, že X je T_2 -priestor práve vtedy, keď podmnožina $\Delta_x = \{(x, x); x \in X\}$ priestoru $X \times X$ je uzavretá v $X \times X$.*

Cvičenie 4.3. *Nech X, Y sú priestory, Y je T_2 -priestor a $f : X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie. Dokážte, že potom množina $\{(x, f(x)), x \in X\}$ je uzavretá v $X \times Y$. Platí obrátené tvrdenie?*

Cvičenie 4.4. *Nech $\forall \alpha \in I : M_\alpha$ je podpriestor X_α . Dokážte, že $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ je podpriestor $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.*

Cvičenie 4.5. *Nech $X = \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$. Dokážte, že ak $\forall \alpha \in I : X_\alpha$ je T_1 ($T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$, regulárny, úplne regulárny, normálny) tak aj X je T_1 ($T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$, regulárny, úplne regulárny, normálny).*

Cvičenie 4.6. *Nech $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1, f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ sú spojité zobrazenia. Dokážte, že potom aj $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, (f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ je spojité zobrazenie.*

Cvičenie 4.7. *Nech $X = \prod X_\alpha$ a $\forall \alpha \in I$ je $X_\alpha \neq \emptyset$. Zistite, či platí: ak X je (úplne) regulárny, tak $\forall \alpha \in I$ X_α je (úplne) regulárny.*

Cvičenie 4.8. *Ukážte, že:*

- (1) *Každý uzavretý podpriestor normálneho priestoru je normálny priestor.*
- (2) *X je normálny $\Leftrightarrow$ pre všetky otvorené množiny U, V v X také, že $U \cup V = X$ existujú uzavreté podmnožiny A, B priestoru X také, že $A \subseteq U, B \subseteq V$ a $A \cup B = X$.*
- (3) *Ak X je normálny a $f : X \rightarrow Y$ je surjektívne, spojité, uzavreté zobrazenie, tak Y je normálny.*
- (4) *Nájdite príklad faktorového zobrazenia $f : X \rightarrow Y$ takého, že X je normálny a Y nie je normálny. (Návod: 3-prvkový nenormálny, faktorové zobrazenie.)*

5. Konvergencia.

Cvičenie 5.1. *Zistite, či nasledujúci systém podmnožín danej množiny je báza filtra, resp. filter na danej množine.*

- (1) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}/A \text{ je spočítateľná}\}$ v $\mathbb{R}$.
- (2) $\mathcal{F}_2 = \{(a, \infty), a \in \mathbb{Q}\}$ v $\mathbb{R}$.
- (3) $\mathcal{B}(a)$ – báza okolí bodu a v topologickom priestore X .

Cvičenie 5.2. *Určte všetky hromadné body, resp. limity daných báz filtrov, resp. filtrov v daných topologických priestoroch*

- (1) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}/A \text{ je spočítateľná}\}$ v $\mathbb{R}$ s obyčajnou topológiou.
- (2) $\mathcal{F}_2 = \{(a, \infty), a \in \mathbb{Q}\}$ v $\mathbb{R}$ s obyčajnou topológiou a v $\mathbb{R}$ s topológiou $\tau_{\rightarrow} = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

Cvičenie 5.3. *Nech X je topologický priestor. Dokážte, že nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

- (1) *X je kompaktný.*
- (2) *Každý filter v X má hromadný bod.*
- (3) *Každý ultrafilter v X konverguje.*

Cvičenie 5.4. *Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{F}$ je filter na X . Nech X_a je topologický priestor definovaný na množine priestoru X nasledovne: U je otvorené v $X_a \Leftrightarrow U \subseteq X/\{a\}$ alebo existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $U = F \cup \{a\}$. Nech $\text{id}_X : X_a \rightarrow X$ je identické zobrazenie. Dokážte, že $\mathcal{F} \rightarrow a \Leftrightarrow \text{id}_X : X_a \rightarrow X$ je spojité zobrazenie.*

Cvičenie 5.5. Dokážte, že priestor X je T_2 -priestor práve vtedy, keď každá siet' v X má najviac jednu limitu.

Cvičenie 5.6. Nech $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie, X, Y sú topologické priestory, $a \in X$. Dokážte, že f je spojitý v a práve vtedy, keď pre ľubovoľnú siet' $(x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v X taká, že $x_\sigma \rightarrow a$ platí $f(x_\sigma) \rightarrow f(a)$.

Cvičenie 5.7. Nech $X = \prod X_\alpha$ je topologický súčin priestorov, $(x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je siet' v X . Dokážte, že $x_\sigma \rightarrow a$ v $X \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: p_\alpha(x_\sigma) \rightarrow p_\alpha(a)$.