VŠEOBECNÁ TOPOLÓGIA

GYÜRKI PIŠTA

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK

2002/2003

Contents

References

[1] J.Y. Nagata, *Modern General Topology.*
[2] R. Engelking, *General Topology.*
[3] A. Pultz, *Topologie a geometrie.*
[4] J.L. Kelley, *General Topology.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

I. ZÁKLADNÉ POJMY

Definícia 1.1.

Nech X je množina. Potom systém $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na množine X ak platí:

(1) $\emptyset, X \in \tau$
(2) Ak $U, V \in \tau$, tak $U \cap V \in \tau$
(3) Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau$, tak $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U \in \tau$

Ak τ je topológia na X, tak (X, τ) sa nazýva *topologický priestor.* Prvky τ sa nazývajú *otvorené množiny.*

Príklady.

1.1. $\emptyset, X$ sú vždy topológie; $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ je topológia a nazýva sa *indiskrétna topológia* na X.
1.2. X; $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ je topológia na X a nazýva sa *diskrétna topológia.*
1.3. $\mathbb{R}$; $\tau_d = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ \forall a \in U\ \exists \epsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U\}$ *obvyklá (štandardná, kanonická) topológia* na $\mathbb{R}$.
1.4. $\mathbb{R}$; $\tau_z = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ \forall a \in U\ \exists c < a : (c, a] \subseteq U\}$ topológia na $\mathbb{R}$. $U, V \in \tau_z$, $a \in U \cap V$, $c_1 < a : (c_1, a] \subseteq U$, $c_2 < a : (c_2, a] \subseteq V$, $c = \max\{c_1, c_2\} < a$, $(c, a] \subseteq V \cap U$, $\tau_d \subseteq \tau_z$.
1.5. $\mathbb{R}$; $\tau_{\rightarrow} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$ – topológia na $\mathbb{R}$.
1.6. $\mathbb{R}$; $\tau_{cof} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ \mathbb{R} \setminus U$ je konečná $\} \cup \{\emptyset\}$ – *kofinitná topológia* .

Metrika: $d : X \times X \to \mathbb{R}$:

(1) $\forall a, b \in X : d(a, b) \geq 0$
(2) $\forall a, b \in X : d(a, b) = d(b, a)$
(3) $\forall a, b, c \in X : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$
(4) $\forall a, b \in X : d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

Príklady.

1.7. Nech (X, d) je metrický priestor. Potom $\tau_d = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq U\}$ – je topológia daná metrikou d.
1.8. $(\mathbb{R}, \tau_d); (a, b)$ je otvorená, ale $(a, b]$ nie je otvorená.
1.9. $(\mathbb{R}, \tau_z); (a, b)$ je otvorená, a $(a, b]$ tiež.

Definícia 1.2. Nech (X, τ) je topologický priestor. Podmnožina $A \subseteq X$ sa nazýva *uzavretá* v (X, τ), ak $X \setminus A \in \tau$.

Veta 1.1. *Nech (X, τ) je topologický priestor. Potom platí:*

(1) *$X, \emptyset$ sú uzavreté.*
(2) *Ak A, B sú uzavreté v (X, τ), tak $A \cup B$ je uzavretá v (X, τ).*
(3) *Ak $\mathcal{L}$ je ľubovoľný systém uzavretých množín, tak $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{L}} A$ je uzavretá množina.*

Príklady.

1.10. $[a, b]$ je v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou uzavretá.
1.11. $(a, b]$ nie je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_d)$.
1.12. $(a, b]$ je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_z)$.

Definícia 1.3. Nech (X, τ) je topologický priestor. Potom systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ sa nazýva *báza* topológie, ak pre každé $U \in \tau$ existuje $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{L}} V$.

Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie, tak aj $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ je báza topológie.

Veta 1.2. *Systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ je báza v $(X, \tau) \Leftrightarrow$ pre každé $U \in \tau$ a pre každé $x \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V \subseteq U$.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $U \in \tau$ a $x \in U$. $\exists \mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$, $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{L}} V$. Potom existuje $V \in \mathcal{L}$, $x \in V$. Platí $V \in \mathcal{B}$, $V \subseteq U$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $U \in \tau$ a $x \in U$. $\exists V_x \in \mathcal{B} : x \in V_x \in \mathcal{B}$. $\mathcal{L} = \{V_x, x \in U\} \subseteq \mathcal{B}$; $\bigcup\limits_{x \in U} V_x = U$.

Príklady.

1.13. $(\mathbb{R},\tau_d)$; $\mathcal{B}=\{(a,b): a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ – báza τ_d. $U\in\tau_d,\ x\in U,\ x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq U$.

1.14. $(\mathbb{R},\tau_d)$; $\mathcal{B}=\{(a,b): a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ je báza τ_d.

1.15. $(\mathbb{R},\tau_z)$; $\mathcal{B}=\{(a,b]: a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ je báza τ_z.

1.16. $(\mathbb{R},\tau_z)$; $\mathcal{B}=\{(a,b]: a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$. Je to báza τ_z ?

1.17. (X,τ_{dis}); $\mathcal{B}=\{\{a\}, a\in X\}$ je báza (X,τ_{dis}).

1.18. (X,d) je metrický priestor. $\mathcal{B}=\{\mathcal{O}_\varepsilon(x);\ x\in X,\ \varepsilon>0\}$ a $\mathcal{B}=\{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x);\ x\in X,\ n\in\mathbb{N}\}$ sú bázy priestoru (X,τ_d).

Veta 1.3. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie v priestore X. Potom platí:*

(i) $\bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}} V = X$.

(ii) *Ak $V_1,V_2\in\mathcal{B}$ a $x\in V_1\cap V_2$, tak existuje $V_3\in\mathcal{B}$ tak, že $x\in V_3\subseteq V_1\cap V_2$.*

Veta 1.4. *Nech $\mathcal{B}$ je systém podmnožín množiny X, ktorý má vlastnosti (i) a (ii). Potom systém množín $\tau_{\mathcal{B}}=\{U\in\mathcal{P}(X): \forall a\in U\ \exists V\in\mathcal{B}: a\in V\subseteq U\}$ je topológia na X a $\mathcal{B}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}}$.*

Dôkaz. $\emptyset\in\tau_{\mathcal{B}}$, $X\in\tau_{\mathcal{B}}$ z (i). Nech $U_1,U_2\in\tau_{\mathcal{B}}$. Nech $a\in U_1\cap U_2$. Potom $a\in U_1$, $a\in U_2$ a existujú $V_1,V_2\in\mathcal{B}$ tak, že $a\in V_1\subseteq U_1$, $a\in V_2\subseteq U_2$, $a\in V_1\cap V_2$. Potom $\exists V_3\in\mathcal{B}$: $a\in V_3\subseteq V_1\cap V_2\subseteq U_1\cap U_2\Rightarrow U_1\cap U_2\in\tau_{\mathcal{B}}$. $\mathcal{S}\subseteq\tau_{\mathcal{B}}$, $a\in W=\bigcup\limits_{U\in\mathcal{S}} U$. Potom $\exists U\in\mathcal{S},\ a\in U\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}\exists V\in\mathcal{B},\ a\in V\subseteq U\subseteq W\Rightarrow W\in\tau_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}\subseteq\tau_{\mathcal{B}}$, $V\in\mathcal{B}\Rightarrow\forall a\in U\ \exists V\in\mathcal{B}\Rightarrow V\in\tau_{\mathcal{B}}$. $U\in\tau_{\mathcal{B}}\Leftrightarrow\forall a\in U\ \exists V\in\mathcal{B}: a\in V\subseteq U$.

Príklady.

1.19. X, $\mathcal{B}=\{\{a\},\ a\in X\}\quad \tau_{\mathcal{B}}=\tau_{dis}$

1.20. Nech $(A,\leq)$ je usporiadaná množina a má aspoň 2 prvky. Pre $a<b,\ a,b\in A: (a,b)=\{x\in A, a<x<b\}$, $[a)=\{x\in A,\ x<a\}$, $(b]=\{x\in A,\ x>b\}$. $\mathcal{B}=\{(a,b);\ a,b\in A,\ a<b\}\cup\{[a),\ a\in A\}\cup\{(b],\ b\in A\}$ je báza topológie na A. $\tau_{\mathcal{B}}=\tau_{\leq}$ je topológia určená usporiadaním $\leq$.

Definícia 1.4. Nech (X,τ) je topologický priestor. Systém $\mathcal{S}\subseteq\tau$ sa nazýva *subbáza* topológie τ, ak $\{\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i,\ k\in\mathbb{N},\ W_i\in\mathcal{S}\}$ je báza topológie τ.

Príklad.

1.21. $(\mathbb{R},\tau_d)\qquad \mathcal{S}=\{(-\infty,a],\ a\in\mathbb{R}\}\cap\{(b,\infty),\ b\in\mathbb{R}\}$ – subbáza τ_d.

$\{\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i,\ k\in\mathbb{N},\ W_i\in\mathcal{S}\}=\mathcal{S}\cap\{(a,b);\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}\cup\{\emptyset\}$; $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\supseteq\mathcal{B}=\{(a,b),\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$.

Veta 1.5. *Ak $\mathcal{S}$ je subbáza topológie τ na X, tak $\bigcup\limits_{V\in\mathcal{S}} V=X$.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}=\{\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i,\ k\in\mathbb{N},\ W_i\in\mathcal{S}\}$ je báza τ. Potom $\bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V=X$. Nech $\bigcup\limits_{W\in\mathcal{S}} W=Y\subsetneq X$, $\forall V\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\ \exists W\in\mathcal{S}: V\subseteq W\Rightarrow \bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V\subseteq\bigcup\limits_{W\in\mathcal{S}} W=Y\subsetneq X$ spor s (i).

Veta 1.6. *Nech $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ a $\bigcup\limits_{W\in\mathcal{S}} W=X$. Potom $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}=\{\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i,\ k\in\mathbb{N},\ W_i\in\mathcal{S}\}$ splňa (i), (ii) a $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ je určená bázou $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je topológia na X pre ktorú $\mathcal{S}$ je subbáza.*

Dôkaz.
$\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\Rightarrow\bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} V\supseteq\bigcup\limits_{W\in\mathcal{S}} W=X\Rightarrow$ (i) pre $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Ak $V,V'\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\Rightarrow V\cap V'\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\Rightarrow$ platí (ii) pre $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Potom $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}=\{U\in\mathcal{P}(X),\ \forall a\in U\ \exists V\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}: a\in V\subseteq U\}$ je topológia na X a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}\Rightarrow\mathcal{S}$ je subbáza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$. $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\subseteq\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}\Rightarrow\mathcal{S}\subseteq\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ a $\{\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i,\ k\in\mathbb{N},\ W_i\in\mathcal{S}\}=\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}\Rightarrow\mathcal{S}$ je subbáza $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$.

$$\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \{U \in \mathcal{P}(X),\ \forall a \in U,\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists W_1, \cdots, W_k \in \mathcal{S} : a \in \bigcap_{i=1}^{k} W_i \subseteq U\}.$$

Definícia 1.5. Nech (X, τ) je topologický priestor, $p \in X$. Každá otvorená množina $U \in \tau$ pre ktorú $p \in U$ sa nazýva *okolím* bodu p. Systém všetkých okolí bodu p: $\eta(p)$.

Platí: Ak $U, U' \in \eta(p) \Rightarrow U \cap U' \in \eta(p)$.

Definícia 1.6. Nech $p \in X$, (X, τ) je topologický priestor. Systém $\mathcal{B}(p) \subseteq \eta(p)$ sa nazýva *báza okolí* bodu p ak $\forall U \in \eta(p)\ \exists V \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V \subseteq U$.

Príklad.

1.22. (X, d) je metrický priestor, $p \in X$. $\mathcal{B}(p) = \{\mathcal{O}_\varepsilon(p),\ \varepsilon > 0\}$ – báza okolí bodu p v (X, τ_d).

1.23. $\mathcal{B}'(p) = \{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(p),\ n \in \mathbb{N}\}$ – báza okolí bodu p v (X, τ_d).

1.24. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ $\mathcal{B}(p) = \{(p - \varepsilon, p],\ \varepsilon > 0\}$ – báza okolí v p.

1.25. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$ – báza okolí p.

Veta 1.7.

(1) *Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ) a $p \in X$, tak $\mathcal{B}(p) = \{V \in \mathcal{B},\ p \in V\}$ je báza okolí v p.*

(2) *Ak pre $\forall p \in X$ $\mathcal{B}(p)$ je báza okolí v (X, τ), tak $\bigcup_{p \in X} \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ).*

Dôkaz.

(1) Nech U je okolie p. Teda $U \in \tau$ a $p \in U$. Potom existuje $V \in \mathcal{B} : p \in V \subseteq U$. $V \in \mathcal{B}(p),\ V \subseteq U$.

(2) Nech U je otvorená množina tj. $U \in \tau$, $p \in U$. $\exists V \in \mathcal{B}(p) \subseteq B,\ V \subseteq U,\ p \in V \subseteq U$.

Veta 1.8. *Nech (X, τ) je priestor a pre každé $p \in X$ je daná báza okolí $\mathcal{B}(p)$. Potom platí:*

(i) $\forall p \in X : \mathcal{B}(p) \neq \emptyset$

(ii) $\forall V \in \mathcal{B}(p)$ $p \in V$

(iii) *Ak $V_1 \cap V_2$ je okolie p potom $\exists V_3 \in \mathcal{B}(p) : V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.*

(iv) $\forall V \in \mathcal{B}(p)\ \forall q \in V\ \exists W \in \mathcal{B}(q) : W \subseteq V$.

(v) *U je otvorená v $(X, \tau) \Leftrightarrow \forall p \in U\ \exists V \in \mathcal{B}(p) : V \subseteq U$.*

Dôkaz.

(i) $X \in \eta(p) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p)\ V \subseteq X \Rightarrow \mathcal{B}(p) \neq \emptyset$.

(iii) $V_1 \cap V_2$ je okolie $p \Rightarrow \exists V_3 \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

(iv) Nech $V \in \mathcal{B}(p)$, $q \in V$. $V \in \tau \Rightarrow V$ je okolie $q \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}(q) : W \subseteq V$.

(v) $\boxed{\Rightarrow}$: U je otvorená a $p \in U$. Potom $U \in \eta(p) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p)$ tak, že $V \subseteq U$.

$\boxed{\Leftarrow}$: $\forall q \in U\ \exists V_q \in \mathcal{B}(q) : V_q \subseteq U$. $q \in V_q$, $V_q \in \tau$, $U = \bigcup_{q \in V} V_q \in \tau$.

Veta 1.9. *Nech X je množina a $\forall p \in X$ je daný systém $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{P}(X)$ pričom sú splnené podmienky (i) až (iv). Potom $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X),\ \forall p \in U\ \exists V \in \mathcal{B}(p),\ V \subseteq U\}$ je topológia na X taká, že pre všetky $p \in X$ je $\mathcal{B}(p)$ báza okolí bodu p.*

Dôkaz. $\emptyset, X \in \tau$; $U, U' \in \tau$ $p \in U \cap U' \Rightarrow \exists V, V' \in \mathcal{B}(p),\ V \subseteq U,\ V' \subseteq U' \overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} \exists V'' \in \mathcal{B}(p) :$ $V'' \subseteq V' \cap V \Rightarrow V'' \subseteq U \cap U'$. $U \cap U' \in \tau$. Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau$, tak $\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \in \tau$ je zrejmé. Nech $p \in X$. Chceme ukázať, že $\mathcal{B}(p)$ je báza okolí p v (X, τ).

1. $\mathcal{B}(p) \subseteq \eta(p) \subseteq \tau$. Nech $V \in \mathcal{B}(p)$, $q \in V$. Podľa (iv) $\exists W \in \mathcal{B}(q)\ W \subseteq V \Rightarrow V \in \tau$. Podľa (ii) $\forall V \in \mathcal{B}(p) : p \in V$.

2. $\forall U \in \eta(p)\ \exists V \in \mathcal{B}(p)\ V \subseteq U$. $U \in \eta(p) \Rightarrow U \in \tau$; $p \in U \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p) \Rightarrow V \subseteq U$.

Príklad.

1.26. $P_1 {=} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \tau_1)$ $\mathcal{O}_\varepsilon(a, b) {=} \{(c, d) {\in} \mathbb{R} {\times} \mathbb{R}_0^+;\ \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} < \varepsilon\}$. Ak $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ a $b{>}0$ tak $\mathcal{B}(a, b) {=} \{\mathcal{O}_\varepsilon(a, b);\ \varepsilon > 0\}$. $\tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0) {=} \{(c, d) {\in} \mathbb{R} {\times} \mathbb{R}_0^+; \sqrt{(a-c)^2 + d^2} < \varepsilon,\ d > 0\} \cap \{(a, 0)\}$. $\mathcal{B}(a, 0) {=} \{\tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0); \varepsilon > 0\}$.

1.27. $P_2 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \tau_2)$, $\mathcal{B}(a, b) = \{\mathcal{O}_\varepsilon(a, b),\ \varepsilon > 0\}$ pre $b > 0$. $\mathcal{B}(a, 0) = \{\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0),\ \varepsilon > 0\}$, $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, 0) {=} \tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon(a, \varepsilon) \cup \{(a, 0)\}$.

Definícia 1.7. Nech $A \subseteq (X,\tau)$. Potom množina $\bar{A} = \bigcap\{V \in \mathcal{P}(X);\ V$ je uzavretá v (X,τ) a $A \subseteq V\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A.

Veta 1.10. *Nech A, B sú podmnožiny v (X,τ). Potom platí:*

(1) *$A \subseteq \bar{A}$ a $\bar{A}$ je uzavretá množina.*
(2) *Ak V je uzavretá v (X,τ) a $A \subseteq V$, tak $\bar{A} \subseteq V$.*
(3) *$\bar{\emptyset} = \emptyset$.*
(4) *Ak $A \subseteq B$, tak $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.*
(5) *$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*
(6) *B je uzavretá $\Leftrightarrow \bar{B} = B$.*
(7) *$\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.*

Dôkaz.

(4) $A \subseteq B \subseteq \bar{B},\ A \subseteq \bar{B}$ – uzavretá $\overset{(2)}{\Rightarrow} \bar{A} \subseteq \bar{B}$.
(5) $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ je uzavretá $\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$; $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
(6) $\boxed{\Rightarrow}$: $B \subseteq B$ – uzavretá $\Rightarrow \bar{B} \subseteq B$. Podľa (1) platí $B \subseteq \bar{B}$.
$\boxed{\Leftarrow}$: $B = \bar{B} \overset{(1)}{\Rightarrow} B$ je uzavretá.
(7) $\bar{A}$ je uzavretá $\Rightarrow \overline{(\bar{A})} = \overline{A}$.

Veta 1.11. *Nech X je množina a $cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X);\ A \mapsto clA$ je zobrazenie, ktoré má nasledujúce vlastnosti:*

(cl 1) *$\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq clA$.*
(cl 2) *$cl\ \emptyset = \emptyset$.*
(cl 3) *$cl\ (A \cup B) = cl\ A \cup cl\ B$.*
(cl 4) *$cl\ (clA) = cl\ A$.*

Potom $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X),\ cl\ (X \setminus U) = X \setminus U\}$ je topológia na X a pre každé $A \in \mathcal{P}(X) : cl\ A = \bar{A}$.

Veta 1.12. *Nech A je podmnožina X, (X,τ) je topologický priestor a $p \in X$ a $\mathcal{B}(p)$ je báza okolí bodu p. Potom $p \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}(p) : V \cap A \neq \emptyset$.*

Dôkaz.
$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $\exists V \in \mathcal{B}(p) : V \cap A = \emptyset$. Potom $A \subseteq X \setminus V$ – uzavretá. Potom $\bar{A} \subseteq X \setminus V \Rightarrow p \notin \bar{A}$.
$\boxed{\Leftarrow}$: $p \notin \bar{A}$ – uzavretá. Potom $p \in X \setminus \bar{A}$ – otvorená $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(p)\ V \subseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow V \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$. □

Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$ potom $Int\ A = \bigcup\{U \in \mathcal{P}(X),\ U$ je otvorená, $U \subseteq A\}$.

Príklad.
1.28. $Int\ [0,1] = (0,1),\ Int\ \mathbb{Q} = \nexists\ (\neq \emptyset)$

Definícia 1.8. Priestor X sa nazýva *separabilný*, ak v X existuje spočitateľná hustá podmnožina.

Definícia 1.9. Množina $A \subseteq X$ je *hustá* v X , ak jej uzáver je celý topologický priestor. $\bar{A} = X$.

Veta 1.13. *Podmnožina A priestoru X, ktorého báza je $\mathcal{B}$. Potom $A \subseteq X$ je hustá v $X \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}$, $V \neq \emptyset : V \cap A \neq \emptyset$.*

Dôkaz.
$\boxed{\Rightarrow}$: Nech existuje $V \in \mathcal{B},\ V \neq \emptyset$ tak, že $V \cap A = \emptyset$. Potom $A \subseteq X \setminus V$ – uzavretá množina. Potom $\bar{A} \subseteq X \setminus V \neq X \Rightarrow A \neq X \Rightarrow A$ nie je hustá v X.
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech A nie je hustá v X tj. $\bar{A} \neq X$. Potom $X \setminus \bar{A} \neq \emptyset,\ X \setminus \bar{A}$ je otvorená. Nech $c \in X \setminus \bar{A}$. $\exists V \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in V \subseteq X \setminus \bar{A}$. $V \neq \emptyset,\ V \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$.

Príklady.
1.29. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},\ (\mathbb{R}, \tau_d) \quad \mathcal{B} = \{(a,b),\ a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ – báza τ_d. $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
1.30. $(\mathbb{R}, \tau_z),\ \mathcal{B} = \{(a,b],\ a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\} \quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
1.31. $(\mathbb{R}, \tau_{dis}),\ \mathcal{B} = \{\{a\},\ a \in \mathbb{R}\} \quad \bar{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$.

Definícia 1.10. Hovoríme, že X spĺňa *1. axiómu spočitateľnosti* (resp. *2. axiómu spočitateľnosti*), ak pre každé $a \in X$ existuje spočitateľná báza okolí v a. (resp. X má spočitateľnú bázu topológie.)

Príklady.

1.32. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(\mathbb{R}, \tau_z)$ – separabilné, $\mathbb{Q}$ – spočitateľná hustá. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ nie je separabilný.

1.33. $(\mathbb{R}, \tau_{cofin})$, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$ – separabilný, $\mathbb{N}$ – uzavretá množina.

1.34. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, (X, d) – metrický priestor. (X, τ_d) spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti. $\forall a \in X : \mathcal{B}(a) = \{\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(a);\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.35. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ $\quad a \in \mathbb{R} : \mathcal{B}(a) = \{(a - \frac{1}{n},\ a],\ n \in \mathbb{N}\}$ – báza okolí a spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti.

1.36. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ $\quad \mathcal{B}(a) = \{\{a\}\}$ – spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti.

1.37. $(\mathbb{R}, \tau_{cof}), 0 \in \mathbb{R}$. Nech $\mathcal{B}(0)$ je spočitateľná báza okolí 0. $\mathcal{B}(0) = \{V_1, \cdots, V_n, \cdots\}$ spočitateľný systém. $\forall n \in \mathbb{N} : X \setminus V_n$ je konečná. $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, $\quad X \setminus A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus V_n)$ spočitateľná, potom A je nespočitateľná. Nech $a{\in}A$, $a{\neq}0$. Potom $W{=}\mathbb{R} \setminus \{a\}$ je okolie bodu 0. $\forall n{\in}\mathbb{N}\ a{\in}V_n \Rightarrow V_n \cap \mathbb{R} \setminus W \neq \emptyset \Rightarrow V_n \not\subseteq W$ spor s tým, že $\mathcal{B}(0)$ je báza. Teda $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ nespĺňa 1. axiómu spočitateľnosti.

1.38. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ $\quad \mathcal{B} = \{(a, b);\ a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ – spočitateľná báza v $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $U \in \tau_d,\ a \in U : \exists \varepsilon{>}0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$. $\exists r \in (a - \varepsilon, a) \cap \mathbb{Q}$; $\exists s \in (a, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. $a \in \underbrace{(r, s)}_{\in\mathcal{B}} \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$.

1.39. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ nemá spočitateľnú bázu. $\mathcal{B}$ – ľubovoľná báza τ_{dis}. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ je otvorená $a \in \{a\} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B},\ a \in V \subseteq \{a\} \Rightarrow V = \{a\} \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{B}$. $card\ \mathcal{B} \geq \mathcal{C}$.

Veta 1.14.

(1) *Ak X spĺňa 2. axiómu spočitateľnosti, tak spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti.*
(2) *Ak X spĺňa 2. axiómu spočitateľnosti, tak je separibilný.*

Dôkaz.

(1) Nech $\mathcal{B}$ je spočitateľná báza v X. Potom $\forall a \in X$, $\mathcal{B}(a) = \{V \in \mathcal{B};\ a \in V\}$ je spočitateľná báza okolí a.
(2) Nech $\mathcal{B}$ je spočitateľná báza X. $\forall V \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ vyberieme $x_V \in V$. $A = \{x_V,\ V \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\}$ spočitateľná $A \subseteq X$, $\forall V \in \mathcal{B}$, $V \neq \emptyset$, $V \cap A \ni x_V \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. Teda $\bar{A} = X$.

Príklady.

1.40. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti, nespĺňa 2. axiómu spočitateľnosti.

1.41. $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ separabilný a nespĺňa 2. axiómu spočitateľnosti ani 1. axiómu spočitateľnosti.

1.42. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ separabilný, spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti, ale nespĺňa 2. axiómu spočitateľnosti.

Veta 1.15. *Nech (X, τ) je topologický priestor, $Y{\subseteq}X$. Potom systém množín $\tau\restriction_Y = \{V \in \mathcal{P}(Y),\ \exists U{\in}\tau : V = Y \cap U\}$ je topológia na Y.*

Dôkaz. $\emptyset, Y \in \tau\restriction_Y$. Nech $V_1, V_2 \in \tau\restriction_Y$. Potom $\exists U_1, U_2 \in \tau$ tak, že $V_1 = Y \cap U_1$, $V_2 = Y \cap U_2$. $V_1 \cap V_2 = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2)$. Nech $\mathcal{S} \subseteq \tau\restriction_Y$. Potom $\forall V \in \mathcal{S}$ vyberme $U_V \in \tau$ tak, že $V = Y \cap U_V$. $\bigcup\limits_{V\in\mathcal{S}} V = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{S}} (Y \cap U_V) = Y \cap (\bigcup\limits_{V\in\mathcal{S}} U_V) \Rightarrow \bigcup\limits_{V\in\mathcal{S}} V \in \tau\restriction_Y$.

Definícia 1.11. Nech (X, τ) je priestor, $Y \subseteq X$. Potom priestor $(Y, \tau\restriction_Y)$ sa nazýva *podpriestor* (X, τ).

Príklady.

1.43. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $[0, 1]$ – podpriestor $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $(\frac{1}{2}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{1}{2}, 2)$. $(\frac{1}{2}, 1]$ je otvorená v $[0, 1]$.

1.44. $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(0, 1]$ – podpriestor $(\mathbb{R}, \tau_d)$. $(0, \frac{1}{2}]$ je uzavretá v $(0, 1]$.

Veta 1.16. *Nech (X, τ) je topologický priestor a $(Y, \tau\restriction_Y)$ je podpriestor (X, τ). Potom platí:*

(1) *Podmnožina priestoru $(Y, \tau\restriction_Y)$ je uzavretá $\Leftrightarrow$ existuje uzavretá podmnožina B v (X, τ) tak, že $A = Y \cap B$.*
(2) *V je okolie bodu b v $(Y, \tau\restriction_Y) \Rightarrow$ existuje okolie U bodu b v (X, τ) tak, že $V = Y \cap U$.*
(3) *Ak $b \in Y$, $\mathcal{B}(b)$ je báza okolí b v (X, τ), tak $\mathcal{B}_Y(b) = \{Y \cap V,\ V \in \mathcal{B}(b)\}$ je báza okolí b v $(Y, \tau\restriction_Y)$.*
(4) *Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie v (X, τ), tak $\mathcal{B}\restriction_Y = \{Y \cap V,\ V \in \mathcal{B}\}$ je báza topológie v $(Y, \tau\restriction_Y)$.*
(5) *Ak $A \subseteq Y$, tak $\bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$.*

Dôkaz.

(4) $\mathcal{B}\restriction_Y \subseteq \tau\restriction_Y$ $U \in \tau\restriction_Y$, $c \in U$. $\exists U' \in \tau$, $U = Y \cap U'$. $c \in U' \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B} : c \in V \subseteq U'$. $V \cap Y = W \in \mathcal{B}\restriction_Y$, $c \in W$, $W = V \cap Y \subseteq U' \cap Y = U$.

Dôsledok. Ak X má spočitateľnú bázu (resp. spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti) a Y je podpriestor X, tak Y má spočitateľnú bázu (resp. spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti).

Úloha. Nájsť v predchádzajúcich príkladoch separabilný priestor obsahujúci podpriestor, ktorý nie je separabilný.

Axiómy oddeliteľnosti.

Definícia 1.12. Priestor X sa nazýva

(1) T_0-*priestor*, ak pre $\forall a, b \in X,\ a \neq b$ existuje okolie U bodu a tak, že $b \notin U$ alebo existuje okolie V bodu b tak, že $a \notin V$.
(2) T_1-*priestor*, ak pre $\forall a, b \in X,\ a \neq b$ existuje okolie U bodu a tak, že $b \notin U$ a existuje okolie V bodu b tak, že $a \notin V$.
(3) T_2-*priestor (Hausdorffovský)*, ak pre ľubovoľné $a, b \in X,\ a \neq b,\ \exists U(a)$ a $V(b) : U \cap V = \emptyset$.

Tvrdenie. *Každý T_2-priestor je T_1-priestor; každý T_1-priestor je T_0-priestor.*

Príklady.

1.45. $(\{0,1\}, \tau_{ind})$ nie je T_0-priestor.

1.46. $(\{0,1\}, \tau_S)$ $\quad \tau_S = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ je T_0-priestor, ale nie je T_1-priestor. τ_S sa nazýva *Sierpinského priestor.*

1.47. $(\mathbb{R}, \tau_{\rightarrow})$ je T_0-priestor, ale nie je T_1-priestor.

1.48. $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$; $U = \mathbb{R} \setminus \{b\} \ni a,\ V = \mathbb{R} \setminus \{a\} \ni b$. Je to T_1-priestor, ale nie je T_2-priestor, lebo: $a \in U = \mathbb{R} \setminus K,\ b \in V =: \mathbb{R} \setminus L,\ U \cap V = \mathbb{R} \setminus (K \cup L) \neq \emptyset$.

1.49. (X, d) je metrický priestor. (X, τ_d) je T_2-priestor, lebo: $a, b \in X,\ a \neq b,\ d(a,b) = \delta > 0,\ \varepsilon > \frac{\delta}{2}$, $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(a) \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(b) = \emptyset$.

Veta 1.17. *X je T_1-priestor $\Leftrightarrow \forall a \in X \quad \{a\}$ je uzavretá.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $a \in X,\ \forall b \in X \setminus \{a\}$ existuje okolie U_b také, že $U_b \subseteq X \setminus \{a\}$ $U = \bigcup\limits_{b \in A} U_b = X \setminus \{a\} \Rightarrow$ $\{a\} = X \setminus U$ je uzavretá.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $a, b \in X,\ a \neq b,\ \{a\}, \{b\}$ uzavretá. $U = X \setminus \{b\}$ otvorená $a \in U,\ b \notin U, V = X \setminus \{a\}$ otvorená. $b \in V,\ a \notin V \Rightarrow X$ je T_1-priestor.

Veta 1.18. *Ak X je T_i-priestor $(i = 0, 1, 2)$ a Y je podpriestor X, tak Y je T_i-priestor.*

Dôkaz.

T_1: X je T_1-priestor. Nech $b \in Y$. $\{b\}$ je uzavretá v X. $\{b\} = Y \cap \{b\}$ uzavretá v Y. Y je T_1-priestor.

T_2: Nech $a, b \in Y,\ a \neq b$. Existujú otvorené $U, V \in X$ také, že $a \in U,\ b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$, $U' = U \cap Y,\ V' = V \cap Y$ sú otvorené v Y. $a \in U',\ b \in V',\ U' \cap V' = \emptyset$, Y je T_2-priestor.

II. SPOJITÉ ZOBRAZENIA

Analýza: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f((a - \delta, a + \delta)) \leq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Definícia 2.1. Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva *spojité*, ak pre každú otvorenú množinu V priestoru Y je $f_{-1}(V) = \{a \in X,\ f(a) \in V\}$ otvorená v X.

Príklady.

2.1. $f : X \to Y,\ \forall a \in X : f(a) = b_0 \in Y$. (konštantné zobrazenie). V je otvorená v Y, ak $b_0 \in V$ tak $f_{-1}(V) = X$; ak $b_0 \notin V$ tak $f_{-1}(V) = \emptyset$.

2.2. X – diskrétny, Y – ľubovoľný, $f : X \to Y$ je ľubovoľné. Potom f je spojité.

2.3. X – ľubovoľný, Y – indiskrétny, $f : X \to Y$ je ľubovoľné. Potom f je spojité.

2.4. $f : (X, d) \to (Y, d')$ je spojité tak $f : (X, \tau_d) \to (Y, \tau'_d)$ je spojité.

2.5. $id_X : X \to X$ je spojité.

2.6. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_d) \to (\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je spojité.

2.7. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_z) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$ je spojité.

Poznámka. $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Veta 2.1. *Nech X, Y sú topologické priestory. Pre každé $a \in X \quad \mathcal{B}(a)$ je daná báza okolí a a pre každé $b \in Y$ je daná báza okolí $\mathcal{B}'(b)$ bodu b a $f : X \to Y$ je zobrazenie. Potom sú ekvivalentné:*

(1) *$f : X \to Y$ je spojité.*
(2) *Pre každú uzavretú podmnožinu B priestoru $Y \quad f_{-1}(B)$ je uzavretá v X.*
(3) *Pre každú podmnožinu A priestoru X : $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*
(4) *Pre každé $a \in X$ a každé $V \in \mathcal{B}'(f(a))$ existuje $U \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $f[u] \subseteq V$.*

Dôkaz.

(1)⇒(2): Nech B je uzavretá v Y. Potom $Y \setminus B$ je daná otvorená v Y a teda $f_{-1}(U)$ je otvorená v X. $f_{-1}(B) = f_{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f_{-1}(U)$ je uzavretá v X.

(2)⇒(3): Nech $A \subseteq X$, $a \in \bar{A} : f_{-1}(\underbrace{\overline{f[a]}}_{\text{uz.}}) \supseteq f_{-1}(f[A]) \supseteq A \Rightarrow f_{-1}(\underbrace{\overline{f[A]}}_{\text{uz.}}) \supseteq \underbrace{\bar{A}}_{\text{uz.}} \Rightarrow f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

(3)⇒(4): Nech $a{\in}X$ a $\exists V{\in}\mathcal{B}(f(a))$ tak, že $\forall U{\in}\mathcal{B}(a)$, $f(U){\nsubseteq}V$. Potom $U{\nsubseteq}f_{-1}(V) \Rightarrow U \cap X \setminus f_{-1}(V)$ je neprázdna. Potom $a \in \overline{X \setminus f_{-1}(V)}$ a teda $f(a) \in \overline{f(X \setminus f_{-1}(V))} = \overline{f(f_{-1}(Y \setminus V))} = \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ spor.

(4)⇒(1): Nech V je otvorená v Y. Treba dokázať, že $f_{-1}(V)$ je otvorená v X. Nech $a \in f_{-1}(V)$. Potom $f(a){\in}V \Rightarrow \exists W{\in}\mathcal{B}'(f(a)) : W{\subseteq}V$. $\exists S{\in}\mathcal{B}(a) : f(S){\subseteq}W \Rightarrow S \subseteq f_{-1}(W) \subseteq f_{-1}(V)$ je otvorená.

Veta 2.2. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie, $\mathcal{B}$ je báza topológie v Y a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie v Y. Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(1) *$f : X \to Y$ je spojité.*
(2) *Pre každé $V \in \mathcal{B} : f_{-1}(V)$ je otvorená množina v X.*
(3) *Pre každé $W \in \mathcal{S} : f_{-1}(W)$ je otvorená v X.*

Dôkaz. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) je jasné.

(3) ⇒ (1): Nech V je otvorená množina v Y. Treba dokázať, že $f_{-1}(V)$ je otvorená v X. Nech $a \in f_{-1}(V)$. Potom $f(a) \in V$. Existujú $S_1, \cdots, S_k \in \mathcal{S}$ tak, že $f(a) \in \bigcap S_i \subseteq V$. $f_{-1}(\bigcap S_i) = \bigcap f_{-1}(S_i)$. $f_{-1}(S_i)$ otvorené. $a \in f_{-1}(\bigcap S_i) \subseteq f_{-1}(V)$.

Definícia 2.2. Nech X, Y sú topologické priestory, $f : X \to Y$, $a \in X$. Hovoríme, že f je spojité v bode a, ak pre každé okolie $V(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje okolie U bodu a tak, že $f[U] \subseteq V$.

Veta 2.3. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie, X' je podpriestor X a Y' je podpriestor Y taký, že $f(X) \subseteq Y'$. Ak $f : X \to Y$ je spojité, tak aj $f{\restriction}_{X'} : X' \to Y$ aj $f' : X \to Y'$, $f'(a) = f(a)$ $\forall a \in X$ sú spojité.*

Veta 2.4. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie, $\mathcal{U}$ je systém otvorených podpriestorov priestoru X taký, že $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Potom f je spojité $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$ $f{\restriction}_U : U \to Y$ je spojité.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: je zrejmé.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech V je otvorená v Y. $\forall U \in \mathcal{U} : (f{\restriction}_U)_{-1}(V)$ je otvorená v X. U je otvorená $\Rightarrow (f{\restriction}_U)_{-1}(V) =$ $= f_{-1}(V) \cap U$ je otvorená v X. $f_{-1}(V) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (f_{-1}(V) \cap U)$ otvorená v X.

Veta 2.5. *Nech X, Y sú topologické priestory a $\mathcal{V}$ je konečný systém uzavretých podpriestorov priestoru X taký, že $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$. Potom $f : X \to Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}$ $f{\restriction}_V : V \to Y$ je spojité.*

Príklad.

2.8.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{ak } x \in (-1, -\frac{1}{2}] \\ -4x & \text{ak } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases} \qquad \text{je spojité.}$$

Veta 2.6. *Ak $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sú spojité zobrazenia, tak $g \circ f$ je spojité z $X \to Z$.*

Dôkaz. W otvorená v Z. $(g \circ f)_{-1}(W) = f_{-1}(g_{-1}(W))$ je otvorená.

Otázka. Ak $g \circ f : X \to Z$ je spojité, či niektoré z f, g musí byť spojité?

Definícia 2.3. Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva *homeomorfizmus* ak f je spojité, bijektívne a f_{-1} je spojité tiež.

Príklady.

2.9. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ spojité bijektívne. $id_R^{-1} = id_R : (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \to (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ je spojité, teda je to homeomorfizmus.

2.10. Zobrazenie z príkladu č. 8 je homeomorfizmus.

2.11. $id_X : X \to X$ je homeomorfizmus.

Veta 2.7. *Ak $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ sú homeomorfizmy, tak $g \circ f : X \to Z$ je homeomorfizmus.*

Príklad.

2.12. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = 1\}$; $f : S^1 \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \times \{0\}$ je homeomorfizmus.

V $\mathbb{R}^{n+1}$: $S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}),\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + (x_{n+1} - \dfrac{1}{2})^2 = 1\}$.

Definícia 2.4. Spojité zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva *otvorené (uzavreté)* ak pre každú otvorenú (uzavretú) množinu U v X je $f[U]$ otvorená (uzavretá).

Príklad 2.13.

$id_R : (\mathbb{R}, \tau_x) {\to} (\mathbb{R}, \tau_d)$ je spojité (a, b) je otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_z)$. $id_R((0, 1]) {=} (0, 1]$ nie je otvorená v (X, τ_d).

Veta 2.8. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológia X a $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom f je otvorené $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}\ f(V)$ je otvorená v Y.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: zrejmá. $\boxed{\Leftarrow}$: Nech U je otvorená v X. Potom existuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{S}} V$, $f(U) = f\left(\bigcup\limits_{V \in \mathcal{S}} V\right) =$

$= \bigcup\limits_{V \in \mathcal{S}} f(V)$ otvorená $\Rightarrow$ je otvorená.

Príklady.

2.14. $X = \mathbb{R},\ Y = \{(x, y) {\in} \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} = S^1,\ f : \mathbb{R} \to S^1,\ f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) {\in} S^1$, $\mathcal{B} = \{(a, b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ b - a < \frac{1}{2}\}$.

2.15. $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p_1(x, y) \mapsto x$ projekcia na prvú zložku – otvorené zobrazenie.

Definícia 2.5. Spojité zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva *faktorové zobrazenie* ak f je surjektívne a pre každé $V \subseteq Y$ platí: ak $f_{-1}(V)$ je otvorená množina, tak V je otvorená.

Príklady.

2.16. $f : \mathbb{R} \to (\{0, 1\}, \tau_{ind}),\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ak } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ je spojité. $V {\subseteq} \{0, 1\}$ a $f_{-1}(V)$ je otvorená? Potom $f_{-1}(V) = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$. Ak $f_{-1}(V) = \emptyset \Rightarrow \exists r {\in} f_{-1}(V)$. Potom $\exists \varepsilon{>}0 : (r{-}\varepsilon, r{+}\varepsilon) {\subseteq} f_{-1}(V)$; $\exists s {\in} \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $s, t \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq f_{-1}(V)$ je faktorové zobrazenie.

2.17. $id_R : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ je spojité, surjektívne, nie je faktorové, lebo $id_R^{-1}\{r\} = \{r\}$ otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, ale nie je otvorená v $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$.

Veta 2.9a. *Nech $f : X \to Y$ je spojité surjektívne zobrazenie. Potom f je faktorové $\Leftrightarrow \forall V \subseteq Y$ platí: ak $f_{-1}(V)$ je uzavretá v X, tak V je uzavretá v Y.*

Veta 2.9b. *Ak $f : X {\to} Y$ a $g : Y {\to} Z$ sú faktorové zobrazenia, tak aj $g \circ f : X {\to} Z$ je faktorové zobrazenie.*

Dôkaz. Nech $V \subseteq Z$ a $(g \circ f)_{-1}(V)$ je otvorená v X. $(g \circ f)_{-1}(V) = g_{-1}(f_{-1}(V))$ je otvorená $\Rightarrow g_{-1}(V)$ je otvorená $\Rightarrow V$ je otvorená.

Veta 2.9c. *Ak $f : X \to Y$ je surjektívne a otvorené (uzavreté) spojité zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.*

Dôkaz. Nech $V \subseteq Y$ a $f_{-1}(V)$ je otvorená v X. f je otvorené $\Rightarrow f(f_{-1}(V)) = V$ je otvorená.

Príklad.

2.18. $f : \mathbb{R} \to S^1 \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ otvorené zobrazenie $\Rightarrow$ faktorové.

2.19. $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad p_1(x, y) = x$ otvorené $\Rightarrow$ faktorové.

Definícia 2.6. Spojité zobrazenie $f : X \to Y$ je *vnorenie*, ak $f : X \to f(X)$ (podpriestor Y) je homeomorfizmus.

Veta 2.10. *Spojité zobrazenie $f : X \to Y$ je vnorenie $\Leftrightarrow$ f je injektívne a pre každú otvorenú (uzavretú) podmnožinu V v X, $f(V)$ je otvorená (uzavretá) v $f(X)$.*

Príklady.

2.20. Ak A je podpriestor X, tak $j : A \to X,\ j(x) = x$ je vnorenie. $j(A) = A,\ j : A \to j(A) = A$, $j = id_A$ je vnorenie.

2.21. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, x)$ je spojité, injektívne, otvorené $\Rightarrow$ vnorenie.

2.22. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, \frac{1}{x})$ je spojité, injektívne, otvorené $\Rightarrow$ vnorenie.

III. TOPOLOGICKÝ SÚČIN TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROV

Definícia 3.1. Nech (X, τ_X), (Y, τ_Y) sú topologické priestory, $\mathcal{S}=\{U\times Y,\ U\in\tau_X\} \cup \{X\times V,\ V\in\tau_Y\}$ $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{U \times V,\ U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}$. Nech $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}}$ je topológia určená subbázou $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Potom $(X \times Y, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}})$ sa nazýva *topologický súčin* priestorov $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$; $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ sa nazýva *štandardná subbáza* (báza) súčinnej topológie $\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$.

Označenie. $(X \times Y, \tau_{\mathcal{B}}) = (X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

Veta 3.1. *Nech (X, τ_X), (Y, τ_Y) sú priestory, $\tau_{\mathcal{B}}$ je súčinná topológia na $X\times Y$ a τ je ľubovoľná topológia na $X \times Y$ taká, že $p_X : (X \times Y, \tau) \to (X, \tau_X)$ aj $p_Y : (X \times Y, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ sú spojité. Potom $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$.*

Dôkaz. p_X spojitá $\forall U \in \tau_X : (p_X)_{-1}(U) = U \times Y \in \tau_X$. p_Y spojitá $\forall V\in\tau_Y : (p_Y)_{-1}(V)=X \times V\in\tau_Y$. Teda $\mathcal{S} \subseteq \tau \Rightarrow \tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$.

Veta 3.2. *Nech (X, τ_X), (Y, τ_Y) sú topologické priestory, $\mathcal{B}_X$ je subbáza topológie τ_X, $\mathcal{B}_Y$ je báza τ_Y. Nech $\tilde{\mathcal{B}} = \{U \times V; U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$. Potom $\tilde{\mathcal{B}}$ je báza topológie $\tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$ na $X \times Y$ a platí $\tau_{\tilde{\mathcal{B}}} = \tau_{\mathcal{B}}$.*

Dôkaz. $\displaystyle\bigcup_{(U,V)\in\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y} (U\times V) = \left(\bigcup_{U\in\mathcal{B}_X} U\right)\times\left(\bigcup_{V\in\mathcal{B}_Y} V\right) = X\times Y$. $U\times V, U'\times V' \in \tilde{\mathcal{B}}$, $(U\times V)\cap(U'\times V') = = (U \cap U') \times (V \cap V')$. $(a, b) \in (U \times V) \cap (U' \times V')$. Potom $a \in U \cap U'$, $b \in V \cap V' \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_X$, $W' \in \mathcal{B}_Y : a \in W \subseteq (U\cap U')$, $b \in W' \subseteq V\cap V'$. $(a, b) \in \underbrace{W \times W'}_{\in\tilde{\mathcal{B}}} \subseteq (U \times V)\cap(U' \times V')$. $\tilde{\mathcal{B}}$ báza topológie na $(X \times Y, \tau_{\tilde{\mathcal{B}}})$. $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \tau_{\tilde{\mathcal{B}}} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. $V \in \mathcal{B}_Y$ $\displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{B}_X} (U \times V) = \left(\bigcup_{U\in\mathcal{B}_X} U\right) \times V = X \times V \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Symetricky: $\forall U \in \mathcal{B}_X : \displaystyle\bigcup_{V\in\mathcal{B}_X} (U \times V) = U \times Y \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. $p_X : (X \times Y, \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}) \to (X, \tau_X)$; $\forall U \in \mathcal{B}_X : (p_X)_{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. p_X spojité. $p_Y : (X \times Y, \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}) \to (Y, \tau_Y)$; $\forall V \in \mathcal{B}_Y : (p_Y)_{-1}(V) = X \times V \in \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$. p_Y spojité. p_X, p_Y sú spojité potom $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

$\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

Veta 3.3. *Nech X, Y, Z sú topologické priestory a $X \times Y$ je topologický súčin a $f : Z \to X\times Y$ je zobrazenie. Potom f je spojité $\Leftrightarrow$ $p_X\circ f$ aj $f\circ p_Y$ sú spojité.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: zrejmé.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie $\mathcal{S}=\{U\times Y, U$ je otvorená v $X\} \cap \{X\times V$, V je otvorená v $Y\}$. Zoberme si $U \times Y \in \mathcal{S}$, $f_{-1}(U \times Y) = f_{-1}((p_X)_{-1}(U)) = \underbrace{(p_X\circ f)_{-1}}_{spoj.}(U) \Rightarrow$ otvorená v Z. $f_{-1}(X \times V) = f_{-1}((p_Y)_{-1}(V)) = \underbrace{(p_Y\circ f)_{-1}}_{spoj.}(V)$ otvorená v Z.

Príklad.

3.1. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ topologický súčin $= (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_d)$, $d((a, b), (c, d)) = ((a - c)^2 + (b - d)^2)^{1/2}$. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, \frac{1}{x})$. f je spojité $\Leftrightarrow$ $p_1\circ f$, $p_2\circ f$ sú spojité. $p_1\circ f = p_1(f(x))=x$, $p_2 \circ f(x) = p_2(f(x)) = \frac{1}{x}$. Oba idú z $\mathbb{R}^+$ do $\mathbb{R}$.

Veta 3.4. *Ak (A,τ_A) je podpriestor (X,τ_X) a (B,τ_B) je podpriestor (Y,τ_Y), tak $(A,\tau_A)\times(B,\tau_B)$ je podpriestor $(X,\tau_X)\times(Y,\tau_Y)$.*

Dôkaz. $A\times B\subseteq X\times Y$; $\mathcal{B}_{A\times B}=\{U\times V; U\in\tau_A, V\in\tau_B\}$, $\mathcal{B}_{X\times Y}=\{U'\times V',\ U'\in\tau_X, V'\in\tau_Y\}$. $\forall U\times V\in\mathcal{B}_{A\times B}\ \exists U'\in\tau_X,\ V'\in\tau_Y$ tak, že $U=U'\cap A$, $V=V'\cap B\Rightarrow(U'\cap A)\times(V'\cap B)=$ $=(U'\times V')\cap(A\times B)$. $\mathcal{B}_{A\times B}=\{(U'\times V')\cap(A\times B),\ U'\times V'\in\mathcal{B}_{X\times Y}\}$ báza podpriestoru určeného $A\times B$ v $(X,\tau_X)\times(Y,\tau_Y)$.

Príklady.
3.2. $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=1\}$; $[0,1]\Rightarrow S^1\times[0,1]$ je podpriestor $\mathbb{R}^3$. $S^1\times[0,1]=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3;$ $a^2+b^2=1,\ 0\le c\le 1\}$.
3.3. $S^1\times S^1$ – tórus, anuloid.
3.4. $[0,1]\times[0,1]$ – štvorec.
3.5. $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$; $\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha\xrightarrow{p_\alpha}X_\alpha:\forall\alpha\in I$. $\forall U$ otvorenú v X_α: $(p_\alpha)_{-1}(U)$ je otvorená.
$(p_\alpha)_{-1}(U)=\prod\limits_{\beta\in I}Y_\beta$; $Y_\alpha=U:\forall\beta\neq\alpha\ Y_\beta=X_\beta$. $(p_{\alpha_1})_{-1}(U)\cap(p_{\alpha_2})_{-1}(V)=\prod\limits_{\gamma\in I}Y_\gamma$, $Y_{\alpha_1}=U$, $Y_{\alpha_2}=V:\forall\gamma\notin\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $Y_\gamma=X_\gamma$.

Definícia 3.2. Nech $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ je systém topologických priestorov (I je indexová množina). Nech $X=\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$, $\mathcal{S}=\{(p_\alpha)_{-1}(U):\alpha\in I, U\in\tau_\alpha\}$ a τ je topológia na X určená subbázou $\mathcal{S}$. Potom (X,τ) sa nazýva *topologický súčin* systému $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$; $\mathcal{S}$ sa nazýva *štandardná subbáza* súčinovej topológie a systém $\mathcal{B}=\{\bigcap\limits_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i); k\in\mathbb{N}; \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in I; U_i\in\tau_{\alpha_i},\forall i=1,\cdots,k\}$ sa nazýva *štandardná báza* súčinovej topológie. Ozn. $(X,\tau)=\prod\limits_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$.

Veta 3.5. *Nech $(X,\tau)=\prod\limits_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ je topologický súčin priestorov $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$. Potom platí:*

(1) *$\forall\alpha\in I\ p_\alpha:\prod\limits_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)\to(X,\tau_\alpha)$ je spojité zobrazenie.*
(2) *Ak $f\in(\mathbb{Z},\tau_Z)\to\prod\limits_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ je zobrazenie, tak f je spojité $\Leftrightarrow\forall\alpha\in I:p_\alpha\circ f$ je spojité.*
(3) *Ak τ' je topológia na X a $\forall\alpha\in I\ p_\alpha:(X,\tau')\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$ je spojité, tak $\tau\subseteq\tau'$.*
(4) *Ak $\forall\alpha\in I\ \mathcal{B}_\alpha$ je báza topológie τ_α; $\mathcal{S}'=\{(p_\alpha)_{-1}(V),\alpha\in I, V\in\mathcal{B}_\alpha\}$ a $\tau_{\mathcal{S}'}$ je topológia určená tým systémom $\mathcal{S}'$, tak $\tau_{\mathcal{S}'}=\tau$. Systém $\mathcal{B}'=\{\bigcap\limits_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}V_i:k\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in I,\ V_1\in\mathcal{B}_{\alpha_i}\}$ je báza $\tau_{\mathcal{S}'}$.*
(5) *$\forall\alpha\in I\quad p_\alpha:(X,\tau)\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$ je otvorené zobrazenie a teda aj faktorové zobrazenie.*

Dôkaz.
(1) jasné.
(2) $\boxed{\Rightarrow}$: zrejmá. $\boxed{\Leftarrow}$: Nech $V\in\mathcal{S}$ tj. $\exists\alpha\in I$ a $\exists U\in\tau_\alpha$ tak, že $V=(p_\alpha)_{-1}(U)$. $f_{-1}(V)=$ $=f_{-1}((p_\alpha)_{-1}(U))=(\underbrace{p_\alpha\circ f}_{spoj.})_{-1}(U)\in\tau_Z\Rightarrow f$ je spojité.
(3) $\forall\alpha\in I\ p_\alpha:(X,\tau')\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$ je spojité, tak $\forall\alpha\in I\ \forall U\in\tau_\alpha\ (p_\alpha)_{-1}(U)\in\tau$. Potom $\mathcal{S}\subseteq\tau\subseteq\tau'$.
(4) Nech $\alpha\in I, p_\alpha:(X,\tau_{\mathcal{S}'})\to(X_\alpha,\tau_\alpha);\forall V\in\mathcal{B}_\alpha\quad(p_\alpha)_{-1}(V)\in\mathcal{S}'\subseteq\tau_{\mathcal{S}'}\Rightarrow p_\alpha$ je spojité $\forall\alpha\in I\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\tau\subseteq\tau_{\mathcal{S}'}$. $\mathcal{S}'\subseteq\mathcal{S}\Rightarrow\tau_{\mathcal{S}'}\subseteq\tau$. $\tau=\tau_{\mathcal{S}'}$.
(5) Nech $\alpha\in I$, $p_\alpha:(X,\tau)\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$. Nech $V\in\mathcal{B}$ je štandardná báza. Potom $\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in I$, $U_1\in\tau_{\alpha_1},\cdots,U_k\in\tau_{\alpha_k}:V=\bigcap\limits_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)$. Ak $\exists i:U_i=\emptyset$ potom $p_\alpha(V)=\emptyset$.
Ak $\forall i:U_i\neq\emptyset$, tak $p_\alpha(V)=\begin{cases}U_i \text{ pre } \alpha=\alpha_i \text{ patrí } \tau_{\alpha_i} \text{ napr. } p_2(U_1\times X_2\times U_3)=X_2\\ X_\alpha \text{ pre } \alpha\notin\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}\in\tau_\alpha\quad p_2(X_1\times U_2\times U_3)=U_2\end{cases}$
Potom p_α je otvorená.

Poznámka. $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$; $\forall\alpha\in I:(X_\alpha,\tau_\alpha)=(X,\tau)$ potom píšeme $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)=(X,\tau)^I$. $x\in\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ $x:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha,\ x(\alpha)\in X_\alpha$.

Príklady.

3.6. $D_2=\{0,1\}$ diskrétny; $\mathcal{B}=\{\{0\},\{1\}\}$ báza D_2. $D_2^2=\{0,1\}\times\{0,1\}$. $\mathcal{B}^1=\{\{0\}\times\{0\},\{1\}\times\{0\},\{0\}\times\{1\},\{1\}\times\{1\}\}$ báza D_2^2. D_2^2 je zasa diskrétna topológia.

3.7. $D_2^{\mathbb{N}}$ nemôže byťdiskrétny priestor. Jeho báza je nekonečný kartézsky súčin, ktorý od istého členu obsahuje činitele $\{0,1\}$. napr. $\{0\}\times\{1\}\times\{1\}\times\cdots\times\{0\}\times\{1\}\times\{0,1\}\times\cdots\times\{0,1\}\times\cdots$.

3.8. I nekonečná. $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ $\forall\alpha$ $U_\alpha\in\tau_\alpha$ $\emptyset\neq U_\alpha\neq X_\alpha$. $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ nie je otvorená v $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$. $x\in\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$, $x\in\bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)\nsubseteq\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$.

Veta 3.6. *Nech $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ je systém priestorov a $\forall\alpha\in I:A_\alpha$ je neprázdna podmnožina X_α. Potom platí:*

(1) $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$ *je uzavretá v* $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$.

(2) $\overline{\prod_{\alpha\in I}A_\alpha}=\prod_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$.

Dôkaz.

(1) $\boxed{\Rightarrow}$: A je uzavretá: $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=A=\bar{A}=\prod_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$; $\forall\alpha\in I$, $A_\alpha\neq\emptyset$, $\overline{A_\alpha}\neq\emptyset\Rightarrow\forall\alpha\in I:A_\alpha=\overline{A_\alpha}\Rightarrow$ A_α je uzavretá.

$\boxed{\Leftarrow}$: $\bar{A}=\prod_{\alpha\in I}\bar{A}_\alpha=\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=A\Rightarrow A$ je uzavretá.

(2) $\forall\alpha\in I:p_\alpha:\prod_{\alpha\in I}X_\alpha\to X_\alpha$ je spojité. $p_\alpha[\bar{A}]\subseteq\overline{p_\alpha[A]}=\bar{A}_\alpha\Rightarrow\bar{A}\in(p_\alpha)_{-1}(\bar{A}_\alpha)=\prod_{\beta\in I}Y_\beta$; $Y_\alpha=\bar{A}_\alpha$, $Y_\beta=X_\beta$ pre $\forall\beta\in I$. Potom $\bar{A}\subseteq\bigcap_{\alpha\in I}(p_\alpha)_{-1}(\bar{A}_\alpha)=\prod_{\alpha\in I}\bar{A}_\alpha$.

Opačná inklúzia: $\supseteq$: Nech $x\in\prod_{\alpha\in I}\bar{A}_\alpha\Rightarrow\forall\alpha\in I$ $p_\alpha(x)\in\bar{A}_\alpha$. Nech V je prvok štandardnej bázy $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ taký, že $x{\in}V$. $\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in I$ a $\exists U_1,\cdots,U_k:\forall i=1,\cdots,k:U_i$ je otvorená podmnožina X_{α_i}. $V=\bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)=\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha$. $Y_{\alpha_i}=U_i$ $\forall i=1,\cdots,k:Y_{\alpha_i}=X_\alpha$ pre $\alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_k$. $\forall\alpha\in I$ Y_α je otvorená v X_α. $x\in V\Rightarrow\forall\alpha\in I$ $p_\alpha(x)\in\bar{A}_\alpha$ a Y_α je okolie $p_\alpha(x)\Rightarrow Y_\alpha\cap A_\alpha\neq\emptyset$. $V\cap A=\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha\cap\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=\prod_{\alpha\in I}(\underbrace{Y_\alpha\cap A_\alpha}_{\neq\emptyset})\neq\emptyset\Rightarrow x\in\bar{A}:\prod_{\alpha\in I}\bar{A}_\alpha\subseteq\bar{A}$.

Veta 3.7.

(1) *Ak $\forall\alpha\in I:X_\alpha$ je T_i-priestor $(i=0,1,2)$, tak $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ je T_i-priestor.*

(2) *Ak $\forall n\in\mathbb{N}$ X_n je separabilný (resp. vyhovuje 1. axióme spočitateľnosti; má spočitateľnú bázu), tak $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ je separabilný (resp. vyhovuje 1. axióme spočitateľnosti; má spočitateľnú bázu).*

Dôkaz.

(1) Napr. pre $i{=}2$: $\forall\alpha{\in}I:X_\alpha$ je T_2-priestor; $x,y{\in}\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$, $x{\neq}y$. Potom $\exists\alpha{\in}I:p_\alpha(x)\neq p_\alpha(y)$. $p_\alpha(x)$, $p_\alpha(y){\in}X_\alpha\Rightarrow$ existujú otvorené U,V v X_α tak, že $p_\alpha(x){\in}U$, $p_\alpha(y){\in}V$ a $U\cap V=\emptyset$. $(p_\alpha)_{-1}(U)$,

$(p_\alpha)_{-1}(V)$ sú otvorené v $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$; $x \in (p_\alpha)_{-1}(U)$, $y \in (p_\alpha)_{-1}(V)$, $(p_\alpha)_{-1}(U) \cap (p_\alpha)_{-1}(V) = \emptyset$. Teda $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ je T_2-priestor.

(2) Nech $\forall n\in\mathbb{N} : X_n$ je separabilný tj. $\exists M_n\subseteq X_n$, $\bar{M}_n\subseteq X_n$, M_n je spočitateľná. $A=\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Zvoľme ľubovoľný $a\in A$. $\forall n\in\mathbb{N} : p_n(a)\in M_n$. $M = \{b \in A;\ \{k \in \mathbb{N},\ p_k(b)\neq p_k(a)\}$ je konečná$\}$.

M je spočitateľná: Nech $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Nech V je prvok štandardnej bázy topológie $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $x \in V$. $\exists n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\exists U_1, \cdots, U_k$ kde U_i je otvorená v X_{n_i}. $V = \bigcap_{i=1}^{k} (p_{n_i})_{-1}(U_i) = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. $Y_{n_i} = U_i$; $Y_n = X_n$ ak $n \neq n_1, \cdots, n_k$. $\forall n\in\mathbb{N} : p_n(x) \in Y_n$ otvorená v X_n. $p_n(x) \in \bar{M}_n = X_n \Rightarrow Y_n \cap M_n \neq \emptyset \Rightarrow V \cap M = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \cap M_n \neq \emptyset \Rightarrow X \in \bar{M} \Rightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \subseteq \bar{M}$.

IV. FAKTOROVÉ ZOBRAZENIE

Veta 4.1. *Nech (X, τ) je topologický priestor, Y je množina a $f : X \to Y$ je surjektívne zobrazenie. Potom $\tau_f = \{V \in \mathcal{P}(Y), f_{-1}(V) \in \tau\}$ je topológia na Y a zobrazenie $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ je faktorové zobrazenie.*

Dôkaz. $\emptyset, Y \in \tau_f$, $V, V' \in \tau_f$, $(f_{-1})(V)$, $f_{-1}(V') \in \tau$. $f_{-1}(V\cap V') = f_{-1}(V)\cap f_{-1}(V') \in \tau \Rightarrow V\cap V' \in \tau_f$. $\mathcal{S} \subseteq \tau_f$, $\forall U \in \mathcal{S} : f_{-1}(U) \in \tau$. $f_{-1}\left(\bigcup_{U\in\mathcal{S}} U\right) = \bigcup_{U\in\mathcal{S}} f_{-1}(U) \in \tau_f$. f je spojité, surjektívne. Nech $V \subseteq Y$ a $f_{-1}(V) \in \tau$. Potom $V \in \tau_f$.

Definícia 4.1. Topológia τ_f z *Vety 4.1* sa nazýva *faktorová topológia* určená zobrazením f.

Príklady.

4.1. $\mathbb{R}$ s obyčajnou topológiou. $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$; $\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : f(x) = 1$. $V \in \tau_f \Leftrightarrow f_{-1}(V)$ je otvorená v $\mathbb{R}$. $\emptyset \in \tau_f$, $\{0, 1\} \in \tau_f$, $f_{-1}(\{1\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie je otvorená v $\mathbb{R} \Rightarrow \{1\} \notin \tau_f$. $f_{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ nie je otvorená v $\mathbb{R}$. $\Rightarrow \{0\} \notin \tau_f$. $\tau_f = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$ indiskrétna topológia.

4.2. $g : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$; $g(x) = 0$ pre $x > 0$; $g(x) = 1$ pre $x \leq 0$. $\tau_g = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. $g_{-1}(\{0\}) = (0, \infty)$ otvorená v $\mathbb{R}$. $g_{-1}(\{1\}) = (-\infty, 0]$ nie je otvorená.

4.3. $h : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$; $h(x) = 0$ pre $x < \sqrt{2}$, $h(x) = 1$ pre $x > \sqrt{2}$. $\tau_h = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$. $h_{-1}(\{0\}) = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ otvorená v $\mathbb{Q}$; $h_{-1}(\{1\}) = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ otvorená v $\mathbb{Q}$.

Definícia 4.2. Nech (X, τ) je topologický priestor, E je relácia ekvivalencie na X; $X/E = \{E(x); x \in X\}$ je *faktorová množina* (rozklad X) určená reláciou E a $p_E : X \to X/E$; $p_E(x) = E(x)$. Nech $\tau_E = \tau_{p_E}$ je faktorová topológia na X/E určená zobrazením p_E. Potom priestor $(X/E, \tau_E)$ sa nazýva *faktorový priestor* priestoru (X, τ) určený reláciou E.

Príklady.

4.4. $\mathbb{R}$; $x \sim y \Leftrightarrow$ ak sú naraz racionálne, alebo iracionálne. $\mathbb{R}/\sim = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. $p_\sim : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$; $p_\sim(x) = \mathbb{Q}$ pre $\forall x \in \mathbb{Q}$; $p_\sim(x) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pre $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\tau_\sim = \{\emptyset, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\}$.

4.5. $\mathbb{R}$; $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ alebo $x, y \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}/\sim = \{\mathbb{N}\} \cup \{\{a\}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\}$. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$, $p(a) = \{a\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $p(n) = \mathbb{N}$ pre $\forall n \in N$.

Veta 4.3. *Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie a E_f je relácia ekvivalencie na X definovaná $aE_fb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Nech $g : X/E_f \to Y$ je zobrazenie $g(E_f(x)) = f(x)$ a $p_{E_f} : X \to X/E_f$ je prirodzená projekcia priestoru X na faktorový priestor X/E_f. Potom g je spojité zobrazenie. Navyše ak f je faktorové zobrazenie, tak g je homeomorfizmus.*

Dôkaz. $f = g \circ p_{E_f}$ $p_{E_f} : X \to X/E_f$, $p_{E_f}(x) = E_f(x)$ potom to vidno z definície: $g \circ E_f = f$. $g \circ p_{E_f}$ je spojité; p_{E_f} je faktorové $\Rightarrow g$ je spojité. Nech f je faktorové zobrazenie. Potom f je surjektívne $\Rightarrow g$ je surjektívne. g je prosté $\Rightarrow g$ je bijektívne. $f = g \circ p_{E_f}$; $p_{E_f} = g^{-1} \circ f \Rightarrow g^{-1}$ je spojité. Teda g je homeomorfizmus.

Príklady.

4.6. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou. $xEy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$. $E(0)=\mathbb{Z}$, $E(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}: E(a)=a+\mathbb{Z}$; $a\in[0,1] \Rightarrow E(a)$ – všetky triedy. $(\mathbb{R}/E,\tau_E)$ $f:\mathbb{R}\to S^1$ $f(x)=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ je to spojité, otvorené, surjektívne $\Rightarrow$ faktorové. $xE_f y \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$ $E_f=E$.

4.7. $\mathbb{R}$; $xEy \Leftrightarrow x,y\in\mathbb{Q}$ alebo $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}/E=\{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$. $f(x)=0$ ak $x\in\mathbb{Q}$; $f(x)=1$ ak $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

4.8. $\mathbb{R}$; $xEy \Leftrightarrow x=y$ alebo $x,y\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}/E=\{\{x\};\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\}\cup\{\mathbb{N}\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}\setminus\{n\in\mathbb{N};\ n\geq 2\}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{n\in\mathbb{N};\ n\geq 2\}=\tilde{\mathbb{R}}$ $f(x)=x$ ak $x\notin\mathbb{N}$, $f(x)=1$ ak $x\in\mathbb{N}$. $g(\{x\})=x$, $g(\mathbb{N})=1$. $(\tilde{\mathbb{R}},\tau_f)$ nevyhovuje 1.axióme spočitateľnosti;

1 nemá spočitateľnú bázu okolí. Predpokladajme, že existuje spočitateľná báza okolí $V_1,\cdots,V_n,\cdots$ bodu 1 v $(\tilde{\mathbb{R}},\tau_f)$. $1\in V_1$; $f_{-1}(V_1)$ otvorená v $\mathbb{R}$; $\mathbb{N}\subseteq f_{-1}(V_1)$ otvorená $\exists\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_1<\frac{1}{2}$ tak, že $(1-\varepsilon_1,1+\varepsilon_1)\subseteq f_{-1}(V_1)$, $f((1-\varepsilon_1,1+\varepsilon_1))=(1-\varepsilon_1,1+\varepsilon_1)\subseteq V_1$.

$1\in V_2$; $\mathbb{N}\subseteq f_{-1}(V_2) \Rightarrow 2\in f_{-1}(V_2)$ otvorená. $\exists\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_2<\frac{1}{2}$, $(2-\varepsilon_2,2+\varepsilon_2)\subseteq f_{-1}(V_2)$. $f(2-\varepsilon_2,2+\varepsilon_2)=\{1\}\cup((2-\varepsilon_2,2+\varepsilon_2)\setminus\{2\})$.

$1\in V_n \Rightarrow \mathbb{N}\subseteq f_{-1}(V_n) \Rightarrow n\in f_{-1}(V_n)$ otvorená. $\exists\frac{1}{2}>\varepsilon_n>0: (n-\varepsilon_n,n+\varepsilon_n)\subseteq f_{-1}(V_n) \Rightarrow f((n-\varepsilon_n,n+\varepsilon_n))=\{1\}\cup((n-\varepsilon_n,n+\varepsilon_n)\setminus\{n\})$.

Definujme si: $V=(1-\frac{\varepsilon_1}{2},1+\frac{\varepsilon_1}{2})\cup\bigcup_{n=2}^{\infty}\left[(n-\frac{\varepsilon_n}{2},n+\frac{\varepsilon_n}{2})\setminus\{n\}\right]\subseteq\tilde{\mathbb{R}}$. $f_{-1}(V)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-\frac{\varepsilon_n}{2},n+\frac{\varepsilon_n}{2})$ otvorená v $\mathbb{R} \Rightarrow V$ je otvorená v $(\tilde{\mathbb{R}},\tau_f)$. Bod $1+\frac{\varepsilon_1}{2}\in V_1\setminus V \Rightarrow V_1\nsubseteq V\cdots 1+\frac{\varepsilon_n}{2}\in V_n\setminus V \Rightarrow V_n\nsubseteq V\cdots$ spor s tým, že $V_1,V_2,\cdots$ je báza okolí bodu 1.

Topologický súčet.

Definícia 4.3. *Nech* $((X_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in I})$ *je systém topologických priestorov a* $\forall\alpha,\beta\in I$: *ak* $\alpha\neq\beta$, *tak* $X_\alpha\cap X_\beta=\emptyset$. *Nech* $X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$. *Potom* $\tau=\{U\in\mathcal{P}(X),\forall\alpha\in I: U\cap X_\alpha\in\tau_\alpha\}$ *je topológia na* X. $\bigcup_{\alpha\in I}\tau_\alpha$ *je báza* τ. *Priestor* (X,τ) *sa nazýva topologický súčet systému* $((X_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in I})$

ozn.: $(X,\tau)=\bigoplus_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ $\qquad (X\cup Y,\tau)=(X,\tau_X)\oplus(Y,\tau_Y)$.

Vlastnosti. *Nech* $(X,\tau)=\bigoplus_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$. *Potom*

(1) *Pre každé* α *je* X_α *otvorená a súčasne uzavretá v* (X,τ).
(2) *Ak* $\forall\alpha\in I: (X_\alpha,\tau_\alpha)$ *je* T_i*-priestor* $(i=0,1,2)$ *(vyhovuje 1. axióme spočitateľnosti), tak* $\bigoplus_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ *je* T_i*-priestor (resp. vyhovuje 1. axióme spočitateľnosti).*
(3) $\forall\alpha\in I: (X_\alpha,\tau_\alpha)$ *je podpriestor* $\bigoplus_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$.

V. REGULÁRNE, ÚPLNE REGULÁRNE A NORMÁLNE PRIESTORY

Definícia 5.1. Nech X je topologický priestor. Potom:

(1) X sa nazýva *regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a každé $c\in X\setminus A$ existujú otvorené množiny $U,V\in X$ tak, že $c\in U$, $A\subseteq V$ a $U\cap V=\emptyset$.
Regulárny T_1-priestor sa nazýva T_3*-priestor.*
(2) X sa nazýva *úplne regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a každé $c\in X\setminus A$ existuje spojité zobrazenie $f:X\to[0,1]$ také, že $f(c)=1$, $f[A]\subseteq\{0\}$.
Úplne regulárny T_1-priestor sa nazýva $T_{3\frac{1}{2}}$*-priestor.*
(3) X sa nazýva *normálny*, ak pre ľubovoľné uzavreté množiny A,B v X také, že $A\cap B=\emptyset$ existujú otvorené množiny U,V pre ktoré $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ a $U\cap V=\emptyset$.
Normálny T_1-priestor sa nazýva T_4*-priestor.*

Príklad.

5.1. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je $T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$-priestor. Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ je uzavretá. $c \in \mathbb{R} \setminus A$. $\exists \varepsilon > 0$: $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap A = \emptyset$. $(c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq [c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. $V = \mathbb{R} \setminus [c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}] \supseteq A$, $c \in (c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}) = U$ otvorená. $\Rightarrow U \cap V = \emptyset$. $A \subseteq \mathbb{R} \setminus (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. $f(c) = 1$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

5.2. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. A je uzavretá v $(\mathbb{R}, \tau_z)$. $c \notin A$. $\exists \varepsilon > 0 : (c-\varepsilon, c] \cap A = \varepsilon$. $(c-\varepsilon, c]$ je aj otvorená aj uzavretá $\Rightarrow$ aj jej komplement je uzavretý aj otvorený.

$f : (\mathbb{R}, \tau_z) \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (c-\varepsilon, c] \\ 0 & x \notin (c-\varepsilon, c] \end{cases}$ je to spojité zobrazenie.

$\{[0,b),\ b \in (0,1)\} \cup \{(a,1],\ a \in (0,1)\}$ je subbáza topológie $[0,1]$. $f(c) = 1$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

Veta 5.1. *Každý úplne regulárny priestor je regulárny.*

Dôkaz. Nech X je úplne regulárny. Nech $A \subseteq X$, A uzavretá, $c \notin A$. Existuje spojité zobrazenie $f : X \to [0,1]$; $f(c) = 1$; $f[A] \subseteq \{0\}$. $f_{-1}(\frac{1}{2}, 1] = U$ otvorená; $c \in U$; $V = f_{-1}[0, \frac{1}{2})$ je otvorená, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. Teda X je regulárny.

Dôsledok. *Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor je T_3-priestor.*

Príklad.

5.3. A_2 je indiskrétny priestor na $\{0,1\}$, je regulárny, nie je T_2-priestor.

Veta 5.2. *Každý T_3-priestor je T_2-priestor.*

Dôkaz. X je T_3-priestor. Nech $a, b \in X$, $a \neq b$. $\{b\}$ uzavretá, $a \notin \{b\} \overset{X \text{ reg.}}{\Rightarrow} \exists U, V$ otvorená také, že $a \in U$, $\{b\} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. X je T_2-priestor.

Veta 5.3. *Nech X je topologický priestor a pre každé $c \in X$ $\mathcal{B}_c$ je báza okolí bodu c. Potom platí: X je regulárny $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}_c\ \exists V \in \mathcal{B}_c : \bar{V} \subseteq U$.*

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: Nech $U \in \mathcal{B}_c$. $A = X \setminus U$ je uzavretá množina a $c \notin A$. X je regulárny potom existujú otvorené W, W' tak, že $c \in W$, $A \subseteq W'$ a $W \cap W' = \emptyset$. $X \setminus A \supseteq X \setminus W'$. $W \subseteq X \setminus W'$ je uzavretá. Potom $\bar{W} \subseteq X \setminus W' \subseteq X \setminus A = U$. W je okolie $c \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_c$ tak, že $W \supseteq V \Rightarrow \bar{W} \supseteq \bar{V}$. Teda máme $\bar{V} \subseteq \bar{W} \subseteq U$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech A je uzavretá množina v X. $c \in X \setminus A$. $X \setminus A$ je okolie $c \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}_c$, $c \in U \subseteq X \setminus A$. Existuje $V \in \mathcal{B}_c$, $\bar{V} \subseteq U$. $c \in V$ otvorená. $W = X \setminus \bar{V} \supseteq X \setminus U = A$. $c \in V$, $A \subseteq W$ $\quad V \cap W = \emptyset$.

Príklady.

5.4. $P_1 = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ je T_2-priestor a nie je regulárny (ani T_3). $\mathcal{O}_1(c, 0) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1),\ y > 0$ a $(x-c)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(c,0)\}$ uzavretá menšieho okolia $\mathcal{O}_2$ nebude $\subseteq \mathcal{O}_1$, lebo bude obsahovať aj body typu $(c \pm \varepsilon, 0)$.

5.5. P_4; $([0,\infty), \tau)$ $\quad \mathcal{B}_a = \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,\infty);\ \varepsilon{>}0\}$ pre $a > 0$. $\mathcal{B}_0 = \{[0,\varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}; \varepsilon{>}0\}$. $\overline{[0,\delta) \setminus \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}} = [0,\delta)$. $0 \notin A$. P_4 je T_2-priestor a nie je regulárny.

Veta 5.4. *Nech X je priestor a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie priestoru X. Potom X je úplne regulárny $\Leftrightarrow \forall c \in X_\alpha \forall U \in \mathcal{S}$ také, že $c \in U$ existuje spojité zobrazenie $f : X \to [0,1]$ také, že $f(c) = 1$ a $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$.*

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: $X \setminus U$ uzavretá. $c \notin X \setminus U \Rightarrow$ existuje $f : X \to [0,1]$ spojité, $f(c) = 1$, $f[X \setminus U] = \{0\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech A je uzavretá v X a $c \in X \setminus A$ otvorená. Potom existujú $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{S}$ také, že $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq X \setminus A$. $A \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus U_i)$. $\forall i : c \in U_i \in \mathcal{S}$ potom existujú spojité zobrazenia $f_i : X \to [0,1]$, $f_i(c) = 1$ a $f[X \setminus U_i] \subseteq \{0\}$. Nech $f : X \to [0,1]$; $\forall x \in X : f(x) = \min\{f_1(x), \cdots, f_k(x)\}$ spojité. $f(c) = \min\{f_1(c), \cdots, f_k(c)\} = 1$. Nech $a \in A$. Potom $\exists i : a \in X \setminus U_i \Rightarrow f_i(a) = 0 \Rightarrow f(a) =$
$= \min\{\underbrace{f_1(a)}_{\geq 0}, \cdots, \underbrace{f_i(a)}_{=0}, \cdots, \underbrace{f_k(a)}_{\geq 0}\} = 0$. tj. $f[A] \subseteq \{0\}$.

$g : X \to [0,1]^k$; $g(x) = (f_1(x), \cdots, f_k(x))$ spojité. $p_i \circ g = f_i$.

$h : [0,1]^k \to [0,1]$ spojité $h(x_1, \cdots, x_k) = \min\{x_1, \cdots, x_k\}$ $\quad f = h \circ g$

$h_{-1}[a,1] = [a,1]^k$, $h_{-1}[0,b) = [0,b) \times [0,1]^{k-1} \cup [0,1] \times [0,1] \cup [0,b) \cup [0,1]^{k-2} \cup \cdots \cup [0,1]^{k-1} \times [0,b)$.

Veta 5.5.

(1) *Každý podpriestor regulárneho (resp. T_3-; úplne regulárneho; $T_{3\frac{1}{2}}$-) priestoru je regulárny (resp. T_3-, úplne regulárny, $T_{3\frac{1}{2}}$-) priestor.*

(2) *Ak $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ je systém regulárnych (resp. T_3-, úplne regulárnych, $T_{3\frac{1}{2}}$-) priestorov, tak $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ je regulárny (resp. T_3-, úplne regulárny, $T_{3\frac{1}{2}}$-) priestor.*

Dôkaz.

(1) Nech X je regulárny a Y je podpriestor X. Nech $a \in Y$, B je uzavretá podmnožina Y a $a \notin B$. Potom existuje uzavretá podmnožina B' priestoru X taká, že $B' \cap Y = B$. $a \in Y$, $a \notin B \Rightarrow a \notin B'$. X je regulárna potom existujú otvorené $U, V \in X$ také, že $a \in U$, $B' \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$, U', V' sú otvorené v Y, $a \in U'$, $B \subseteq V'$ a $U' \cap V' = \emptyset$.

(2) Nech $\forall \alpha \in I$ X_α je regulárny. Nech $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Nech $x \in X$. $\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{P}(x),\ x \in V$ a V je prvok štandardnej bázy súčinovej topológie $\}$. Nech $V \in \mathcal{B}_x$, potom existujú $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in I$ a $\forall i = 1, \cdots, k$, U_i je otvorená v X_{α_i}, $V = \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(U_i)$. $x \in V \Rightarrow \forall i = 1, \cdots, k : p_{\alpha_i}(x) \in U_i$. Systém všetkých okolí $\eta_{p_{\alpha_i}}$ v X_α je báza okolí. X_α regulárna. $U_i \in \eta_{p_{\alpha_i}}(x) \Rightarrow$ existuje $V_i \in \eta_{p_{\alpha_i}}(x)$ také, že $\bar{V}_i \subseteq U_i$. $U = \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(V_i) \in \mathcal{B}_x$; $x \in U \Rightarrow x \in \mathcal{B}_x$. $U = \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(\bar{V}_i) \subseteq$
$\subseteq \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(U_i) = V \Rightarrow \bar{U} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})^{-1}(\bar{V}_i) \subseteq V$.

Dôsledok Vety 5.3. *X je regulárny* $\Leftrightarrow \forall c \in X\ \forall U \in \eta(x)\ \exists V \in \eta(x) : \bar{V} \subseteq U$.

Dôkaz. Nech $\forall \alpha \in I$ X_α je úplne regulárny. $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Nech $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie. Nech $V \in \mathcal{S}$, $x \in V$ v X. $\exists \alpha_0 \in I\ \exists U \in X_{\alpha_0}$ otvorená: $V = (p_{\alpha_0})^{-1}(U)$. $x \in V \Rightarrow p_{\alpha_0}(x) \in U$. Pretože X_{α_0} je úplne regulárny existuje spojité zobrazenie $f_{\alpha_0} : X_{\alpha_0} \to [0,1]$; $f_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}(x)) = 1$, $f_{\alpha_0}[X_{\alpha_0} \setminus U] \subseteq \{0\}$. Nech $f = f_{\alpha_0} \circ p_{\alpha_0} : X \to [0,1]$ je spojité. $f(x) = (f_{\alpha_0} \circ p_{\alpha_0})(x) = 1$. $\forall y \in X \setminus V$ $p_{\alpha_0}(y) \in X_{\alpha_0} \setminus U \Rightarrow f_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}(y)) = 0 = f(y) \Rightarrow f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$. Teda X je úplne regulárny.

Veta 5.6. (o reprezentácii $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorov)

Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor $\Leftrightarrow$ existuje A tak, že X je homeomorfný s niektorým podpriestorom priestoru $[0,1]^A$.

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. $A = C(X,[0,1])$ množina všetkých spojitých zobrazení $f : X \to [0,1]$. $\forall f : p_f(h(x)) = f(x)$. Chceme ukázať, že X je homeomorfný s $h[X]$. $\forall f \in C(X,[0,1]) : p_f \circ h = f$ je spojité $\Rightarrow h$ je spojité. Nech $x, x' \in X$, $x \neq x'$. $\{x'\}$ je uzavretá. $x \notin \{x'\} \Rightarrow \exists f : X \to [0,1]$ spojité také, že $f(x) = 1$, $f(x') = 0$. $p_f(h(x)) = f(x) \neq f(x') = p_f(h(x')) \Rightarrow h(x) \neq h(x') \Rightarrow h$ je spojité.

Nech A je uzavretá v X. Chceme ukázať, že $h[A]$ je uzavretá v $h[X]$. Nech $y \in h[X] \setminus h[A]$. Potom $\exists x \in X : h(x) = y \Rightarrow x \notin A$. X je úplne regulárny, potom existuje spojité $f : X \to [0,1]$, $f(x) = 1$ a $f[A] \subseteq \{0\}$. $f = p_f \circ h$. $f(A) = p_f(h(A)) \subseteq \{0\}$; $f(x) = p_f(h(x)) = p_f(y) = 1$. $U = (p_f)^{-1}(0,1]$ je otvorená v $C(X,[0,1])$. $h[A] \cap U = \emptyset$, $y \in U$. $U' = U \cap h(x)$ otvorená v $h[X]$. $y \in U'$, $U' \cap h[A] = \emptyset$. Teda $h[A]$ je uzavretá v $h[X]$ a $h : X \to h[X]$ je homeomorfizmus.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech X je homeomorfný nejakému podpriestoru X' priestoru $[0,1]^A$. Priestor $[0,1]$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. $[0,1]^A$ je tiež $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor $\Rightarrow X'$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor potom X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Poznámka. Ak X je T_4-priestor, tak X je T_3-priestor.

Príklady.

5.6. Príklad na $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor, ktorý nie je normálny a teda ani T_4-priestor.
$P_6 = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ $\{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ báza τ_z.
$\{(a,b] \times (c,d],\ a,b,c,d \in \mathbb{R}; a<b<c<d\}$ je báza topológie v $(\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$.

$D := \{(x,-x);\ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $V := (-b-1,-b] \times (b-1,b]$ je otvorená v P_6. $V \cap D = \{(-b,b)\}$ je otvorená v D. D je diskrétny aj uzavretý v P_6. P_6 je separabilný. $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ je hustá v P_6. $((a,b]\times(c,d])\cap$ $\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Nech P_6 je normálny. $\forall A \subseteq D$ A je uzavretá v $D \Rightarrow A$ je uzavretá v P_6. Nech teda $A \subseteq D$ je ľubovoľná. Potom $A, D\setminus A$ sú uzavreté v D a teda aj v P_6 a $A\cap(D\setminus A)=\emptyset$. Potom existujú otvorené U_A, V_A v P_6: $U_A \supseteq A$, $V_A \supseteq D\setminus A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$. $card\ \mathcal{P}(D) = 2^{\mathcal{C}}$ (kardinalita potenčnej množiny D).

Pre $\forall A \in \mathcal{P}(D)$ vyberieme U_A a položíme $U'_A = U_A \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$. $\mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$; $A \mapsto U'_A$. Nech $A, A' \in \mathcal{P}(D)$, $A \neq A'$. Potom $A\setminus A' \neq \emptyset \vee A'\setminus A \neq \emptyset$. Nech $A \setminus A' \neq \emptyset$. Chceme ukázať, že $U'_A \neq U'_{A'}$. Nech $c \in A\setminus A'$. $U'_A = U_A \cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$, $U'_{A'} = U_{A'}\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$. $\exists V_A : A \subseteq U_A$, $D\setminus A \subseteq V_A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$, U_A, V_A sú otvorené. $\exists V_{A'} : A' \subseteq U_{A'}$, $D \setminus A' \subseteq V_{A'}$, $U_{A'} \cap V_{A'} = \emptyset$, $U_{A'}, V_{A'}$ sú otvorené.

$c \in A$, $c \in D\setminus A' \Rightarrow c \in U_A \cap V_{A'} \neq \emptyset \Rightarrow W := (U_A \cap V_{A'}) \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = \emptyset$, $W \subseteq U'_A$. $W \cap U_{A'} = \emptyset \Rightarrow$ $W \cap U'_{A'} = \emptyset\ \Rightarrow U'_{A'} \neq U'_A$. $card\ \mathcal{P}(D) = 2^{\mathcal{C}}$, $card(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = \mathcal{C}$ spor, lebo neplatí: $2^{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}$.

Teda P_6 nie je normálny. $(\mathbb{R},\tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor $\Rightarrow P_6 = (\mathbb{R},\tau_z)\times(\mathbb{R},\tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Veta 5.7. *Ak X je regulárny a má spočitateľnú bázu, tak X je normálny.*

Dôkaz. Nech A, B sú uzavreté v X, $A \cap B = \emptyset$. Nech $\mathcal{B}$ je spočitateľná báza X. $\forall x \in A$; $x \notin B$ tj. $x \in X\setminus B$ otvorená tj. $X\setminus B \in \eta(x)$. X je regulárna $\Rightarrow \exists U'_x \in \eta(x)$ tak, že $\bar{U}_x \subsetneq X\setminus B$ tj. $\bar{U}_x \cap B = \emptyset$. U_x je otvorená, $x \in U_x \Rightarrow \exists V_x \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_x \subseteq U_x$. Potom $\bar{V}_x \subseteq \bar{U}_x \Rightarrow \bar{V}_x \cap B = \emptyset$. $\mathcal{S}_A = \{V_x, x\in A\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{S}_A = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup\limits_{x\in A} V_x \supseteq A$, $\forall n \in \mathbb{N} : \bar{V}_n \cap B = \emptyset$.

Podobne dostaneme $\mathcal{S}_B = \{W_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n \supseteq \mathcal{B}$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \bar{W}_n \cap A = \emptyset$. $\forall n \in \mathbb{N}:$

$\tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup\limits_{p\leq n} \bar{W}_p$ otvorená. $\tilde{V} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tilde{V}_n \supseteq A$. $\tilde{W}_m = W_m \setminus \bigcup\limits_{p\leq m} \bar{V}_p$ otvorená $\tilde{W} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \tilde{W}_m \supseteq B$.

Zoberme ľubovoľné $\tilde{V}_n, \tilde{W}_m$. Ukážeme, že sú disjunktné.

1.) $m \leq n : \tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$, hneď vidno: $\tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset, \tilde{W}_m \subseteq W_m \subseteq \bar{W}_m \Rightarrow \tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$.

2.) $n \leq m : \tilde{W}_m \cap \bar{V}_n = \emptyset$, $\tilde{V}_n \subseteq V_n \subseteq \bar{V}_n \Rightarrow \tilde{V}_n \cap \tilde{W}_m = \emptyset$.

Príklad.

5.7. $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je normálny priestor.

Veta 5.8. *X je normálny $\Rightarrow$ pre každú uzavretú množinu A a každú otvorenú množinu $U \supseteq A$ existuje otvorená množina V tak, že $A \subseteq V$, $\bar{V} \subseteq V$.*

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: A uzavretá, U otvorená. $A \subseteq U$. A, $X\setminus U$ sú otvorené, $A \cap X\setminus U = \emptyset$, teda existujú otvorené V, W tak, že $A \subseteq V$, $X\setminus U \subseteq W$, $V \cap W = \emptyset$. $X\setminus U \subseteq W \Rightarrow U \supseteq X\setminus W$ uzavretá. $V\cap W = \emptyset \Rightarrow V \subseteq X\setminus W$ uzavretá $\Rightarrow \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

$\boxed{\Leftarrow}$: podobne.

Veta 5.9. Urysohnova Lema

X je normálny $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné uzavreté množiny A, B v X, $A\cap B = \emptyset$ existuje spojité zobrazenie $f : X \to [0,1]$, $f[A] \subseteq \{0\}$, $f[B] \subseteq \{1\}$.

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: Nech X je normálny, A, B sú uzavreté v X a $A\cap B = \emptyset$. Nech $[0,1]_{\mathbb{Q}} := [0,1]\cap\mathbb{Q}$. Utvoríme systém V_r, $r \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

(1) $\forall r \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$ je V_r otvorená.

(2) Ak $r < r'$, tak $\bar{V}_r \subseteq V_{r'}$.

(3) $A \subseteq V_0$, $B \subseteq X \setminus V_1$.

$[0,1]_{\mathbb{Q}}$ môžeme zoradiť do postupnosti $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.

Indukciou:

1°: $k = 2 : V_1 = X\setminus B$ otvorená. $A \subseteq V_1 \overset{5.8}{\Rightarrow} \exists U$ otvorená: $A \subseteq U$, $\bar{U} \subseteq V_1$. $V_0 = U$, $V_0 = V_{r_1}$, $V_1 = V_{r_2}$ otvorené. $r_1 < r_2 \Rightarrow \bar{V}_{r_1} \subseteq \bar{V}_{r_2}$, $A \subseteq V_{r_1}$, $B \subseteq X\setminus V_{r_2}$. $\bar{V}_{r_1} \subseteq V_{r_2}$ $\exists U$ otvorená $\bar{V}_{r_1} \subseteq U$, $\bar{U} \subseteq V_{r_2}$. $V_{r_3} = U$. $V_{r_1}, V_{r_2}, V_{r_3}$. $\bar{V}_{r_3} \subseteq V_{r_2}$. $r_1 < r_3 \Rightarrow \bar{V}_{r_1} \subseteq V_{r_3}$.

2° Indukčný krok: Nech $k \geq 2$ a existuje už systém $V_{r_1}, \cdots, V_{r_k}$ taký, že

(1_k) $\forall i \leq k : V_{r_i}$ je otvorená.

(2_k) $\forall i, j \leq k :$ Ak $r_i < r_j$ tak $\bar{V}_{r_i} \subseteq \bar{V}_{r_j}$.

(3_k) $A \subseteq V_{r_1}$, $B \subseteq X \setminus V_{r_2}$.

r_{k+1}: Nech $l, m \leq k$ sú také, že r_l je najväčšie z r_i, $i \leq k$ také, že $r_l \leq r_{k+1}$ a r_m je najmenšie z r_i, $i \leq k$ také, že $r_{k+1} < r_m$. Potom existuje otvorená W tak, že $\bar{V}_{r_l} \leq W$, $\bar{W} \subseteq V_{r_m}$, $V_{r_{k+1}} = W$. Máme systém $V_{r_1}, \cdots, V_{r_{k+1}}$ taký, že:

(1_{k+1}) $\forall i \leq k+1 : V_{r_i}$ je otvorená.
(2_{k+1}) $\forall i, j \leq k+1$: ak $r_i < r_j$, tak $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$. Lebo: ak $i \neq k+1 \neq j$ tak OK. Nech $j = k+1$, $i < k+1$, $r_i < r_{k+1}$. Potom $r_i \leq r_l \Rightarrow \bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_l} \subseteq \bar{V}_{r_l} \subseteq V_{r_{k+1}}$. Teraz nech $i = k+1$, $j \leq k$, $r_{k+1} < r_j$. Potom $r_m \leq r_j$. $\bar{V}_{r_{k+1}} \subseteq V_{r_m} \subseteq V_{r_j}$.
(3_{k+1}) $A \subseteq V_{r_i}$, $B \subseteq X \setminus V_{r_j}$.

Indukciou dostaneme $V_{r_1}, \cdots, V_{r_k}, \cdots$ tj. $(V_r,\ r \in [0,1]_{\mathbb{Q}})$ ktorý spĺňa:

(1) $\forall r \in [0,1]_{\mathbb{Q}} : V_r$ je otvorená.
(2) Ak $r < r'$ tak $\bar{V}_r \subseteq V_{r'}$. Pretože $r = r_i$, $r' = r_j$. $i \leq j$ potom pre $V_{r_1}, \cdots, V_{r_j}$ použijeme (2_j) $r_i < r_j \Rightarrow \bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$.
(3) $A \subseteq V_{r_1} = V_0$, $B \subseteq X \setminus V_{r_2} = V_1$.

Teraz definujeme zobrazenie $f : X \to [0,1]$ takto: $f(x) = \inf\{r \in [0,1]_{\mathbb{Q}}; x \in V_r\}$; $x \in V_1$ a $f(x) = 1$ pre $x \in X \setminus V_1$. $f[B] \subseteq \{1\}$ platí. $\forall x \in A : x \in V_0 \Rightarrow f(x) = \inf\{r \in [0,1]_{\mathbb{Q}}; x \in V_r\} = 0$, $f[A] \subseteq \{0\}$.

f je spojité: $\mathcal{S} = \{[0,a);\ a\in(0,1)\} \cup \{(b,1];\ b\in(0,1)\}$ je subbáza $[0,1]$. Zoberme $x \in f_{-1}([0,a)) \Leftrightarrow f(x) < a \Leftrightarrow \exists r \in [0,1]_{\mathbb{Q}},\ r < a : x \in V_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{r<a \\ r\in[0,1]_{\mathbb{Q}}}} V_r$ otvorená. $x \in f_{-1}[(b,1)] \Leftrightarrow b < f(x) \Rightarrow \exists r' \in [0,1]_{\mathbb{Q}} :$ $b < r' < r < f(x) \Rightarrow \exists r, r' \in [0,1]_{\mathbb{Q}} : b < r' < r : \bar{V}_{r'} \subseteq V_r\ x \notin V_r \Rightarrow \exists r' \in [0,1]_{\mathbb{Q}} : b < r'\ x \in X \setminus \bar{V}_r \Rightarrow$ $x \in \bigcup_{\substack{r'\in[0,1]_{\mathbb{Q}} \\ b<r'}} (X \setminus \bar{V}_{r'})$. Ukázali sme, že $f_{-1}[(b,1]] = \bigcup_{b<r'} (X \setminus V_{r'})$ otvorená.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech A, B sú uzavreté v X, $A \cap B = \emptyset$. Potom existuje spojité zobrazenie $f : X \to [0,1]$; $f[A] \subseteq \{0\}$, $f[B] \subseteq \{1\}$. Potom $U = f_{-1}[[0, \frac{1}{3}]]$, $V = f_{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$. $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, U, V otvorené $U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ je normálny.

Dôsledok. *Každý T_4-priestor je T_3-priestor.*

Príklad.

5.8. Ak (X,d) je metrický priestor, tak (X, τ_d) je normálny. Nech A, B sú uzavreté v (X, τ_d), $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$. $f : (X, \tau_d) \to [0,1]$, $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$. $f(x)$ je spojitá.

5.9. $Y = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor, ale nie je normálny. $Y \cong Y' \subseteq [0,1]^A$ kompaktný T_2-priestor, teda je normálny. Y' nie je normálny. Teda Y' je nenormálny podpriestor normálneho priestoru. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ je normálny, ale $(\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je normálny.

Veta 5.10. (Tietzeho Veta)
Ak X je normálny, A je uzavretý podpriestor priestoru X a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, tak existuje spojité zobrazenie $g : X \to \mathbb{R}$ také, že $\forall x \in A : g(x) = f(x)$.

VI. KOMPAKTNÉ PRIESTORY

Definícia 6.1.

(1) Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva *pokrytie* priestoru X (resp. podmnožiny A priestoru X) ak $X = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ (resp. $A \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$). Ak všetky prvky $\mathcal{S}$ sú otvorené množiny v X, tak $\mathcal{U}$ sa nazýva *otvorené pokrytie*.
(2) Priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X existuje konečné podpokrytie $\mathcal{U}'$ priestoru X tak, že $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}'$.
(3) Podmnožina A priestoru X sa nazýva *kompaktná*, ak podpriestor priestoru X určený A je kompaktný priestor.

Príklady.

6.1. Každý konečný priestor je kompaktný.
6.2. Každý indiskrétny priestor je kompaktný.

6.3. Nech X je množina a τ je kofinitná topológia na X. $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X);\ X \setminus U$ je konečná $\} \cup \{\emptyset\}$. (X, τ) je kompaktný T_1-priestor. Dôkaz: $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (X, τ). $U \in \mathcal{U}$, $U \neq \emptyset$, $X \setminus U = \{x_1, \cdots, x_k\}$ existujú $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{U} : x_1 \in U_1, \cdots, x_k \in U_k$. $\mathcal{U}' = \{U, U_1, \cdots, U_k\}$ je konečné pokrytie X, $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

6.4. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je kompaktný T_2-priestor. Dôkaz: $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie $[a, b]$. $K := \{c \in [a, b]$; existuje konečné pokrytie $\mathcal{U}'$ intervalu $[a, c]$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'\}$. $K \neq \emptyset$, lebo $a \in K$. Nech $d := \sup K$. Existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $d \in U$. Ak $d = a$, tak $d \in K$. Nech $d > a$. $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $(d - \varepsilon, d + \varepsilon) \cap [a, b] \subseteq U$. $d - \varepsilon < d \Rightarrow \exists c \in K : c > d - \varepsilon$, $(c \leq d)$. $[c, d] \subseteq (d - \varepsilon, d] \subseteq U$, $c \in K \Rightarrow \exists U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{U}$; $[a, c] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Potom $[c, d] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup U$. Teda $d \in K$. Nech $d < b$, $U \in \mathcal{U}$, $d \in U$. $[d, d+\varepsilon) \subseteq U$. Nech $c' \in (d, d+\varepsilon)$. $[d, c'] \subseteq U$, $[a, c'] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup U \Rightarrow c' \in K$, $c' > d \ldots$ spor. Teda $d = b \in K$.

Veta 6.1. *Nech X je priestor a A je podmnožina X. Potom A je kompaktná $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{U}$ množiny A otvorenými množinami v X existuje konečné pokrytie $\mathcal{S}'$ množiny A tak, že $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{U}$.*

Dôkaz.
$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $\mathcal{V}$ je systém otvorených množín v X taký, že $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq A$. Potom $\mathcal{U} = \{V \cap A,\ V \in \mathcal{V}\}$ otvorené pokrytie podpriestoru A. A je kompaktný priestor $\Rightarrow \exists V_1 \cap A, \ldots, V_k \cap A$ tak $\bigcup_{i=1}^{k} (V_i \cap A) = A$. Potom $\bigcup_{i=1}^{k} V_i \supseteq A$ tj. $\{V_1, \cdots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$ je konečné pokrytie A.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie priestoru A. Pre každé $V \in \mathcal{V}$ vyberme otvorenú množinu U_V v priestore X; $U_V \cap A = V$. Potom $\mathcal{U} = \{U_V,\ V \in \mathcal{V}\}$ je systém otvorených množín v X, pre ktorý $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} U_V \supseteq A$. Potom existujú $V_1, \cdots, V_k \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^{k} U_{V_i} \supseteq A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} U_{V_i} = A$. $(U_{V_i} \cap A = V_i)$. $\{V_1, \cdots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$. Teda A je kompaktný.

Definícia 6.2. Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva *centrovaný*, ak pre ľubovoľný konečný neprázdny systém $\{A_1, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{S}$ platí $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$.

Príklady.
6.6. $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ 0 \in A\}$ je centrovaný.

6.7. $\mathcal{S} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus U$ je konečná $\}$ je centrovaný. Dôkaz: $U_1, \cdots, U_k$; $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \mathbb{R}$. $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} (\mathbb{R} \setminus U_i)$ je konečná.

Veta 6.2. *Ak X je topologický priestor, tak nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*
1. *X je kompaktný.*
2. *Pre každý centrovaný systém $\mathcal{V}$ uzavretých podmnožín priestoru X: $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \neq \emptyset$.*
3. *Pre každý centrovaný systém $\mathcal{S}$ podmnožín X: $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} \bar{A} \neq \emptyset$.*

Dôkaz. $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín X taký, že $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \emptyset$. Nech $\mathcal{U} = \{X \setminus V;\ V \in \mathcal{V}\}$. $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} (X \setminus V) = X \setminus \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = X \Rightarrow \mathcal{U}$ je otvorené pokrytie X. Nech $U_1, \cdots, U_k$ je ľubovoľný neprázdny konečný systém prvkov z $\mathcal{U}$. Potom existujú $V_1, \cdots, V_k \in \mathcal{V}$ tak, že $U_1 = X \setminus V_1$, $\ldots$, $U_k = X \setminus V_k$. $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus V_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \neq X$, lebo $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ak $\mathcal{S}$ je centrovaný systém, tak aj $\mathcal{S}' = \{\bar{A};\ A \in \mathcal{S}\}$ je centrovaný systém uzavretých množín $\Rightarrow \bigcap\limits_{A\in\mathcal{S}} \bar{A} \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nech X nie je kompaktný. Potom existuje otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X také, že pre ľubovoľný konečný systém $\{U_1, \cdots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ platí $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \neq X$. $\mathcal{S} := \{X \setminus U,\ U \in \mathcal{U}\}$ je to centrovaný systém. Nech $\emptyset \neq \{X \setminus U_1, \cdots, X \setminus U_k\} \subseteq \mathcal{S}$. $\bigcap\limits_{i=1}^{k}(X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$. $\mathcal{S}$ je centrovaný $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{S}} \bar{A} = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} \overline{(X \setminus U)} = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} (X \setminus U) = X \setminus \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U = X \setminus X = \emptyset$.

Veta 6.3. *Nech X je priestor, $\mathcal{B}$ je báza topológie X. Potom X je kompaktný $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{S}$ priestoru X také, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ existuje konečné pokrytie $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ priestoru X.*

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: zrejmá.
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie X. Pre každé $x \in X$ vyberme $U_x \in \mathcal{U}$ tak, že $x \in U_x$. Pre každé x vyberme $V_x \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_x \subseteq U_x$. $\mathcal{S} = \{V_x,\ x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ je pokrytie X tj. $\bigcup\limits_{x\in X} V_x = X$. Existuje $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_k \in X$ tak, že $V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k} = X$. $\forall i = 1, \cdots, k : V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ a $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{x_i} = X$. $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_k}\} \subseteq \mathcal{U}$.

Príklad 6.8. $(0,1) \subseteq [0,1]$, ale $(0,1)$ nie je kompaktný. Teda podpriestor kompaktnej množiny nemusí byť kompaktný.

Veta 6.4.
(1) *Každý uzavretý podpriestor A kompaktného priestoru X je kompaktný.*
(2) *Každý kompaktný podpriestor A T_2-priestoru X je uzavretý podpriestor.*

Dôkaz.
(1) Nech $\mathcal{S}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín priestoru A. Potom, pretože A je uzavretý, $\mathcal{S}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín v X, X je kompaktný $\Rightarrow \bigcap\limits_{C\in\mathcal{S}} C \neq \emptyset$. Teda A je kompaktný.
(2) Nech $c \notin A$. $\forall a \in A$ existujú otvorené množiny U_a, V_a tak, že $a \in V_a$, $c \in U_a$. $\{V_a;\ a \in A\}$ je otvorené pokrytie A. Existuje $a_1, \cdots, a_k \in A$: $V := V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_k} \supseteq A$, $U = U_{a_1} \cap \cdots \cap U_{a_k}$ otvorená, $c \in U$, $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq V \Rightarrow U \cap A = \emptyset$. $X \setminus A$ je otvorená $\Rightarrow A$ je uzavretá.

Dôsledok. *Ak X je kompaktný T_2-priestor a $A \subseteq X$, tak A je kompaktná $\Leftrightarrow$ A je uzavretá.*

Príklad 6.9. Nech (X, τ_X) je ľubovoľný topologický priestor. Nech $c \notin X$. $Y = X \cup \{c\}$, $\tau_Y = \tau_X \cup \{Y\}$. Potom (Y, τ_Y) je topológia, je to kompaktný priestor. Ak $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (Y, τ_Y), tak existuje $U \in \mathcal{U} : c \in U \Rightarrow U = Y \Rightarrow \{Y\} \subseteq \mathcal{U}$. (X, τ_X) je otvorený podpriestor (Y, τ_Y). Ak (X, τ_X) je T_0-priestor, tak aj (Y, τ_Y) je T_0-priestor. Ak $X \neq \emptyset$, tak (Y, τ_Y) nie je T_1-priestor.

Veta 6.5. *Nech X je T_2-priestor a A, B sú kompaktné podmnožiny v X, $A \cap B = \emptyset$. Potom existujú otvorené množiny $U, V \in X$ tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.*

Dôkaz.
a) Nech $a \in A$. Potom $\forall b \in B$, $a \neq b$ a teda existujú otvorené množiny U_b, V_b tak, že $a \in U_b$, $b \in V_b$ a $U_b \cap V_b = \emptyset$. $\mathcal{V} = \{V_b,\ b \in B\}$ je otvorené pokrytie B – kompaktná, preto existuje $b_1, \cdots, b_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$ tak, že $B \subseteq V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_k} = V$ je otvorená. $U_{b_1}, \cdots, U_{b_k}$, $\forall i : a \in U_{b_i}$, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_{b_i}$ otvorená množina. $\forall i = 1, \cdots, k$: $U \cap V_{b_i} = \emptyset$, $(U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset)$. Potom $U \cap V = \emptyset$. $a \in U$, $b \in V$.
b) Podľa **a)** pre každé $a \in A$ existujú otvorené množiny W_a, S_a tak, že $a \in W_a$, $B \subseteq S_a$, $W_a \cap S_a = \emptyset$. $\mathcal{W} = \{W_a, a \in A\}$ je otvorené pokrytie A – kompaktná $\Rightarrow \exists a_1, \cdots, a_m \in A$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{a_i} = W$

otvorená. $\forall i : B \subseteq S_{a_i} \Rightarrow B \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i} = S$ otvorená; $\forall i : S \cap W_{a_i} \subseteq S_{a_i} \cap W_{a_i} = \emptyset \Rightarrow S \cap W = \emptyset$, $A \subseteq W$, $B \subseteq S$.

Veta 6.6. *Ak X je kompaktný T_2-priestor, tak X je normálny (a aj T_4-priestor).*

Dôkaz. Ak A, B sú uzavreté v X, $A \cap B = \emptyset$, tak A, B sú kompaktné v X. Ďaľej použijeme *vetu 6.5.*

Dôsledok. *Ak X je kompaktný T_2-priestor, tak X a aj každý jeho podpriestor je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor (a teda aj T_3-priestor).*

Veta 6.7. *Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom platí:*

(1) *Ak A je kompaktná podmnožina X, tak $f[A]$ je kompaktná podmnožina Y. (Špeciálne: Ak X je kompaktný, tak $f[X]$ je kompaktný v Y.)*
(2) *Ak X je kompaktný a Y je T_2-priestor, tak f je uzavreté zobrazenie. Ak naviac f je surjektívne, tak f je aj faktorové zobrazenie.*
(3) *Ak X je kompaktný a Y je T_2-priestor a f je bijektívne, tak f je homeomorfizmus.*
(4) *Ak $Y = \mathbb{R}$ a $X \neq \emptyset$ je kompaktný, tak existujú $a, b \in X$ tak, že $\forall x \in X$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Dôkaz.

(1) Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie $f[A]$, tj. $f[A] \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Potom $\mathcal{U} = \{f_{-1}(V),\ V \in \mathcal{V}\}$ je otvorené pokrytie A v X. Teda $\exists V_1, \cdots, V_k \in \mathcal{V}$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f_{-1}(V_i) \Rightarrow f[A] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. $\{V_1, \cdots, V_k\} \subseteq \mathcal{V}$. $f[A]$ je kompaktná.
(2) Nech A je uzavretá v X. Potom A je kompaktná v X a teda $f[A]$ je kompaktná v Y. Y je T_2-priestor, potom $f[A]$ je uzavretá v Y.
(3) Stačí ukázať, že f^{-1} je spojité. Nech A je uzavretá v X. Potom $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ je uzavretá v Y a teda f je spojité.
(4) $f[X] \neq \emptyset$ je kompaktná v $\mathbb{R}$. Potom $f[X]$ je ohraničená v $\mathbb{R}$. Nech $c := \inf f[X]$, $d := \sup f[X]$. $f[X]$ je kompaktná $\Rightarrow$ $f[X]$ je uzavretá $\Rightarrow$ $c, d \in f[X]$. Existujú $a, b \in X$ tak, že $f(a) = c$, $f(b) = d$ a $\forall x \in X : f(a) = c \leq f(x) \leq d = f(b)$.

Definícia 6.3. Priestor X sa nazýva *lokálne kompaktný*, ak pre každé $a \in X$ existuje okolie U bodu a také, že $\bar{U}$ je kompaktná množina v X.

Príklady.

6.10. Každý kompaktný priestor je lokálne kompaktný.

6.11. Každý diskrétny priestor je lokálne kompaktný.

6.12. $\mathbb{R}$ s obyčajnou topológiou je lokálne kompaktný.

6.13. $\mathbb{Q}$ ako podpriestor $\mathbb{R}$ je topologický priestor, ktorý nie je lokálne kompaktný. Dôkaz: Nech U je okolie bodu 0 v $\mathbb{Q}$ také, že $\bar{U}$ je kompaktný v $\mathbb{Q}$. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(-\varepsilon, \varepsilon)_Q = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. $(-\varepsilon, \varepsilon)_Q \subseteq U$. Nech $\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 0 < \delta < \varepsilon$. Potom $(-\delta, \delta)_Q \subseteq U$. Potom $\overline{(-\delta, \delta)_Q} \subseteq \bar{U}$ a teda $\overline{(-\delta, \delta)_Q}$ je kompaktná. $\overline{(-\delta, \delta)_Q}^{Q} = \overline{(-\delta, \delta)_Q}^{R} = [-\delta, \delta] \cap \mathbb{Q} = (-\delta, \delta)_Q$. Potom $(-\delta, \delta)_Q$ je kompaktná v $\mathbb{Q}$. Nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných racionálnych čísel taká, že $r_n \to \delta$ v $\mathbb{R}$. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-r_n, r_n) = (-\delta, \delta)$. Potom $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-r_n, r_n)_Q = (-\delta, \delta)_Q$. Systém $\{(-r_n, r_n)_Q,\ n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie $\mathbb{Q}$, ale nedá sa z neho vybrať konečné podpokrytie. Keby áno: $(-r_{k_1}, r_{k_1}), \cdots, (-r_{k_m}, r_{k_m})$. $r_{k_j} := \max\{r_{k_1}, \cdots, r_{k_m}\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} (-r_{k_i}, r_{k_i}) = (-r_{k_j}, r_{k_j}) \subsetneq (-\delta, \delta)_Q$. Teda $(-\delta, \delta)_Q$ nie je kompaktný. Spor.

Veta 6.8.

(1) *Ak X je lokálne kompaktný T_2-priestor, tak pre každé $a \in X$ a každé okolie U bodu a existuje okolie V bodu a také, že $\bar{V}$ je kompaktná množina a $\bar{V} \subseteq U$.*
(2) *Ak X je regulárny lokálne kompaktný priestor, tak pre každé $a \in X$ a každé okolie U bodu a existuje okolie V bodu a také, že $\bar{V}$ je kompaktná množina a $\bar{V} \subseteq U$.*

Dôkaz.

(1) Nech $a \in X$ a U je okolie a v X. Existuje okolie W bodu a také, že $\bar{W}$ je kompaktná množina. Potom $U \cap W =: U'$ je okolie bodu a v X a aj v podpriestore $\bar{W}$. $\bar{W}$ je kompaktný $\Rightarrow$ $\bar{W}$ je regulárny priestor. Potom existuje okolie V bodu a vo $\bar{W}$ tak, že $\bar{V} \subseteq U'$. V je okolie a aj v podpriestore U' priestoru $\bar{W}$. $(V \cap U' = V)$. Teda V je otvorená v U'; U' je otvorená v X, potom V je otvorená aj v X a teda V je okolie a v X. $V \subseteq \bar{W}$ uzavretá v X. Potom $\bar{V}^X = \bar{V}^{\bar{W}}$ resp. $(\bar{V}^X \subseteq \bar{W}^X)$. $\bar{V}$ je uzavretý podpriestor $\bar{W}$. Potom $\bar{V}$ je kompaktná množina v X, $\bar{V} \subseteq U' \subseteq U$. V je okolie a v X, $\bar{V}$ je kompaktná, $\bar{V} \subseteq U$.

Veta 6.9. Alexandrovova kompaktifikácia

Nech (X, τ_X) je lokálne kompaktný T_2-priestor, $c \notin X$. Nech $Y = X \cup \{c\}$ a $\tau_Y = \tau_X \cup \{V \in \mathcal{P}(Y) : c \in V,$ $X \setminus V$ je kompaktná množina v $(X, \tau_X)\}$. Potom (Y, τ_Y) je kompaktný T_2-priestor, (X, τ_X) otvorený podpriestor (Y, τ_Y) a ak (X, τ_X) nie je kompaktný, tak $\bar{X} = Y$ v (Y, τ_Y).

Dôkaz. Ak $V \in \tau_Y$, tak $V \cap X \in \tau_X$. $V \in \tau_Y \Rightarrow V \in \tau_X$ alebo $c \in V$ a $X \setminus V$ je kompaktný v (X, τ_X). Potom $V \cap X = V \in \tau_X$ alebo $c \in V$, $X \setminus V = X \setminus (V \cap X)$ je kompaktná a teda uzavretá v (X, τ_X). Potom $V \cap X \in \tau_X$. Treba ukázať, že τ_Y je topológia na Y:

$\emptyset, Y \in \tau_Y$. Nech $U, V \in \tau_Y$. Ak $U, V \in \tau_X \Rightarrow U \cap V \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Nech $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y \setminus \tau_X$. Potom $V \cap X \in \tau_X$ a aj $U \cap V = U \cap (V \cap X) \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Podobne ak $U \in \tau_Y \setminus \tau_X$, $V \in \tau_X$.

Nech $U, V \in \tau_Y \setminus \tau_X$. Potom $c \in U \cap V$. $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, $X \setminus U$ a $X \setminus V$ sú kompaktné v (X, τ_X) a aj ich (konečné) zjednotenie je kompaktné v (X, τ_X). Teda $U \cap V \in \tau_Y$. Nech $\mathcal{S} \subseteq \tau_Y$. Ak $\mathcal{S} \subseteq \tau_X$, tak $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S \in \tau_X \subseteq \tau_Y$. Nech $\exists V \in \mathcal{S}$, $c \in V$. Potom $X \setminus V$ je kompaktná v (X, τ_X). $W := \bigcup\limits_{A \in \mathcal{S}} A \ni c$. Vieme, že $\forall A \in \mathcal{S} : A \cap X \in \tau_X \Rightarrow X \setminus (A \cap X) = X \setminus A$ je uzavretá v (X, τ_X). $X \setminus W = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je uzavretá v (X, τ_X), $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A) \subseteq X \setminus V$ je kompaktná. $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je uzavretá v $(X \setminus V)$, potom $X \setminus W = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} (X \setminus A)$ je kompaktná v $(X \setminus V)$, a teda aj v (X, τ_X). Teda $W \in \tau_Y$. Teda (Y, τ_Y) je topologický priestor a (X, τ_X) je podpriestor (Y, τ_Y).

Nech $a, b \in Y$, $a \neq b$. (X, τ_X) je T_2-priestor, tak existujú $U, V \in \tau_X \subseteq \tau_Y$, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Nech $a \in X$, $b = c$. (X, τ_X) je lokálne kompaktný, existuje okolie U bodu a v (X, τ_X) tak, že $\bar{U}$ je kompaktná v (X, τ_X). $c \notin \bar{U}$. $V = (X \setminus \bar{U}) \cup \{c\} \in \tau_Y$, lebo $c \in V$ a $X \setminus V = \bar{U}$ je kompaktná v (X, τ_X); $U \cap V = \emptyset$. Teda (Y, τ_Y) je T_2-priestor.

Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie (Y, τ_Y). Potom existuje $U_c \in \mathcal{U}$ tak, že $c \in U_c$. Pre každé $U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}$, $U^X = U \cap X$ je otvorená v (X, τ_X). $X \setminus U_c$ je kompaktná v (X, τ_X). $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}} U \supseteq X \setminus U_c$, $X \setminus U_c \subseteq X$, preto $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}} U^X \supseteq X \setminus U_c$. $\{U^X : U \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}\}$ je otvorené pokrytie $X \setminus U_c$ v (X, τ_X). Potom existujú $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{U} \setminus \{U_c\}$. $U_1^X \cup \cdots \cup U_k^X \supseteq X \setminus U_c \Rightarrow U_1 \cup \cdots \cup U_k \supseteq X \setminus U_c \Rightarrow U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup U_c = Y$. Teda (Y, τ_Y) je kompaktný.

Ak (X, τ_X) nie je kompaktný, tak $\{c\} \notin \tau_Y$, teda pre každé okolie V bodu c platí $V \neq \{c\}$ a teda $V \cap X \neq \emptyset$. Teda $c \in \bar{X}$ v (Y, τ_Y). $\square$

Dôsledok. *Každý lokálne kompaktný T_2-priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.*

Príklad 6.14. $X = (0, 1)$, $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, $Y = f[X]$. Kompaktné množiny v Y sú uzavreté intervaly, ktoré neobsahujú bod $[1, 0]$. Ich komplementy tvoria systém okolí bodu $[1, 0]$.

Veta 6.10.

(1) *Ak A je uzavretý podpriestor lokálne kompaktného priestoru X, tak A je lokálne kompaktný.*
(2) *Ak A je otvorený podpriestor lokálne kompaktného T_2-priestoru X, tak A je lokálne kompaktný.*

Dôkaz.

(1) Nech $c \in A$. $c \in X \Rightarrow$ existuje okolie U v X bodu c tak, že $\bar{U}$ je kompaktný v X. $V = U \cap A$ je okolie c v A. $\bar{V}^A \subseteq \bar{U}$, $\bar{V}^A$ je uzavretá v A, $A \cap \bar{U}$ je uzavretá v $\bar{U}$ a teda aj kompaktná. $\bar{V}^A$ je uzavretá v $A \cap \bar{U}$ je kompaktná, potom $\bar{V}^A$ je kompaktná v A.

(2) Nech $c \in A$. A je okolie c v X a podľa *vety 6.8* existuje okolie V bodu c v X tak, že $\bar{V}$ je kompaktná v X a $\bar{V} \subseteq A$. Potom V je okolie c v A a $\bar{V}^A = \bar{V}$ kompaktná, teda A je lokálne kompaktná.

Centrované systémy, filtre a ultrafiltre.

Definícia 6.4. Nech X je množina.

(1) Systém $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *centrovaný systém* na X a pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ a $C_1, \cdots, C_k \in \mathcal{C}$ platí $\bigcap_{i=1}^{k} C_i \neq \emptyset$.

(2) Systém $\mathcal{H}$ sa nazýva *báza filtra* na X, ak $\mathcal{H} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{H}$ a pre ľubovoľné $U, V \in \mathcal{H}$ existuje $W \in \mathcal{H}$ tak, že $W \subseteq U \cap V$.

(3) Systém $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *filter* na X, ak
   1.) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
   2.) Ak $F, F' \in \mathcal{F}$ tak $F \cap F' \in \mathcal{F}$.
   3.) Ak $F \in \mathcal{F}$ a $V \in \mathcal{P}(X)$ taká, že $F \subseteq V$, tak $V \in \mathcal{F}$.

(4) Filter $\mathcal{U}$ na X sa nazýva *ultrafilter* na X, ak pre každý filter $\mathcal{G}$ na X, pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ platí $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. tj. $\mathcal{U}$ je maximálny vzhľadom na $\subseteq$.

Príklady. 6.15. $\mathcal{C} = \{\mathbb{N} \setminus \{n\}; n \in \mathbb{N}\}$ je centrovaný systém na $\mathbb{N}$, ktorý nie je báza filtra.

6.16. $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \{(c - \varepsilon, c + \varepsilon), \varepsilon > 0\}$ je báza filtra a nie je to filter.

6.17. Každá báza okolí bodu v topologickom priestore je báza filtra.

6.18. $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \setminus A$ je konečná$\}$, zrejme $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Je to filter, ale nie je to ultrafilter.

6.19. $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \setminus A$ je spočítateľná$\}$ je filter na $\mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$, lebo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.

6.20. $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), 0 \in A\}$ je ultrafilter na $\mathbb{R}$.

6.21. $Y \subseteq X$, $\mathcal{F}$ je filter na Y, tak $\mathcal{F}$ je báza filtra na X.

Veta 6.11.

(1) *Ak $\mathcal{C}$ je centrovaný systém, tak* $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \{H \in \mathcal{P}(X); \exists k \in \mathbb{N}\ \exists C_1, \cdots, C_k \in \mathcal{C} : H = \bigcap_{i=1}^{k} C_i\}$ *je báza filtra.*

(2) *Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra na X, tak $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{V \in \mathcal{P}(X); \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq V\}$ je filter na X.*

(3) *Ak $\mathcal{F}$ je filter a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ taká, že $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq F$, tak $\mathcal{H}$ je báza filtra a $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}$. ($\mathcal{F}$ je generovaný $\mathcal{H}$).*

Dôkaz.

(1) $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$; $\emptyset \notin \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Ak $H, H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, tak $H \cap H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$.

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Ak $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ tak $\exists H, H' \in \mathcal{H} : H \subseteq A$, $H' \subseteq B$. Potom existuje $H'' \in \mathcal{H}$ tak, že $H'' \subseteq H \cap H' \subseteq A \cap B$. Teda $A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Nech $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a $U \in \mathcal{P}(X)$ tak, že $F \subseteq U$. Potom existuje $H \in \mathcal{H}$, $H \subseteq F \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Veta 6.12.

(1) *Ak $\mathcal{C}$ je centrovaný systém na X; $f : X \to Y$ je zobrazenie, tak $f[\mathcal{C}] = \{f[C]; C \in \mathcal{C}\}$ je centrovaný systém na Y.*

(2) *Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra na X a $f : X \to Y$ je zobrazenie, tak $f[\mathcal{H}] = \{f[H]; H \in \mathcal{H}\}$ je báza filtra na Y.*

Dôkaz.

(2) Ak $H \in \mathcal{H}$, tak $H \neq \emptyset$ a $f[H] \neq \emptyset$, teda $\emptyset \notin f[\mathcal{H}]$. Nech $A, B \in f[\mathcal{H}]$. Potom existujú $C, D \in \mathcal{H}$: $A = f[C]$, $B = f[D]$. Existuje $F \in \mathcal{H}$, $F \subseteq C \cap D$. Potom $f[F] \subseteq f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D] = A \cap B$; $f[F] \in f[\mathcal{H}]$. Teda $f[\mathcal{H}]$ je báza filtra na Y.

Príklad 6.22. Obraz filtra nemusí byť filter: $\mathcal{F}$ je filter na X; Y má aspoň dva prvky; $c \in Y$ a $f : X \to Y$; $f(x) = c$ pre $\forall x \in X$. $f[\mathcal{F}] = \{\{c\}\}$ je báza filtra, ale nie je to filter, lebo $Y \notin f[\mathcal{F}]$.

Veta 6.13. *Ak $\mathcal{C}$ je centrovaný systém na X, tak existuje centrovaný systém $\mathcal{U}$ na X taký, že $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ a pre každý centrovaný systém $\mathcal{V}$ na X taký, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ platí $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. (tj. $\mathcal{U}$ je maximálny centrovaný systém na X vzhľadom na $\subseteq$. Naviac $\mathcal{U}$ je vždy ultrafilter.)*

Dôkaz. Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých centrovaných systémov na X, pre ktoré $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $(\mathcal{S}, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Nech $\emptyset \neq R$ je reťazec v $(\mathcal{S}, \subseteq)$. Nech $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{D} \in R} \mathcal{D}$. $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Nech $M_1, \cdots, M_k \in \mathcal{M}$. $\forall i = 1, \cdots, k\ \exists \mathcal{D}_i \in R : M_i \subseteq \mathcal{D}_i$. Existuje $n \in \{1, \cdots, k\}$ tak, že $\forall i = 1, \cdots, k$: $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}_n$. Potom $M_1, \cdots, M_k \in \mathcal{D}_n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} M_i \neq \emptyset$. Teda $\mathcal{M}$ je centrovaný systém na X. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ (lebo $\forall \mathcal{D} \in R : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$) tj. $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$ a $\forall \mathcal{D} \in R : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$, teda $\mathcal{M}$ je horné ohraničenie R. Podľa *Zornovej lemy* existuje maximálny prvok $\mathcal{U}$ v $(\mathcal{S}, \subseteq)$.

Zrejme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém na X, pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Pretože $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ a teda $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$ je maximálny v $(\mathcal{S}, \subseteq)$, tak $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ je ultrafilter. $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Nech $A, B \in \mathcal{U}$. Nech $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ je centrovaný systém na X; $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$. Nech $A \in \mathcal{U}$ a $V \in \mathcal{P}(X)$ taká, že $A \subseteq V$. $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{V\}$ je centrovaný systém na X. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V} \Rightarrow V \in \mathcal{U}$. Teda $\mathcal{U}$ je filter na X. Nech $\mathcal{U}'$ je filter na X a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Potom $\mathcal{U}'$ je centrovaný systém na X a teda $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Teda $\mathcal{U}$ je ultrafilter. □

Dôsledok. *Ak $\mathcal{F}$ je centrovaný systém (v. báza filtra, v. filter) na X, tak existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X, pre ktorý $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Veta 6.14. *Nech $\mathcal{F}$ je filter na X. Potom platí:*

(1) *$\mathcal{F}$ je ultrafilter na $X \Leftrightarrow$ pre každé $U \in \mathcal{P}(X)$, pre ktoré $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$ platí $U \in \mathcal{F}$.*
(2) *$\mathcal{F}$ je ultrafilter na $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{F}$ alebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Dôkaz.

(1) $\boxed{\Rightarrow}$: $U \in \mathcal{P}(X)$, $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$. $\mathcal{V} = \mathcal{F} \cup \{U\}$ je centrovaný systém. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Existuje maximálny centrovaný systém $\mathcal{W}$ na X, pre ktorý $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ je ultrafilter. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{W}$ a $U \in \mathcal{W} = \mathcal{F}$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter. Potom $\exists \mathcal{G}$ na X taký, že $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Nech $U \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Zrejme $\forall F \in \mathcal{F} : F \in \mathcal{G}$ potom $F \cap U \in \mathcal{G} \Rightarrow F \cap U \neq \emptyset$. tj. $\exists U \in \mathcal{P}(X)$, $U \notin \mathcal{F}$ a $\forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$.
(2) $\boxed{\Rightarrow}$: Nech $A \subseteq X$ taká, že $A \notin \mathcal{F}$. Podľa (1) musí existovať $F \in \mathcal{F} : A \cap F = \emptyset$. Potom $F \subseteq X \setminus A$ a teda $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter. Potom existuje filter $\mathcal{G}$ na X také, že $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. $\exists A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$: $A \in \mathcal{G} \Rightarrow X \setminus A \notin \mathcal{G} \Rightarrow X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Teda $\exists A \subseteq X$ tak, že $A \notin \mathcal{F}$ a aj $X \setminus A \notin \mathcal{F}$.

Kompaktné priestory (pokračovanie).

Veta 6.15. *Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém kompaktných priestorov, tak aj $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je kompaktný priestor.*

Dôkaz. $I = \emptyset$: $\prod_{\alpha \in \emptyset} X_\alpha = \{*\}$ vždy kompaktný. Ak $\exists \alpha \in I : X_\alpha = \emptyset$, tak $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \emptyset$ je kompaktný. Ak $I \neq \emptyset$ a $\forall \alpha \in I\ X_\alpha \neq \emptyset : X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Nech $\mathcal{C}$ je centrovaný systém na X. Chceme dokázať, že $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C} \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X taký, že $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V} \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C}$. Stačí ukázať, že $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V} \neq \emptyset$. Nech $\alpha \in I$. Potom $p_\alpha[\mathcal{U}] = \{p_\alpha[V], V \in \mathcal{U}\}$ je báza filtra a teda aj centrovaný systém na X_α. Teda $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} \overline{p_\alpha[V]} \neq \emptyset$ (lebo X_α je kompaktný.) $\forall \alpha \in I$ vyberieme $c_\alpha \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \overline{p_\alpha[V]}$ a zoberieme $c \in X$ taký, že $p_\alpha(c) = c_\alpha$. Ukážeme, že $c \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \bar{V}$. Nech $V \in \mathcal{U}$ a U je ľubovoľné okolie c v X. Existujú $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in I$ a U_1 otvorené v $X_{\alpha_1}, \cdots, U_k$ otvorené v X_{α_k} tak, že $c \in \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_1})_{-1}(U_i) \subseteq U$.

Pre $\forall i = 1, \cdots, k : p_{\alpha_i}(c){=}c_{\alpha_i} \in U_i$. $c_{\alpha_i} \in p_{\alpha_i}[V] \Rightarrow U_i \cap p_{\alpha_i}[V] \neq \emptyset$. $(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \cap V \neq \emptyset$. Teda $\forall V{\in}\mathcal{U} : (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \cap V = \emptyset \Rightarrow (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \in \mathcal{U}$. $\forall i = 1, \cdots, k : (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i) \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})_{-1}(U_i){\in}\mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{U} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset$. Potom $\forall V \in \mathcal{U} : c \in \bar{V}$ a teda $c \in \bigcap_{V\in\mathcal{U}} \bar{V} \neq \emptyset$. Teda X je kompaktný.

Poznámka. Veta 6.15. sa občas nazýva aj *Tichonovova veta*, ale vo všeobecnosti to dokázal *Čech.* Opačná implikácia platí za predpokladu neprázdneho systému s neprázdnymi množinami.

Dôsledok 1. *Pre ľubovoľnú množinu A je $[0,1]^A$ kompaktný T_2-priestor.*

Dôsledok 2. *Každá uzavretá ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$ je kompaktná.*

Veta 6.16. (o reprezentácii kompaktných $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorov)
Priestor X je kompaktný T_2-priestor $\Leftrightarrow$ existuje množina A tak, že X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $[0,1]^A$.

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: Nech X je kompaktný T_2-priestor. Potom X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. Potom existuje A tak, že X je homeomorfný s podpriestorom X' priestoru $[0,1]^A$. Priestor X' je kompaktný a teda uzavretý v $[0,1]^A$ (lebo $[0,1]^A$ je T_2-priestor.).
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $X' = [0,1]^A$. Pretože $[0,1]^A$ je kompaktný T_2-priestor $\Rightarrow X'$ je kompaktný T_2-priestor $\Rightarrow X$ je kompaktný T_2-priestor.

Definícia 6.5. Nech X je priestor. Usporiadaná dvojica $(b_X, B(X))$ sa nazýva *kompaktifikácia* priestoru X, ak $B(X)$ je kompaktný T_2-priestor; $b_X : X \hookrightarrow B(X)$ je vnorenie a $\overline{b_X[X]} \subseteq B(X)$.

Veta 6.17. *Pre každý $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor existuje kompaktifikácia $(b_X, B(X))$.*

Dôkaz. Ak X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor, tak existuje množina A a vnorenie $j_X : X \hookrightarrow [0,1]^A$. $B(X) = \overline{j_X[X]}$ je kompaktný podpriestor $[0,1]^A$. $b_X : X \to B(X)$, $\forall a \in X, b_X(a) = j_X(a)$; $(b_X, B(X))$ je kompaktný v X.

Príklad 6.23. Podpriestor normálneho priestoru nemusí byť normálny:
$X = (\mathbb{R}, \tau_z) \times (\mathbb{R}, \tau_z)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor, ale nie je normálny. Existuje kompaktifikácia $(b_X, B(X))$ priestoru X. $b_X(X) = X'$ je podpriestor kompaktného T_2-priestoru $B(X) \Rightarrow X'$ je T_4-priestor $\Rightarrow$ je normálny, ale X' nebol normálny.

Príklad 6.24. $\mathbb{N}$ s diskrétnou topológiou; $\mathbb{N}^*$ je *Alexandrovova kompaktifikácia* na $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.
$\tau_{\mathbb{N}^*} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{\omega\}); \omega \in U$ a $\mathbb{N} \setminus U$ je konečná $\}$.

Príklad 6.25. $\mathbb{R}$ s diskrétnou topológiou; $\mathbb{R}^*$ je *Alexandrovova kompaktifikácia* v $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
$\tau_{\mathbb{R}^*} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{\infty\}); \infty \in U$ a $\mathbb{R} \setminus U$ je konečná $\}$. $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$ sú kompaktné T_2-priestory a aj $\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$ je kompaktný T_2-priestor, teda aj T_4-priestor.

Nech $Y = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*) \setminus \{(\infty, \omega)\}$ je podpriestor otvoreného priestoru $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*)$, ktorý je lokálne kompaktný. $A' := \mathbb{R}^* \times \{\omega\}$ je uzavretá v $X := \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$; $B' := \{\infty\} \times \mathbb{N}^*$ je uzavretá v X. $A' \cap Y = \mathbb{R} \times \{\infty\} = A$ je uzavretá v Y, $B' \cap Y = \{\infty\} \times \mathbb{N} = B$ je uzavretá v Y; $A \cap B = \emptyset$. Nech U je otvorená v Y a platí $B \subseteq U$. Podpriestor $\mathbb{R}^* \times \{n\}$ v X $(n \in \mathbb{N})$ je homeomorfný s $\mathbb{R}^*$. $\mathbb{R}^* \times \{n\}$ je podpriestor v Y. $U_n = U \cap (\mathbb{R}^* \times \{n\})$ je otvorená v $\mathbb{R}^* \times \{n\} \Rightarrow U_n = W_n \times \{n\}$. $A_n = \mathbb{R} \setminus W_n$ je konečná. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ je spočítateľná $\Rightarrow \emptyset \neq \mathbb{R} \setminus A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = W$. $\forall n \in \mathbb{N} : W \times \{n\} \subseteq W_n \times \{n\} = U_n$. Teda $W \times \mathbb{N} \subseteq U$. Nech V je otvorená v Y taká, že $A \subseteq V$. Potom V je otvorená aj v X. Zoberme si $r \in W$. $\{r\} \times \mathbb{N}^*$ je podpriestor Y; $\{r\} \times \mathbb{N}^* \cong \mathbb{N}^*$. $V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*)$ je otvorená v $\{r\} \times \mathbb{N}^* \Rightarrow V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*) = \{r\} \times V_r$, $\mathbb{N} \setminus V_r$ je konečná $\Rightarrow \emptyset \neq V_r \setminus \{(r, \omega)\}$ tj. $\exists k \in \mathbb{N} : (r,k) \in V \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^*) \Rightarrow (r,k) \in V$. $r \in W \Rightarrow (r,k) \in W \times \mathbb{N} \subseteq U \Rightarrow V \cap U \neq \emptyset$. Teda Y je normálny.

VII. SÚVISLÉ PRIESTORY A LINEÁRNE SÚVISLÉ PRIESTORY

Definícia 7.1. Priestor X sa nazýva *súvislý*, ak sa nedá vyjadriť ako zjednotenie dvoch neprázdnych otvorených a disjunktných podmnožín. tj. ak $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, U, V sú otvorené $\Rightarrow U = \emptyset$ alebo $V = \emptyset$. Podmnožina A priestoru X sa nazýva *súvislá*, ak podpriestor určený množinou A priestoru X je súvislý. Priestor X sa nazýva *lokálne súvislý*, ak každý prvok $a \in X$ má bázu okolí, ktorej všetky prvky sú súvislé množiny.

Príklad 7.1. Jednoprvkový priestor je súvislý.

7.2. Každý indiskrétny priestor je súvislý.

7.3. Každý diskrétny priestor s aspoň dvomi prvkami nie je súvislý.

7.4. $X = (0,1) \cup [2,3]$ podpriestor priestoru $\mathbb{R}$. $U = (0,1)$, $V = [2,3]$ sú otvorené v X, disjunktné, preto X nie je súvislý.

Tvrdenie 7.1. *Podmnožina I priestoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou je súvislá $\Leftrightarrow$ $I = \emptyset$, alebo I je jednoprvková, alebo I je interval.*

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$: Nech I má aspoň dva prvky a I nie je interval. Teda $\exists a, b \in I$; $a < b$ a $\exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$ a $c \notin I$. $U := (-\infty, c) \cap I$; $V := (c, \infty) \cap I$. U, V sú otvorené v I, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = I$. $a \in U \neq \emptyset$, $b \in V \neq \emptyset$. I nie je súvislá.

$\boxed{\Leftarrow}$: $\emptyset$ $\surd$; jednoprvková $\surd$. Nech teda I je interval v $\mathbb{R}$. Predpokladajme, že I nie je súvislý podpriestor. Potom existujú U, V otvorené v I, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cup V = I$. Nech $a \in U$, $b \in V$, $a < b$. Nech $A' = \{x \in U,\ x \leq b\} \subseteq U$, $a \in A' \neq \emptyset$. Nech $c = \sup A$. Platí teda $a \leq c \leq b$. Potom $c \in I$ a teda $c \in U$, alebo $c \in V$. Nech $c \in U$. U je otvorená v $I \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I \subseteq U (\subseteq I)$. Pretože $b > c \Rightarrow b \geq c + \varepsilon$. Nech $d = c + \frac{\varepsilon}{2} \in U$, ale $d < b$, $d \in U \Rightarrow d \in A'$. Lenže $d > c$ čiže spor. Teda nech $c \in V$. $\exists \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I \subseteq V$. $\forall x \in A'$, $x < c$, $(c - \varepsilon, c) \subseteq V \Rightarrow \forall x \in A'$, $x \leq c - \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon$ je horné ohraničenie A', $c - \varepsilon < c$ – spor.

Príklad 7.5. Podpriestory $X = [0,1] \cup [2,3]$, $Y = \{0,1\}$ nie sú súvislé podpriestory $\mathbb{R}$.

7.6. $[0,1]$ je súvislý priestor.

Veta 7.1. *Ak $f : X \to Y$ je surjektívne zobrazenie a X je súvislý priestor, tak aj Y je súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech Y nie je súvislý. Potom existujú otvorené podmnožiny U, V v Y tak, že $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = Y$. Nech $U' = f_{-1}(U)$, $V' = f_{-1}(V)$. Potom U', V' sú otvorené, $U' \neq \emptyset \neq V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ a $U' \cup V' = X$. Teda X nie je súvislý – spor.

Dôsledok. *Ak f je spojité, $f : X \to Y$ a A je súvislá podmnožina X, tak $f[A]$ je súvislá podmnožina Y.*

Veta 7.2. *Nech $(A_\alpha, \alpha \in I)$ je systém súvislých podmnožín priestoru X a $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Potom $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je súvislá množina.*

Dôkaz. Nech $p \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$; U, V sú otvorené podmnožiny A, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = A \Rightarrow p \in U$ alebo $p \in V$. BUNO $p \in U$ a $\alpha \in I$. Potom $U_\alpha = U \cap A_\alpha$, $V_\alpha = V \cap A_\alpha$ sú otvorené v A_α, $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$, $U_\alpha \cup V_\alpha = A_\alpha$, $p \in U_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow V_\alpha = \emptyset$. Teda $\forall \alpha \in I : V \cap A_\alpha = \emptyset \Rightarrow V \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \emptyset \Rightarrow V \cap A = V = \emptyset$. Teda A je súvislý.

Definícia 7.2. Nech $p \in X$ a $C_p = \bigcup \{A;\ A$ je súvislá podmnožina X a $p \in A\}$. Potom C_p sa nazýva *komponenta súvislosti* X obsahujúca p.

Veta 7.3. *Nech A je súvislá podmnožina v priestore X a $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Potom B je súvislá v X.*

Dôkaz. Nech B nie je súvislá. Potom existujú otvorené množiny U, V v podpriestore B také, že $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = B$, $U, V \neq \emptyset$. Nech $a \in U$. Potom $a \in B \subseteq \bar{A}$. Existuje U' otvorená v X, $U' \cap B = U$. $a \in U'$ okolie a. Potom $U' \cap A = U \cap A \neq \emptyset$. Nech $b \in V$. Potom podobne z toho vyplýva, že $V \cap A \neq \emptyset$. $U_1 = U \cap A$, $V_1 = V \cap A$ sú otvorené v A, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $U_1 \neq \emptyset \neq V_1$, $U_1 \cup V_1 = A$. Teda A nie je súvislá.

Dôsledok. *Ak A je súvislá podmnožina X, tak aj $\bar{A}$ je súvislá podmnožina X.*

Príklad 7.7. $X = \mathbb{R}^2$; $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0,1],\ y = \sin \frac{\pi}{x}\}$. $f : (0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \sin \frac{\pi}{x})$ je spojité a $A = f((0,1])$. $A \cup \{(0,0)\}$, $(0,0) \in \bar{A}$. $A \cup \{(0,0)\}$ je súvislá v $\mathbb{R}^2$. $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ je súvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

Veta 7.4. *Nech X je priestor. Potom pre každé $p \in X$ komponenta súvislosti C_p je najväčšia súvislá množina obsahujúca p a C_p je uzavretá. Ak $p, q \in X$, tak $C_p = C_q$, alebo $C_p \cap C_q = \emptyset$.*

Dôkaz. maximalita OK. Nech $p \in X$; C_p je súvislá a preto $\bar{C}_p$ je súvislá. $p \in \bar{C}_p \Rightarrow \bar{C}_p \subseteq C_p \Rightarrow C_p = \bar{C}_p$ teda C_p je uzavretá.

Nech $p, q \in X$ a $C_p \cap C_q \neq \emptyset$. Nech $a \in C_p \cap C_q$. Potom C_p je súvislá množina obsahujúca a, potom $C_a \supseteq C_p$. Potom C_a je súvislá množina, $p \in C_a \Rightarrow C_a \subseteq C_p$. Teda $C_p = C_a$. Podobne $C_q = C_a$. $\bigcup_{p \in X} C_p = X$; $\{C_p;\, p \in X\}$ rozklad X na uzavreté súvislé množiny = komponenty súvislosti.

Príklady.

7.8. $\mathbb{R}$; $\forall a \in \mathbb{R} : C_a = \mathbb{R}$.

7.9. X je diskrétny priestor. $\forall a \in X : C_a = \{a\}$.

7.10. $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{a\}$. Ak $b \in C_a$, $b < a$, tak $(-\infty, b) \cap C_a$ je otvorená a súčasne uzavretá v C_a; $A \neq \emptyset$, $A \neq C_a$ spor.

Definícia 7.3. Priestor X sa nazýva *totálne nesúvislý*, ak má aspoň dva rôzne prvky a všetky komponenty súvislosti sú jednoprvkové.

Veta 7.5. *Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je ľubovoľný systém súvislých priestorov, tak aj $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech $I \neq \emptyset$ a $\forall \alpha \in I : X_\alpha \neq \emptyset$. Nech $p \in X$. Nech $K = \{q \in X;\, \{\alpha \in I,\, q_a \neq p_a\}$ je konečná $\}$. Dokážeme, že $K \subseteq C_p$. Nech $q \in K$, $q \neq p$ a $\{a \in I;\, p_\alpha \neq q_\alpha\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. $q \in C_p$?

Indukciou vzhľadom na n:

1° $n = 1$, $\{\alpha \in I,\, q_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1\}$. $X_p^{(\alpha_1)} = \{\alpha \in X, \forall \alpha \neq \alpha_1,\, a_\alpha = p_\alpha\} = \{\cdots \{p_\alpha\} \times \cdots \times \cdots X_{\alpha_i} \times \cdots \times \{p_\alpha\} \cdots\}$. $X_p^{(\alpha_1)}$ je homeomorfný s X_{α_1} a teda súvislý. $p \in X_p^{(\alpha_1)} \Rightarrow X_p^{(\alpha_1)} \subseteq C_p \Rightarrow q \in C_p$.

2° Platí pre ľubovoľné p a $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že platí pre ľubovoľné p a $n+1$. Nech $\{\alpha \in I,\, q_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$. Nech $q' \in X$. $q'_{\alpha_1} = q_{\alpha_1}, \cdots, q'_{\alpha_n} = q_{\alpha_n}$, $q'_{\alpha_{n+1}} = p_{\alpha_{n+1}}$. $\{\alpha \in I,\, q'_\alpha \neq p_\alpha\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ a z indukčného predpokladu $q' \in C_p$. Teda $C'_q = C_p$. $q' \in X$. $\{\alpha \in I;\, q'_\alpha \neq q_\alpha\} = \{\alpha_{n+1}\}$. $X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \cong X_{\alpha_{n+1}}$ je súvislý $\Rightarrow X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \subseteq C_{q'}$, $q \in X_{q'}^{(\alpha_{n+1})} \Rightarrow q \in C_{q'} = C_p$. Teda pre $\forall q \in K : q \in C_p \Rightarrow K \subseteq C_p$. Platí $\bar{K} = X$, C_p je uzavretý $\Rightarrow X = \bar{K} \subseteq C_p$.

Príklad 7.11. $P_7 = ([0, \infty), \tau)$; $\mathcal{B}(a) = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty);\, \varepsilon > 0$; $\mathcal{B}(0) = \{[0, \varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \varepsilon > 0\}$. P_7 je súvislý, ale nie je lokálne súvislý. Totiž: $Y = (0, \infty)$ je podpriestor P_7, je totožný s podpriestorom v $\mathbb{R}$. Y je súvislý podpriestor. $P_7 = \bar{Y}$ je súvislý. V bode 0 neexistuje báza okolí, ktoré sú všetky súvislé. Nepriamo: Nech $\mathcal{B}'(0)$ je taká báza okolí. $O_1 = [0, 1) \setminus \{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$ okolie 0. Existuje $V \in \mathcal{B}'(0)$, $V \subseteq O_1$, $0 \in V$, $\exists \varepsilon > 0 : [0, \varepsilon) \setminus \{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$, $0 \in V : \exists a \in V$, $a > 0$. Potom $\exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < a$, $\frac{1}{k} \notin O_1 \Rightarrow \frac{1}{k} \notin V$. $[0, \frac{1}{k})$ je otvorená v P_7. $(\frac{1}{k}, \infty)$ je otvorená v P_7. $U_1 = [0, \frac{1}{k}) \cap V$ otvorená vo V; $U_2 = (\frac{1}{k}, \infty) \cap V$ je otvorená vo V. $U_1 \cup U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow V$ nie je súvislá, spor.

Lineárne súvislé priestory.

Definícia 7.4. Priestor X sa nazýva *lineárne súvislý*, ak pre každé $a, b \in X$ existuje spojité zobrazenie $f : [0, 1] \to X$ tak, že $f(0) = a$, $f(1) = b$. Podmnožina A priestoru X sa nazýva *lineárne súvislá*, ak podpriestor určený A je lineárne súvislý.

X je *lokálne lineárne súvislý*, ak $\forall a \in X$ existuje báza okolí a, ktoré sú všetky lineárne súvislé.

Príklad 7.12. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ je lineárne súvislý; je aj lokálne lineárne súvislý.

7.13. Každý interval v $\mathbb{R}$ je lineárne súvislá množina.

7.14. $\mathbb{R}^n$ je lineárne súvislý a aj lokálne lineárne súvislý.

7.15. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ nie je lineárne súvislý.

Veta 7.6. *Ak X je lineárne súvislý, tak X je súvislý.*

Dôkaz. Nech $a \in X$, C_a je komponenta súvislosti a. Nech $b \in X$. Potom existuje spojité zobrazenie $f : [0, 1] \to X$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. $B = f[0, 1]$ je súvislý podpriestor X, $a \in B \Rightarrow B \subseteq C_a$, $b \in B \Rightarrow b \in C_a$. Teda $X \subseteq C_a \Rightarrow X$ je súvislý.

Príklad 7.16. P_8 je podpriestor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $A = \{(x, \sin \frac{\pi}{x}),\, x \in (0, 1]\}$. $f : x \mapsto (x, \sin \frac{\pi}{x})$ je spojité zobrazenie. $A = f[[0, 1]]$ je súvislá. $(0, 0) \in \bar{A} \Rightarrow P_8 = \bar{A} \cup \{(0, 0)\}$ je súvislý. Zoberme si body $(0, 0)$ a

$(1,0) \in P_8$. Nech existuje spojité zobrazenie $g : [0,1] \to P_8$, $g(0) = (0,0)$, $g(1) = (1,0)$. Nech existuje $a \in (0,1) : (a, \sin\frac{\pi}{a}) \neq g(t)$ pre $\forall t \in [0,1]$. $g([0,1])$ je súvislá množina v P_8. Nech p je priamka $x = a$. $p \cap g([0,1]) = \emptyset$. Zoberme si $U = \{(x,y)\ ,\ x > a\}$ je otvorená v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $V = \{(x,y),\ x < a\}$ je otvorená v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $U' = U \cap g([0,1])$ je otvorená v $g([0,1])$. $V' = V \cap g([0,1])$ je otvorená v $g([0,1])$. $(0,0) \in U'$, $(1,0) \in V' \Rightarrow U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cup V' = g([0,1])$. Teda $g([0,1])$ nie je súvislý. Spor. Teda $g([0,1]) = P_8 \Rightarrow P_8$ je kompaktný $\Rightarrow P_8$ je uzavretý podpriestor v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. spor. P_8 nie je lineárne súvislý.

Veta 7.7. *Ak X je lineárne súvislý, $f : X \to Y$ je spojité a surjektívne zobrazenie, tak aj Y je lineárne súvislý.*

Dôkaz. Nech $c, d \in Y$. Potom $\exists a, b \in X$ tak, že $f(a) = c$, $f(b) = d$. X je lineárne súvislý, potom existuje spojité $g : [0,1] \to X$, $g(0) = a$, $g(1) = b$. $h = f \circ g : [0,1] \to Y$, $h(0) = f(g(0)) = c$, $h(1) = f(g(1)) = d$. Teda Y je lineárne súvislý.

Dôsledok. *Ak $f : X \to Y$ je spojité, A je lineárne súvislá podmnožina X, tak $f[A]$ je lineárne súvislá podmnožina Y.*

Veta 7.8. *Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém lineárne súvislých priestorov, tak $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ je lineárne súvislý.*

Dôkaz. Nech $I \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in I : X_\alpha \neq \emptyset$. (Inak triviálne platí.) Nech $a, b \in X$. $\forall \alpha \in I$, $p_\alpha(a), p_\alpha(b) \in X_\alpha$ a teda existuje spojité $f_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$; $f_\alpha(0) = p_\alpha(a)$, $f_\alpha(1) = p_\alpha(b)$. $p_\alpha \circ f = f_\alpha$, f je spojité. $f(0) = a$, $f(1) = b$. $p_\alpha(f(0)) = p_\alpha(a) = f_\alpha(0)$, $p_\alpha(f(1)) = p_\alpha(b) = f_\alpha(1)$. Teda X je lineárne súvislý.

Veta 7.9. *Nech X je priestor a $\sim$ je relácia na X definovaná nasledovne: Pre každé $x, y \in X : x \sim y \Rightarrow$ existuje spojité $f : [0,1] \to X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$. Potom $\sim$ je relácia ekvivalencie na X a všetky triedy ekvivalencie sú lineárne súvislé množiny. Ak A je lineárne súvislá podmnožina X, tak existuje $L \in X/\sim$ tak, že $A \subseteq L$.*

Dôkaz. $\forall x \in X$: $x \sim x$ je zrejmé. Nech $x \sim y$. Potom existuje spojité $f : [0,1] \to X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$. Potom $g : [0,1] \to X$, $\forall t \in [0,1] : g(t) = f(1-t)$ je spojité a $g(0) = f(1) = y$, $g(1) = f(0) = x$ a teda $y \sim x$. Tranzitívnosť: Nech $x \sim y$, $y \sim z$. Potom existujú spojité zobrazenia $f, g : [0,1] \to X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$, $g(0) = y$, $g(1) = z$. Definujme $h : [0,1] \to X$, $h(t) = \begin{cases} f(2t) \text{ pre } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) \text{ pre } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ je spojité. $h(0) = x$, $h(1) = z \Rightarrow x \sim z$.

$\forall A \in X/\sim$ je A lineárne súvislá: Nech $a, b \in A \Rightarrow a \sim b$ a existuje spojité $f : [0,1] \to X$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. Ukážeme, že $f([0,1]) \subseteq A$ tj. f je spojié zobrazenie z $[0,1]$ do A. Nech $c \in f([0,1])$. Potom $\exists r \in [0,1] : f(r) = c$. Nech $c \neq a, b \Rightarrow r \in (0,1)$. Nech $g : [0,1] \to [0,r]$, $g(t) = r \cdot t$, g je spojité $g(0) = 0$, $g(1) = r$. Potom $h : [0,1] \to X$, $h(t) = f(g(t))$ je spojité, $h(0) = f(g(0)) = f(0) = a$, $h(1) = f(g(1)) = f(r) = c \Rightarrow a \sim c \Rightarrow c \in A$. Teda $f([0,1]) \subseteq A$, a $f : [0,1] \to A$ je spojité, $f(0) = a$, $f(1) = b$, teda A je lineárne súvislý priestor. Nech B je lineárne súvislá podmnožina X, $B \neq \emptyset$, nech $a \in B$ potom $B \subseteq L(a) = \{c \in X; c \sim a\}$. Nech $b \in B \Rightarrow$ existuje spojité $f : [0,1] \to B$, $f(0) = a$, $f(1) = b$. B podpriestor $X \Rightarrow f : [0,1] \to X$ je spojité, potom $a \sim b$ v X potom $b \in L(a) \Rightarrow B \subseteq L(a)$. □

Definícia 7.4. Triedy ekvivalencie relácie $\sim$ z *vety 7.9* sa nazývajú *komponenty lineárnej súvislosti* priestoru X. tj. ak $a \in X$, tak $L(a) = \{b \in X, a \sim b\}$ je komponenta lineárnej súvislosti obsahujúca a.

$(b \in L(a) \Leftrightarrow L(a) = L(b)$, $b \notin L(a) \Leftrightarrow L(a) \cap L(b) = \emptyset)$; $a \in X \Rightarrow L(a) \subseteq C_a$.

VIII. KONVERGENCIA V TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROCH

Definícia 8.1. Nech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť v priestore X. Hovoríme, že $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguje* k $a \in X$, ak pre ľubovoľné okolie U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0 : a_n \in U$.

Príklady.

8.1. $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$ $\{n\} : 1, 2, 3, \cdots$ $\lim_{n\to\infty} n = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ je jediné okolie obsahujúce všetky prvky.

8.2. $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus V$ je spočítateľná $\} \cup \{\emptyset\}$. $a_n \to a$ v $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$. $\{a\}$ je okolie a, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n = a$. V $(\mathbb{R}, \tau)$: $a_n \to a$, $\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq a\} = K$; $U = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{a_n, n \in K\}}_{\text{spoč.}} \in \tau$, $a \in U$, U je okolie a, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \in U \Rightarrow n \notin K$; $\forall n \in K : n \leq n_0 \Rightarrow K$ je konečná$= \{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq a\}$. (skoro konštantná postupnosť)

Konvergencia pomocou filtrov.

Nech $a_n \to a$ v X, $\forall n \in \mathbb{N} : F_n = \{a_k,\ k \geq n\}$, $\emptyset \neq \mathcal{H} = \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ je báza filtra v X. $a_n \in F_n \neq \emptyset$, $n \leq m : F_n \cap F_m = F_m$. Pre každé okolie U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N} : A_{n_0} \subseteq U$. $a_n \to a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \supseteq \eta(a)$; $a_n \to a \Leftrightarrow \exists F_n \in \mathcal{H} : F_n \subseteq U$.

Definícia 8.2. c je *hromadný bod* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ak $\forall U \in \eta(c)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k > n : a_k \in U \Leftrightarrow \forall U{\in}\eta(c)\ \forall F_n{\in}\mathcal{H}$, $F_n \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall F_n \in \mathcal{H} : a \in \bar{F}_n \Leftrightarrow a \in \bigcap\limits_{F_n\in\mathcal{H}} \bar{F}_n$.

Definícia 8.3. Nech X je topologický priestor, $a \in X$, $\mathcal{H}$ je báza filtra na X, $\mathcal{F}$ je filter na X a $\eta(a)$ je systém všetkých okolí bodu a. Potom hovoríme, že:

(1) $\mathcal{F}$ *konverguje* k a v X, ak $\mathcal{F} \supseteq \eta(a)$.
(2) a je *hromadný bod filtra* $\mathcal{F}$, ak $a \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$.
(3) $\mathcal{H}$ *konverguje* k a, ak $\forall U \in \eta(a)\ \exists H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq U$. (tj. $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \supseteq \eta(a)$)
(4) a je *hromadný bod* $\mathcal{H}$, ak $a \in \bigcap\limits_{H\in\mathcal{H}} \bar{H}$.

Ozn. $\mathcal{F} \to a$, $a \in \lim \mathcal{F}$, $a =$ limita $\mathcal{F}$ ak $\mathcal{F} \to a$. $\mathcal{H} \to a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \to a$.

Veta 8.1.

(1) *Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra v priestore X, $\mathcal{H} \to a$, tak a je hromadný bod $\mathcal{H}$.*
(2) *Ak $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X; a je hromadný bod $\mathcal{U}$, tak $\mathcal{U} \to a$.*

Dôkaz.

(1) Nech $U \in \eta(a)$ a $F \in \mathcal{H}$. Existuje $F' \in \mathcal{H}$, $F' \subseteq U$. Existuje $F'' \in \mathcal{H}$ také, že $F'' \subseteq F' \cap F$. Potom $F'' \subseteq U$, $F'' \subseteq F \Rightarrow \emptyset \neq F'' \subseteq U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \forall F \in \mathcal{H}$, $a \in F \Rightarrow a \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{H}} \bar{F}$.
(2) Nech $U \in \eta(a)$, $a \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{U}} \bar{F} \Rightarrow \forall F \in \mathcal{U} : U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \supseteq \eta(a) \Rightarrow \mathcal{U} \to a$. $\square$

Poznámka. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $F_n = \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{H} = \{\{a\}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{F \subseteq \mathcal{P}(X);\ a \in F\}$.

Príklad.

8.3. Treba nájsť filter $\mathcal{G}$, ktorý konverguje k 0 v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou.
$\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \exists\varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq G\}$ je filter na $\mathbb{R}$. $\mathcal{G} \to 0$: $\mathcal{U} \in \eta(a)$, $\exists\varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U \Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq U$.

Veta 8.2.

(1) *Ak $\mathcal{F}_a$ je filter v priestore X taký, že $\mathcal{F}_a = \{F \in \mathcal{P}(X);\ a \in F\}$, tak $\mathcal{F}_a \to a$.*
(2) *Ak $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sú filtre v priestore X, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \to a$ v X, tak aj $\mathcal{G} \to a$.*
(3) *Ak a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$ v X, tak existuje filter $\mathcal{G}$ v X, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ a $\mathcal{G} \to a$.*

Dôkaz. $\mathcal{F} \to a \Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \eta(a)$; báza filtra $\mathcal{H} \to a \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \to a$. $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq F$, $\eta(a) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} \to a \Leftrightarrow \forall U \in \eta(a)\ \exists H \in \mathcal{H} : H \subseteq U$. a je hromadný bod filtra (bázy filtra) $\mathcal{F} \Leftrightarrow a \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$.

(1) $\eta(a) \subseteq \mathcal{F}_a \Rightarrow \mathcal{F}_a \to a$.
(2) $\mathcal{F} \to a$, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} \Rightarrow \eta(a) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \eta(a) \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \to a$.
(3) $a \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} \Leftrightarrow \forall U \in \eta(a), \forall F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{H} = \{U \cap F,\ U \in \eta(a),\ F \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{H}$ bude báza filtra X. $\emptyset \notin \mathcal{H}$. Ak $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, tak existujú $U_1, U_2 \in \eta(a)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tak, že $H_1 = U_1 \cap F_1$, $H_2 = U_2 \cap F_2$ a $H_1 \cap H_2 = U_1 \cap F_1 \cap U_2 \cap F_2 = \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in\eta(a)} \cap \underbrace{F_1 \cap F_2}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{H}$. $\eta(a) \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$;
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{G} := \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \to a \Rightarrow \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$.

$x_n \to a$ v x, ak $\forall U \in \eta(a), \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in U$.

Príklady.

8.4. $(\mathbb{R},\tau)$ $\tau=\{U\in\mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\setminus U$ je spočítateľná$\}\cup\{\emptyset\}$. $x_n\to a$ $\{k\in\mathbb{N},\ x_k\neq a\}$ je spočítateľná, potom $\{x_k,x_k\neq a\}$ je spočítateľná, potom $\mathbb{R}\setminus\{x_k,x_k\neq a\}=U$ je okolie a. $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$: $x_n{\in}U\Leftrightarrow x_n=a$.

8.5. $\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$, $x_n\to a$. Ako k tomu priradiť filter? $A_n=\{x_k,k\geq n\}$, $\mathcal{H}=\{A_n,n\in\mathbb{N}\}$ bude báza filtra. $x_n\to a\Leftrightarrow\forall U\in\eta(a)\ \exists A_{n_0}\in\mathcal{H}:A_{n_0}\subseteq U$; $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$; $x_n\to a\Leftrightarrow\eta(a)\subseteq\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

8.6. Podpostupnosti: $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathcal{H}'=\{A'_{n_k},\ k\in\mathbb{N}\}$. $A'_{n_k}=\{x_{n_k},\ l\geq k\}\subseteq A_{n_k}=\{x_p,\ p\geq n_k\}$. $A'_{n_k}\subseteq A_{n_k}\subseteq A_k\Rightarrow\mathcal{F}_{\mathcal{H}'}\supseteq\mathcal{H}\Rightarrow\mathcal{F}_{\mathcal{H}'}\supseteq\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

8.7. Konštantné postupnosti: $x_n=a$, $\forall n:A_n=\{a\}$.

Cvičenie. $A\subseteq X$ a $\mathcal{G}$ je báza filtra (filter) na A, tak $\mathcal{G}$ je báza filtra v X.

Veta 8.3. *Nech X je topologický priestor, $A\subseteq X$, $c\in X$. Potom platí $c\in\bar{A}\Leftrightarrow$ existuje báza filtra na A, ktorá konverguje k c v X. (tj. ako báza filtra na X.)*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $c\in\bar{A}$. Položme $\mathcal{H}=\{U\cap A,\ U\in\eta(c)\}$. $\mathcal{H}$ je báza filtra na A. $\mathcal{H}\to c$ v X ? Nech $U\in\eta(c)$. Potom $U\cap A\in\mathcal{H}$ a $U\cap A\subseteq U$. Teda $\mathcal{H}\to c$ v X.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{H}$ je báza filtra na A a $\mathcal{H}\to c$ v X. Nech $U\in\eta(c)$. Potom $\exists H\in\mathcal{H}:H\subseteq U$. Potom $\emptyset\neq H\subseteq U\cap A\Rightarrow U\cap A\neq\emptyset$. Teda $c\in\bar{A}$.

Veta 8.4. *Priestor X je T_2-priestor $\Leftrightarrow$ každý filter v X má najviac jednu limitu.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nepriamo. Nech existuje filter $\mathcal{F}$ na X taký, že $\mathcal{F}\to a$, $\mathcal{F}\to b$ a $a\neq b$. Potom existuje $U\in\eta(a)$, $V\in\eta(b)$ tak, že $U\cap V=\emptyset$. $\mathcal{F}\to a\Rightarrow U\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\to b\Rightarrow V\in\mathcal{F}\Rightarrow U,V\in\mathcal{F}\Rightarrow\emptyset=U\cap V\in\mathcal{F}$ spor.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nepriamo. Nech X nie je T_2-priestor. Potom $\exists a,b\in X$, $a\neq b$ také, že $\forall U\in\eta(a)$, $\forall U\in\eta(b)$ platí $U\cap V\neq\emptyset$. Nech $\mathcal{H}=\{U\cap V,\ U\in\eta(a),\ V\in\eta(b)\}$ je báza filtra. $\eta(a)\subseteq\mathcal{H}$, $\eta(b)\subseteq\mathcal{H}$ $\Rightarrow\eta(a)\cap\eta(b){\subseteq}\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\Rightarrow\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\to a,b$ spor.

Veta 8.5. *Nech $(X_\alpha,\alpha\in I)$ je systém topologických priestorov, $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ je topologický súčin $(X_\alpha,\alpha\in I)$ a $\mathcal{F}$ je báza filtra (filter) na X, $c\in X$. Potom $\mathcal{F}\to c$ v $X\Leftrightarrow\forall\alpha\in I:p_\alpha[\mathcal{F}]\to p_\alpha(c)$, kde $p_\alpha[\mathcal{F}]=\{p_\alpha[F],F\in\mathcal{F}\}$.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $\mathcal{F}\to c$ v X a $\alpha\in I$. Nech U je okolie $p_\alpha(c)$ v X_α. Potom $(p_\alpha)_{-1}(U)$ je okolie c v X. Potom $\exists F\in\mathcal{F}$ tak, že $F\subseteq(p_\alpha)_{-1}(U)$. Potom $p_\alpha[F]\subseteq U$. Teda $p_\alpha[\mathcal{F}]\to p_\alpha(c)$ v X_α.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\forall\alpha\in I:p_\alpha[\mathcal{F}]\to p_\alpha(c)$ v X_α. Nech W je okolie c v X. Potom $\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in I$ a otvorené množiny U_1 v X_{α_1}, …, U_k v X_{α_k} tak, že $c\in\bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)\subseteq W$. Potom $\forall i=1,\cdots,k$: $p_{\alpha_i}(c)\in U_i$ tj. U_i je okolie $p_{\alpha_i}(c)$. Potom $\forall i=1,\cdots,k$ $\exists F_i\in\mathcal{F}$ tak, že $p_{\alpha_i}(F_i)\subseteq U_i$. Potom $\forall i=1,\cdots,k:F_i\subseteq(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{k}F_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}(U_i)\subseteq W$. Existuje $F\in\mathcal{F}$ tak, že $F\subseteq\bigcap_{i=1}^{k}F_i$ a teda $F\subseteq W$. Teda $\mathcal{F}\to c$.

Príklad 8.8. id:$(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau_{dis})$. $x_n\to a$ v $(\mathbb{R},\tau)\Leftrightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0:x_n=a\Rightarrow\mathrm{id}(x_n)\to a$ v $(\mathbb{R},\tau_{dis})$. Zachováva konvergenciu, ale nie je spojitá.

Veta 8.6. *Nech X,Y sú topologické priestory, $f:X\to Y$ je zobrazenie. Potom f je spojité $\Leftrightarrow$ pre každé $a\in X$ a každú bázu filtra $\mathcal{G}$ v X takú, že $\mathcal{G}\to a$ platí $f[\mathcal{G}]\to f(a)$ v Y.*

Dôkaz.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech V je okolie $f(a)$ v Y. Potom $f_{-1}(V)$ je okolie bodu a v X. Potom $\exists H\in\mathcal{G}$ tak, že $H\subseteq f_{-1}(V)$. Potom $f(H)\subseteq V$, $f(H)\in f[\mathcal{G}]$. Teda $f[\mathcal{G}]\to f(a)$ v Y.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech f nie je spojité. Potom $\exists a\in X$ a okolie V bodu $f(a)$ v Y tak, že pre každé okolie $U\in\eta(a)$ platí $f[U]\nsubseteq V$. $\eta(a)$ je báza filtra v X. $\eta(a)\to a$. $f[\eta(a)]=\{f(U),\ U\in\eta(a)\}\nrightarrow f(a)$, lebo existuje okolie V bodu $f(a)$ také, že $\forall H\in f[\eta(a)]$, $H\nsubseteq V$. $\square$

Príklad.

8.9. $\mathcal{F}$ je ultrafilter $a \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$, $U \in \eta(a)$, $\forall F \in \mathcal{F}$, $U \cap F \neq \emptyset$. Potom $U \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \to a$.

8.10. $\mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\setminus F$ je konečná$\}$ je filter. $(a-1, a+1) \notin \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \nrightarrow a$. $a \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{F}$, $\mathbb{R}\setminus F$ je konečná. U je okolie a. $U \nsubseteq \mathbb{R}\setminus F \Leftrightarrow U \cap F \neq \emptyset$. $a \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$. a je limitou, ale nie je hromadným bodom.
$(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\setminus U$ je konečná$\} \cup \{\emptyset\}$. $\mathcal{F} \to a$ pre $\forall a \in \mathbb{R}$ v $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$.

IX. SIETE

Definícia 9.1. Usporiadaná dvojica $(A, \leq)$, kde $A \neq \emptyset$ je množina a $\leq$ je relácia na A, sa nazýva *usmernená množina*, ak platí:

(1) $\forall a \in A : a \leq a$.
(2) $\forall a, b, c \in A : a \leq b \ \wedge\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
(3) $\forall a, b \in A\ \exists c \in A : a \leq c \ \wedge\ b \leq c$.

Príklady.
9.1. $(\mathbb{N}, \leq)$ je usmernená množina.
9.2. $A = \{K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ K$ je konečná$\}$, $(A, \subseteq)$ usmernená množina. $K, L \in A \Rightarrow K \cup L \in A$, $K, L \subseteq K \cup L$.
9.3. X je topologický priestor $a \in X$, $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí a; $(\mathcal{B}(a), \leq)$, $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$, $(\mathcal{B}(a), \supseteq)$.
9.4. $(\mathbb{R}, \leq)$, kde $a \leq b \Leftrightarrow a = b$; nie je usmernená, lebo neplatí (3).

Definícia 9.2. Nech $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina, X je topologický priestor. Potom ľubovoľné zobrazenie $f : \Sigma \to X$ sa nazýva *sieť* v X.
Ozn. $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$.

Definícia 9.3. Nech X je topologický priestor, $c \in X$ a $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X. Hovoríme, že sieť $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ *konverguje* k c v X, ak pre každé okolie $U \in \eta(c)$ existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $\forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. Bod c sa nazýva *limita siete* S. Ozn. $\lim_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma = c$; $X_\sigma \to c$. Bod c sa nazýva *hromadný bod* siete S, ak pre každé $U \in \eta(c)$ a $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \in \Sigma$ tak, že $\sigma' \geq \sigma$ a $X_{\sigma'} \in U$.

Veta 9.1. *Nech X je priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom $c \in \bar{A} \Leftrightarrow$ existuje sieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v A taká, že $X_\sigma \to c$.*

Dôkaz.
$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $c \in \bar{A}$. $(\Sigma, \leq) = (\eta(c), \subseteq)$ je usmernená množina. $\eta(c) \mapsto A$, $X_U \in U \cap A (\neq \emptyset)$, $(X_U, U \in \eta(c))$ je sieť v A. Ukážeme, že $X_U \to c$. Nech V je ľubovoľné okolie bodu c (tj. $V \in \eta(c)$). $U_0 = V$, $\forall U \in \eta(c)$, $U_0 \supseteq U$, $X_U \in U \subseteq U_0 = V$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v A, $X_\sigma \to c$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma\ \forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. Potom $X_\sigma \in U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

Príklad 9.5. $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cup \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), 0 \in U$ a $\mathbb{R}\setminus U$ je spočítateľná$\}$. Je jasné, že $0 \in \overline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Nech $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je ľubovoľná postupnosť v $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. tj. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$. $U = \mathbb{R}\setminus\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je okolie 0. Neplatí, že $x_n \to 0$.

Definícia 9.4. Nech $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ a $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sú siete v X. Potom sieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sa nazýva *podsieť* siete (*zjemnenie*) $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, ak existuje zobrazenie $\phi : \Sigma' \to \Sigma$ tak, že platí:

(1) Pre každé $\sigma_0 \in \Sigma$ existuje $\sigma_0' \in \Sigma'$ tak, že pre všetky $\sigma' \in \Sigma'$: ak $\sigma' \geq \sigma_0'$, tak $\phi(\sigma') \geq \sigma_0$.
(2) Pre každé $\sigma' : X_{\phi(\sigma')} = Y_{\sigma'}$.

Veta 9.2. *Nech X je priestor, $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X a $c \in X$. Potom platí:*

(1) *Ak $X_\sigma \to c$, tak pre každú podsieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ platí $Y_{\sigma'} \to c$.*
(2) *Ak c je hromadný bod siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, tak existuje podsieť $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ siete $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ taká, že $Y_{\sigma'} \to c$.*

Dôkaz.

(1) Nech $X_\sigma \to c$ a $(Y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ je podsieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Teda $\exists \phi : \Sigma' \to \Sigma$ také, že $\forall \sigma_0 \in \Sigma$ $\exists \sigma_0' \in \Sigma'\ \forall \sigma > \sigma_0 : \phi(\sigma) \geq \sigma_0'$ a $Y_{\sigma'} = X_{\phi(\sigma')}$ pre $\forall \sigma' \in \Sigma'$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma$ tak,

že $\forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. $\exists \sigma_0' \in \Sigma'$ tak, že $\forall \sigma' \geq \sigma_0' : \phi(\sigma') \geq \sigma_0$. Nech $\sigma' \geq \sigma_0'$. Potom $\phi(\sigma') \geq \sigma_0$ a $Y_{\sigma'} = X_{\phi(\sigma')} \in U$, teda $Y_{\sigma'} \to c$.

(2) Nech c je hromadný bod $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Teda $\forall U \in \eta(c)\ \forall \sigma_0 \in \Sigma\ \exists \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U$. $\Sigma' = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \eta(c);\ X_\sigma \in U\} \neq \emptyset$. Definujme: $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2) \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2\ \wedge\ \sigma_1 \leq \sigma_2$. $(\Sigma', \leq)$ je usmernená množina. $(\sigma, U) \leq (\sigma, U) \Leftrightarrow U \supseteq U\ \wedge\ \sigma \leq \sigma$. $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2)$, $(\sigma_2, U_2) \leq (\sigma_3, U_3) \Rightarrow U_1 \supseteq U_2$, $U_2 \supseteq U_3$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$, $\sigma_2 \leq \sigma_3 \Rightarrow U_1 \supseteq U_3\ \wedge\ \sigma_1 \leq \sigma_3$. (σ_1, U_1), $(\sigma_2, U_2) \in \Sigma'$; $U = U_1 \cap U_2 \in \eta(c) : \exists \sigma_3 \geq \sigma_1$, $\sigma_3 \geq \sigma_2\ \exists \sigma_4 \geq \sigma_3 : X_{\sigma_4} \in U$. Potom $(\sigma_4, U) \in \Sigma'$, $\sigma_1 \leq \sigma_4$, $U_1 \supseteq U$ a $\sigma_2 \leq \sigma_4$, $U_2 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_4, U)$ a $(\sigma_2, U_2) \leq (\sigma_4, U)$. Nech $\sigma_0 \in \Sigma$. Existuje $\sigma \geq \sigma_0$, $X_\sigma \in U$. Potom $(\sigma, U) \in \Sigma'$. $U_1 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_1, U_1) \leq (\sigma, U)$; $U_2 \supseteq U \Rightarrow (\sigma_2, U_2) \leq (\sigma, U)$. $(\Sigma', \leq)$ je usmernená množina. $\phi : \Sigma' \to \Sigma$, $\phi(\sigma, U) = \sigma$. Nech $\sigma_0 \in \Sigma$. Potom existuje $\sigma_1 \in \Sigma$, $\sigma_1 \geq \sigma_0$ tak, že $X_{\sigma_1} \in U$. $\sigma_0' = (\sigma_1, U)$. Nech $(\sigma, V) \in \Sigma'$ a $(\sigma, V) \geq \sigma_0' = (\sigma_1, U)$. Potom $\phi(\sigma, V) = \sigma \geq \sigma_1 \geq \sigma_0$ tj. $\phi(\sigma, V) \geq \sigma_0$. $(Y_{(\sigma,V)}, (\sigma, V) \in \Sigma')$. $Y_{(\sigma,V)} = X_\sigma = X_{\phi(\sigma,V)}$ je to sieť v X tj. $\forall (\sigma, V) \in \Sigma'$ platí $Y_{(\sigma,V)} = X_{\phi(\sigma,V)}$. $(Y_{(\sigma,V)}, (\sigma, V) \in \Sigma')$ je podsieť $(X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$. Nech $U \in \eta(c)$. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $X_{\sigma_0} \in U$ tj. $(\sigma_0, U) \in \Sigma'$. Nech $\Sigma' \ni (\sigma, V) \geq (\sigma_0, U)$. Potom $X_\sigma \in V$, $\sigma \geq \sigma_0$, $V \subseteq U$. Potom $Y_{(\sigma,V)} = X_\sigma \in V \subseteq U$. Ukázali sme, že $Y_{(\sigma,V)} \to c$.

Veta 9.3. *Ak $S = (X_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v priestore X, tak $\mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{P}(X);\ \exists \sigma_0 \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F\}$ je filter v X a platí: Ak $c \in X$, tak $S \to c \Leftrightarrow \mathcal{F}_S \to c$.*

Dôkaz. $X \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$. $F, F' \in \mathcal{F}_S : \exists \sigma_0, \sigma_0' \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F$, $\{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0'\} \subseteq F'$. Keďže Σ je usmernená potom $\exists \sigma_1 \in \Sigma$ tak, že $\sigma_0, \sigma_0' \leq \sigma_1$. $\{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_1\} \subseteq F \cap F' \Rightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}_S$. Ak $F \in \mathcal{F}_S$, $U \subseteq X$, $F \subseteq U$. $\exists \sigma_0 \in \Sigma\ \forall \sigma \geq \sigma_0 : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq F \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_S$. $\mathcal{F}_S$ je filter.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $S \to c$. Nech U je ľubovoľné okolie c. Potom $\exists \sigma_0 \in \Sigma : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathcal{F}_S \to c$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Nech $\mathcal{F}_S \to c$. Nech U je ľubovoľné okolie c. Potom $U \in \mathcal{F}_S$. Potom $\exists \sigma_0 : \{X_\sigma, \sigma \geq \sigma_0\} \subseteq U \Rightarrow \exists \sigma_0 \in \Sigma\ \forall \sigma \geq \sigma_0 : X_\sigma \in U \Rightarrow S \to c$.

Veta 9.4. *Nech $\mathcal{F}$ je filter v priestore $X \neq \emptyset$, $\Sigma = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F};\ x \in \mathcal{F}\}$ a $(x, F) \leq (y, G) \Leftrightarrow F \supseteq G$. Potom $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina, $S_F = \{X_{(x,F)}, (x, F) \in \Sigma\}$, kde $X_{(x,F)} = x$ je sieť v X a platí: ak $c \in X$, tak $\mathcal{F} \to c \Leftrightarrow S_F \to c$.*

Dôkaz. $x \in X$, $(x, X) \in \Sigma \neq \emptyset$. $(x, F) \leq (x, F) \Leftrightarrow F \supseteq F$ platí reflexívnosť. $(x, F) \leq (y, G)$, $(y, G) \leq (z, H) \Rightarrow F \supseteq G$, $G \supseteq H \Rightarrow F \supseteq H \Rightarrow (x, F) \leq (z, H)$ tranzitívnosť. $(x, F), (y, G) \in \Sigma \Rightarrow F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$. z ľubovoľné v $F \cap G$, $(z, F \cap G) \in \Sigma$, $(x, F) \leq (z, F \cap G) \Leftrightarrow F \supseteq F \cap G$, $(y, G) \leq (z, F \cap G) \Leftrightarrow G \supseteq F \cap G$. Teda $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina.
$(x, F) \mapsto x$ je zobrazenie $\Sigma \to X$. tj. $S_F = \{X_{(x,F)}, (x, F) \in \Sigma\}$ je sieť v X.

$\boxed{\Rightarrow}$: Nech $\mathcal{F} \to c$. Nech U je ľubovoľné okolie c. Potom $U \in F$, $\sigma_0 = (c, U) \in \Sigma$. Pre každé $(x, F) \in \Sigma$ také, že $(x, F) \geq (c, U)$ platí $F \subseteq U$ a teda $X_{(x,F)} = x \in F \subseteq U$ tj. $X_{(x,F)} \in U$. Teda sme dokázali, že $S_F \to c$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že $S_F \to c$. Nech U je okolie c. Potom $\exists (x_0, F_0) \in \Sigma$ tak, že $\forall (x, F) \geq (x_0, F_0) :$ $X_{(x,F)} \in U$. Nech $x \in F_0$. Potom $(x, F) \geq (x_0, F_0)$. Potom $X_{(x,F_0)} = x \in U$. Teda $F_0 \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}$. Teda $\mathcal{F} \to c$.

Príklad 9.6.

Nech f je ohraničená funkcia na $[a,b]$. $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ je delenie. $d_i = [x_{i-1}, x_i]$. $(\xi_i) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\forall i : \xi_i \in d_i$. $\Sigma = \{(D, (\xi_i))$, D je delenie intervalu a $(\xi_i) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in d_i\}$. $(D, (\xi_i)) \leq (D', (\xi_i')) \Leftrightarrow \gamma(D') \leq \gamma(D)$. ($\gamma(D)$ je norma delenia D). $(D, (\xi_i)) \mapsto S_f(D, (\xi_i)) =$
$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$. $S_f(D, (\xi_i)) \to a$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists (D_0, (\xi_i^0)) \in \Sigma : (D, (\xi_i)) \geq (D_0, (\xi_i^0))$. $\delta = \gamma(D_0) > 0$.

X. METRIZOVATEĽNÉ PRIESTORY, METRIZÁCIA TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROV

Definícia 10.1. Nech X je množina. Zobrazenie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sa nazýva *pseudometrika*, ak platí:

(1) $\forall x, y \in X : d(x,y) \geq 0$.
(2) $\forall x \in X : d(x,x) = 0$.
(3) $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$.
(4) $\forall x, y, z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Ak naviac platí:
(5) $\forall x, y \in X$: ak $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, potom d sa nazýva *metrika* na X.

Príklady.

10.1. $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ je metrika na $\mathbb{R}$.
10.2. $\mathbb{R}$, $d_1(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ ak } x = y \\ 1 \text{ inak} \end{cases}$ je metrika na $\mathbb{R}$.
10.3. $\mathbb{R}$, $d_2(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$ je metrika na $\mathbb{R}$.
10.4. $\mathbb{R}$, $\rho(x,y) = 0$ pre $\forall x, y \in \mathbb{R}$ potom ρ je pseudometrika a nie je metrika.

Poznámka. Nech d je (pseudo-) metrika na X. Potom $\tau_d = \{U \in \mathcal{P}(X); \forall a \in U\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in X, d(a,x) < \varepsilon\} \subseteq U\}$ je topológia na X.

Príklady.

10.5. X, $d(x,y) = 0$ pre $\forall x, y \in X$. $\tau_d = \{\emptyset, X\}$ indiskrétna topológia.
10.6. X, $d_1(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$, $a \in X$, $0 < \varepsilon < 1$: $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{a\}$, $\tau_{d_1} = \mathcal{P}(X)$ diskrétna topológia.

Definícia 10.2. Priestor (X, τ) sa nazýva *metrizovateľný*, ak existuje metrika d na X tak, že $\tau_d = \tau$.

Príklady.

10.7. $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau-$ obvyklá topológia; $d(x,y) = |x-y| \Rightarrow \tau = \tau_d$; $d_1(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$. $\tau_{d_1} = \tau_d = \tau$. $\mathcal{B}^d(a) = \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon); 0 < \varepsilon < 1\}$; $\mathcal{B}^{d_1}(a) = \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon); 0 < \varepsilon < 1\}$. $\mathcal{O}_2^{d_1}(a) = \mathbb{R}$.

10.8. Priestor, ktorý nie je metrizovateľný: $(\mathbb{R}, \tau_\to)$, $\tau_\to = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Nie je metrizovateľný, lebo $d(x,y) = r$, zoberme si $\mathcal{O}_{r/2}(x) \cap \mathcal{O}_{r/2}(y) = \emptyset$. To znamená, že každý metrizovateľný priestor je T_2-priestor.

Veta 10.1. *Ak (X, τ) je metrizovateľný, tak každý podpriestor priestoru (X, τ) je metrizovateľný.*

Dôkaz. $Y \subseteq X$; (Y, τ_Y) podpriestor (X, τ). $\tau_Y = \{U \cap Y,\ U \in \tau\}$. Existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $\tau_d = \tau$. $d' = d \restriction_{Y \times Y}$: $Y \times Y \to \mathbb{R} \Rightarrow d'$ je metrika. $U \in \tau_{d'} \Leftrightarrow \forall c \in U\ \exists \varepsilon > 0\ \mathcal{O}_\varepsilon^{d'}(c) \subseteq U \Leftrightarrow \forall c \in U\ \exists \varepsilon > 0\ \mathcal{O}_\varepsilon^{d}(c) \cap Y \subseteq U \Leftrightarrow U \in \tau_Y$.

Lema 10.1. *Ak (X, τ) je metrizovateľný priestor, tak existuje metrika d_1 na X ohraničená* 1, *(tj. $\forall x, y \in X : d_1(x,y) \leq 1$) tak, že $\tau_d = \tau$.*

Dôkaz. (X, τ) je metrizovateľný, potom existuje metrika d na X tak, že $\tau_d = \tau$. Nech $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ je definovaná $d_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$. Potom d_1 je metrika na X a $\tau_{d_1} = \tau_d = \tau$, $d_2(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

Veta 10.2.

(1) *Ak $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém metrizovateľných priestorov a pre $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta : X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, tak aj priestor $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in I} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ je metrizovateľný.*
(2) *Ak $((X_n, \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ je systém metrizovateľných priestorov, tak aj $(X, \tau) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$ je metrizovateľný.*

Dôkaz.

(1) $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ nech d_α je metrika na X_α okrem 1 taká, že $\tau_{d_\alpha} = \tau_\alpha$. Definujme $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$d(x,y) = \begin{cases} d_\alpha(x,y) \text{ ak existuje } \alpha \in I \text{ tak, že } x, y \in X_\alpha \\ 1 \quad \text{ak } x \in X_\alpha, y \in X_\beta \text{ a } \alpha \neq \beta \end{cases}$ d je metrikou na X a $\tau_d = \tau$.

(2) $(X,\tau) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$. Pre $\forall n \in \mathbb{N}$ nech d_n je metrika na X_n okrem 1 taká, že $\tau_{d_n} = \tau_n$.

$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$. Definujme $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot d_n(p_n(x), p_n(y))$.

$0 \leq \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq \frac{1}{2^n}$. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$. $\forall x,y,z \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$d_n(p_n(x), p_n(z)) \leq d_n(p_n(x), p_n(y)) + d_n(p_n(y), p_n(z)) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(z)) \leq$

$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \left(d_n(p_n(x), p_n(y)) + d_n(p_n(y), p_n(z)) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) +$

$+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(y), p_n(z)) = d(x,y) + d(y,z)$.

$p_n : (X, \tau_d) \to (X_n, \tau_n) = (X_n, \tau_{d_n})$ je spojité. Nech $x \in X$, $\varepsilon > 0$. $\forall y \in X$ pre ktoré $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ platí: $\frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq d(x,y) \Rightarrow d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq 2^n d(x,y) < \varepsilon$. p_n je spojité pre $\forall n$, preto $id : (X, \tau_{d_n}) \to \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n) = (X, \tau)$ je spojité. $p_n \circ id = p_n$ je spojité pre $\forall n \in \mathbb{N}$. Platí $\tau \subseteq \tau_d$. Nech $U \in \tau_d$, $x \in U$. $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}^d_\varepsilon(x) \subseteq U$.

$y \in \mathcal{O}^d_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x,y) = \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) + \cdots + \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y))$.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 \Rightarrow$ pre $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists k \in \mathbb{N} : \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\mathcal{O}^{d_k}_{\varepsilon/2}(p_k(x))$ je okolie $p_k(x)$ v (X_k, τ_k). Množina $W = \mathcal{O}^{d_1}_{\varepsilon/2}(p_1(x)) \times \cdots \times \mathcal{O}^{d_k}_{\varepsilon/2}(p_k(x)) \times X_{k+1} \times \cdots =$ $= (p_1)_{-1}\left(\mathcal{O}^{d_1}_{\varepsilon/2}(p_1(x))\right) \cap \cdots \cap (p_k)_{-1}\left(\mathcal{O}^{d_k}_{\varepsilon/2}(p_k(x))\right)$ je prvkom štandardnej bázy τ a teda $W \in \tau$, $x \in W$. Nech $y \in W$. Potom $d_1(p_1(x), p_1(y)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, d_k(p_k(x), p_k(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) +$ $+ \cdots + \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $d(x,y) = \frac{1}{2} d_1(p_1(x), p_1(y)) + \cdots +$ $+ \frac{1}{2^k} d_k(p_k(x), p_k(y)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(p_n(x), p_n(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Teda $y \in \mathcal{O}^d_\varepsilon(x) \subseteq U$. Teda $W \subseteq U$, $U \in \tau$ tj. $\tau_d = \tau$.

Dôsledok.

$[0,1]^{\mathbb{N}}$ *je metrizovateľný priestor. napr.* $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$, *kde* $x_n = p_n(x)$, $y_n = p_n(y)$.

Veta 10.3. Urysohnova metrizačná

Ak X je regulárny T_1-priestor (=T_3-priestor) so spočítateľnou bázou, tak X je metrizovateľný.

Dôkaz. X je T_3-priestor so spočítateľnou bázou, potom X je T_4-priestor, a teda normálny. Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza topológie na X. Položme $\mathcal{C} = \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B};\ \bar{U} \subseteq V\}$. Je to spočitateľný systém a teda $[0,1]^{\mathcal{C}}$ je metrizovateľný. Ukážeme, že X je homeomorfný s podpriestorom priestoru $[0,1]^{\mathcal{C}}$. Nech $(U,V) \in \mathcal{C}$, potom $\bar{U} \subseteq V$ a potom $\bar{U} \cap (X \setminus V) = \emptyset$ a $\bar{U}$, $X \setminus V$ sú uzavreté. X je normálny, potom (*z Urysohnovej lemy*) existuje spojité zobrazenie $f_{(U,V)} : X \to [0,1]$; $f[\bar{U}] \subseteq \{0\}$, $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Potom existuje spojité $f : X \to [0,1]^{\mathcal{C}}$ také, že $\forall (U,V) \in \mathcal{C}$ platí: $p_{(U,V)} \circ f = f_{(U,V)}$.

f je prosté: Nech $x, y \in X$, $x \neq y$. $x \in X \setminus \{y\}$ je otvorená. Existuje $V \in \mathcal{B} : x \in V \subseteq X \setminus \{y\}$. $\mathcal{B}_x = \{W \in \mathcal{B},\ x \in W\}$ je báza okolí v x. X je regulárny. $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}_x : \bar{U} \subseteq V$. Potom $x \in U$, $U \in \mathcal{B}$. $(U,V) \in \mathcal{C}$. $f_{(U,V)} : X \to [0,1]$; $f_{(U,V)}(x) = 0$. $x \in \bar{U}$, $f_{(U,V)}(y) = 1$. $f_{(U,V)}(x) = p_{(U,V)}(f(x)) \neq$

$\neq p_{(U,V)}(f(y)) = f_{(U,V)}(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. $f : X \to f[X]$ podpriestor $[0,1]^{\mathcal{C}}$. Treba ešte ukázať, že ak A je uzavretá v X, tak $f[A]$ je uzavretá v $f[X]$. Nech $b \in f[X] \setminus f[A]$. Potom existuje $a \in X : f(a) = b$, pričom $a \notin A$. $a \in X \setminus A$ je otvorená v X, potom $\exists V_1 \in \mathcal{B}$, $a_1 \in V_1 \subseteq X \setminus A$. X je regulárny potom $\exists U_1 \in \mathcal{B}$, $u \in U_1$, $\bar{U}_1 \subseteq V_1$. $f_{(U_1,V_1)} : X \to [0,1]$, $f_{(U_1,V_1)}(a) = 0$, $f_{(U_1,V_1)}[A] \subseteq \{1\}$, lebo $A \subseteq X \setminus V_1$. $W = (p_{(U_1,V_1)})_{-1}([0, \frac{1}{2}])$ je otvorená v $[0,1]^{\mathcal{C}}$, $p_{(U_1,V_1)}(b) = p_{(U_1,V_1)}(f(a)) = f_{(U_1,V_1)}(a) = 0$. Teda $b \in W$. Ak $y \in f[A]$, tak $y = f(x)$, $x \in A$. Potom $p_{(U_1,V_1)}(y) = p_{(U_1,V_1)}(f(x)) = f_{(U_1,V_1)}(x) = 1$. Teda $f[A] \cap W = \emptyset$. Nech $W' = W \cap f[X]$. Potom W' je otvorená v $f[X]$, $b \in W'$, $W' \cap f[A] = \emptyset$. Teda $f[A]$ je uzavretá v $f[X]$ a teda $f : X \to f[X]$ je homeomorfizmus. $f[X]$ je metrizovateľný, potom X je metrizovateľný.

Veta 10.4. *Ak (X,d) je metrický priestor, tak $d : (X,\tau_d) \times (X,\tau_d) \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.*

Dôkaz. (x,y), $(x',y') \in X \times X$. $d(x,y), d(x',y')$. $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y) \leq d(x,x') + d(y',y) +$ $+ d(x',y') \Rightarrow d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y')$. Podobne $d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y',y)$. Z toho: $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$. Nech $\varepsilon > 0$. Zoberme $\mathcal{O}^d_{\varepsilon/2}(x) \times \mathcal{O}^d_{\varepsilon/2}(y)$ okolie (x,y) v $(X,\tau_d) \times (X,\tau_d)$. $\forall (x',y') \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x) \times \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(y)$. $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Veta 10.5. *Ak (X,ρ) je pseudometrický priestor, tak $d : (X,\tau_\rho) \times (X,\tau_\rho) \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.*

Vzdialenosti. (X,d) je metrický priestor; $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$, $c \in X$: $d(c,A) := \inf\{d(c,a),\, a \in A\}$. $A, B \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $d(A,B) = \inf\{d(a,b),\, a \in A\ ,\, b \in B\}$.

Veta 10.6. *Ak (X,τ) je topologický priestor, d je metrika na X taká, že $d : (X,\tau) \times (X,\tau) \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie a A je ľubovoľná neprázdna podmnožina v X, tak zobrazenie $f_A : (X,\tau) \to \mathbb{R}$, $f_A(x) = d(x,A)$ je spojité. (Špeciálne $f_A : (X,\tau_d) \to \mathbb{R}$ je spojité.)*

Dôkaz. Nech $x, y \in X$. Ukážeme, že $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x,y)$, $f_A(x) = d(x,A)$, $f_A(y) = d(y,A)$. $\forall a \in A$: $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$, $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. $\forall a \in A : d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a) \Rightarrow$ $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$; $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. Podobne: $d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y) \Rightarrow$ $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. Nech $\varepsilon > 0$, $(x,x) \in (X,\tau) \times (X,\tau)$, d je spojité, existuje okolie $U \times V$ bodu (x,x) tak, že $\forall (y,y') \in U \times V$ a $|d(x,x') - d(y,y')| < \varepsilon$. U, V sú otvorené v (X,τ). U je okolie x. Nech $y \in U$. Potom $(y,x) \in U \times V$. Potom $|d(x,x) - d(y,x)| = d(x,y) < \varepsilon$. Teda existuje U okolie X také, že $\forall y \in U : |f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x,y) < \varepsilon$. f_A je spojité.

Definícia 10.3. Nech X je topologický priestor.

(1) Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *lokálne konečný (diskrétny)* v X, ak pre každý $a \in X$ existuje okolie $U_a \in \eta(a)$ tak, že $\{V \in \mathcal{S},\, V \cap U_a\}$ je konečná. (má najviac jeden prvok).
(2) Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *σ-lokálne konečný (diskrétny)*, ak $\mathcal{S}$ je zjednotením spočítateľného systému lokálne konečných (resp. diskrétnych) systémov v X.
(3) Nech $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sú pokrytia X. Hovoríme, že $\mathcal{U}$ je *zjemnenie* $\mathcal{V}$ (píšeme $\mathcal{U} < \mathcal{V}$), ak $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{V}$: $U \subseteq V$.

Príklady.

10.9. Každý konečný systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je lokálne konečný.

10.10. $\mathcal{S} = \{(n, n+1),\, n \in \mathbb{N}\}$ lokálne konečný systém v $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou; nie je diskrétny.

10.11. Ak $\mathcal{S}$ je diskrétny systém v X, tak $\forall U, V \in \mathcal{S} : U \cap V = \emptyset$.

10.12. Ak $\mathcal{S}$ je systém množín v metrickom priestore (X,d) a $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\forall U, V \in \mathcal{S} : d(U,V) \geq r$, tak $\mathcal{S}$ je diskrétny v (X,τ_d).

10.13. X, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{S}' = \{X\} \Rightarrow \mathcal{S} < \mathcal{S}'$ a aj $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$.

Veta 10.7. *Nech (X,τ) je metrický priestor. Potom pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru (X,τ) existuje σ-diskrétne otvorené pokrytie $\mathcal{S}$ priestoru (X,τ) také, že $\mathcal{S} < \mathcal{U}$.*

Dôkaz. Nech $\forall U \in \mathcal{U}$: $U \neq \emptyset$. Vyberme $U \in \mathcal{U}$. Nech $\leq$ je dobré usporiadanie $\mathcal{U}$ tj. $(\mathcal{U}, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. $U_n = \{x \in U;\, d(x, X \setminus U) \geq \dfrac{1}{2^n}\}$. $U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq \cdots$. Platí $d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Nech $a \in U_n$, $b \in X \setminus U_{n+1}$. Potom $d(b, X \setminus U) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Potom $\exists c \in X \setminus U : d(b,c) < \dfrac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$ $d(a,c) \geq \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow -d(b,c) > \dfrac{-1}{2^{n+1}}$. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \Rightarrow d(a,b) \geq d(a,c) - d(b,c) \geq \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

$U_n^* = U_n \setminus \bigcup_{V<U} V_{n+1}$, $U_n^* \subseteq U_n$. Nech $U, V \in \mathcal{U}$, $V < U$. $V_n^* \subseteq V_n$, $U_n^* \cap V_{n+1} = \emptyset \Rightarrow U_n^* \subseteq X \setminus V_{n+1}$, $d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$; $d(U_n^*, V_n^*) \geq d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. $\tilde{U}_n = \{x \in X;\ d(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$ je otvorená. ($f_{U_n^*} : (X, \tau_d) \to \mathbb{R}$ je spojité a $\tilde{U}_n = (f_{U_n^*})_{-1}(-\infty, \frac{1}{2^{n+3}})$). $\forall U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$: $U < V$ alebo $V < U \Rightarrow d(U_n^*, V_n^*) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$. $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{S}_n = \{\tilde{U}_n, U \in \mathcal{U}\}$ je diskrétny systém otvorených množín. Nech $S \in \mathcal{S}$. Potom $\exists U \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N} : S = \tilde{U}_n \subseteq U \Rightarrow \mathcal{S} < U$. Nech $a \in X$. Existuje najmenší prvok $U \in (\mathcal{U}, \leq)$ tak, že $a \in U$. $X \setminus U$ je uzavretá, $\exists \delta > 0 : \mathcal{O}_\delta(a) \cap X \setminus U = \emptyset$. $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < \delta$. Platí: $d(a, X \setminus U) \geq \delta > \frac{1}{2^n} \Rightarrow a \in U_n$ tj. $\exists n \in \mathbb{N} : a \in U_n$. $\forall V < U$, $a \notin V \Rightarrow a \notin V_{n+1}$. ($V_{n+1} \subseteq V$). Teda $a \in U_n^* = U_n \setminus \bigcup_{V<U} V_{n+1}$. $\forall U \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$ U_n je otvorená. $a \in U_n^* \subseteq \tilde{U}_n \in \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ je pokrytie (X, τ).

Veta 10.8. *Každý metrizovateľný priestor má bázu $\mathcal{B}$, ktorá je σ-diskrétna.*

Dôkaz. $\mathcal{U}_n = \{\mathcal{O}_{1/n}(x),\ x \in X\}$ je otvorené pokrytie (X, τ_d). Predpokladali sme, že existuje metrika d na X tak, že $\tau_d = \tau$. Potom existuje σ-diskrétne otvorené pokrytie $\mathcal{B}_n$ priestoru (X, τ_d) také, že $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$, $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Ak $\mathcal{B}_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_{n,k} \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_{n,k}$. $\mathcal{B}$ je σ-diskrétny. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ je báza τ. $\mathcal{B} \subseteq \tau$. $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{O}_{1/n}(c) \subseteq U$. $\mathcal{B}_n$ je pokrytie $(X, \tau) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_n : c \in V$. $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$ tj. $\exists \mathcal{O}_{1/n}(y) \in \mathcal{U}_n$ tak, že $V \subseteq \mathcal{O}_{1/n}(y)$. $c \in V \Rightarrow c \in \mathcal{O}_{1/n}(y)$. Nech $z \in \mathcal{O}_{1/n}(y)$. Potom $d(c, z) \leq d(c, y) + d(y, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow z \in \mathcal{O}_{1/n}(c)$; $V \subseteq \mathcal{O}_{1/n}(y) \subseteq \mathcal{O}_{2/n}(c) \subseteq U$. Teda $\exists V \in \mathcal{B} : c \in V \subseteq U$. $\mathcal{B}$ je báza v (X, τ).

Veta 10.9. *Nech X je regulárny T_1-priestor (tj. T_3-priestor). Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(1) *X je metrizovateľný.*
(2) *X má σ-diskrétnu bázu.*
(3) *X má σ-lokálne konečnú bázu.*

Dôkaz.
(1) $\Rightarrow$ (2) sme dokázali. (2) $\Rightarrow$ (3) je triviálna. (3) $\Rightarrow$ (1) je náročná.

Veta 10.10. *Každý kompaktný metrizovateľný priestor má spočítateľnú bázu (a teda je homeomorfný s uzavretým podpriestorom $[0,1]^{\mathbb{N}}$).*

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}$ je σ-diskrétna báza v X. $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$; $\mathcal{B}_n$ je diskrétny systém. $\forall x \in X\ \exists U(x) \in \eta(x)$: $\{V \in \mathcal{B}_n, V \cap U(x) \neq \emptyset\}$ má najviac jeden prvok. $\{U(x), x \in X\}$ je otvorené pokrytie $X \Rightarrow \exists x_1, \cdots, x_k \in X$ tak, že $U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_k) = X$. $\emptyset \neq V \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \exists! V \cap U(x_j) \neq \emptyset$. $\mathcal{B}_n \to \{1, \cdots, j\}$, $V \mapsto j$, $V \cap U(x_j) \neq \emptyset$ je prosté zobrazenie. Teda $\mathcal{B}_n$ je konečná, potom aj $\mathcal{B}$ je spočítateľná.

XI. CVIČENIA

1. Základné pojmy.

Cvičenie 1.1.
Nech X je množina a $\mathcal{V}$ je systém podmnožín množiny X spĺňajúci nasledujúce podmienky:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{V}$.
(2) *Ak* $A, B \in \mathcal{V}$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{V}$.
(3) *Ak* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$, *tak* $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{V}$.

Dokážte, že $\tau_{\mathcal{V}} = \{X \setminus A, A \in \mathcal{V}\}$ *je topológia na* X *a taká, že* $\mathcal{V}$ *je systém všetkých uzavretých množín v* $(X, \tau_{\mathcal{V}})$.

Cvičenie 1.2.
Nech $\mathcal{S}$ je neprázdny systém topológií na množine X. Dokážte, že $\tau_{\mathcal{S}} := \bigcap\limits_{\tau \in \mathcal{S}} \tau$ *je topológia na* X.

Cvičenie 1.3. *Nájdite všetky topológie na* $\{0, 1\}$ *resp. na* $\{0, 1, 2\}$.

2. Metrika.

Cvičenie 2.1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. *Dokážte, že* $\tau_d = \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Cvičenie 2.2. *Nech d je metrika na X. Dokážte, že* $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}^2$, $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ *aj* $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}^2$, $d_2(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ *sú metriky na* X *a* $\tau_d = \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Cvičenie 2.3.
Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel, $a, b \in \mathbb{N}$. Označme $\mathbb{N}_{a,b} = \{a + n \cdot b, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. *Dokážte, že:*

(1) *Systém* $\mathcal{B} = \{\mathbb{N}_{a,b}; a, b \in \mathbb{N}\}$ *je báza topológie na* $\mathbb{N}$.
(2) *V topológii* $\tau_{\mathcal{B}}$ *určenej bázou* $\mathcal{B}$ *sú množiny* $\mathbb{N}_{a,b}$ *súčasne otvorené aj uzavreté.*
(3) *S využitím poznatku, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *existuje prvočíslo* p *také, že* p *delí* n *a s použitím topológie* $\tau_{\mathcal{B}}$ *dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.*

Cvičenie 2.4. *Nech* $\mathcal{B}_1$ *je báza topológie* τ_1 *a* $\mathcal{B}_2$ *je báza topológie* τ_2 *na* X. *Nech pre každé* $V \in \mathcal{B}_1$ *a* $a \in V$ *existuje* $W \in \mathcal{B}_2$ *tak, že* $x \in W \subseteq V$. *Dokážte, že* $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Cvičenie 2.5. *Definujte pojem bázy (subbázy) pre systém všetkých uzavretých množín v topologickom priestore. Sformulujte analogické tvrdenia k tvrdeniam o báze (subbáze) topológie.*

Cvičenie 2.6. *Dokážte, že v ľubovoľnom topologickom priestore platí* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. *Uveďte príklad topologického priestoru a jeho podmnožín* A, B *tak, aby platilo* $\overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Cvičenie 2.7. *Nech X je topologický priestor,* $A \subseteq X$, *Int* $A = \bigcup\{U \in \mathcal{P}(X),\ U$ *je otv.,* $U \subseteq A\}$. *Dokážte:*

(1) *Int* $A \subseteq A$ *pre* $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.
(2) *Int* $X = X$.
(3) *Int* $(A \cap B) =$ *Int* $A \cap$ *Int* B.
(4) *Int* $($*Int* $A) =$ *Int* A.
(5) A *je ohraničená v* X *práve vtedy, keď Int* $A = A$.

Cvičenie 2.8. *Nech* (X, τ) *je topologický priestor,* $A \subseteq X$. *Bod* $c \in X$ *sa nazýva hraničný bod množiny* A *v* (X, τ), *ak pre každé okolie* U *bodu* c: $U \cap A \neq \emptyset$ *aj* $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. $b(A)$ *označuje množinu všetkých hraničných bodov množiny* A.

(1) *Určte* $b(\mathbb{Q})$, $b(\mathbb{N})$, $b((0, 1))$, $b([0, 1])$ *v* $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $(\mathbb{R}, \tau_{\to})$, $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$.
(2) *Dokážte, že* $b(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
(3) *Dokážte, že* $\bar{A} = A \cup b(A)$.

Cvičenie 2.9. *Nech* (X, τ) *je topologický priestor,* $A \subseteq B \subseteq X$*. Dokážte, že* $(A, \tau|_A)$ *je podpriestor* $(B, \tau|_B)$ *a* $A, (\tau|_B)_A)$ *je podpriestor* (X, τ)*.*

Cvičenie 2.10. *Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre podmnožinu* A *priestoru* (X, τ) *tak, aby platilo:*

(1) $M \subseteq A$ *je otvorená v* $(A, \tau|_A) \Leftrightarrow M$ *je otvorená v* (X, τ)*.*
(2) $M \subseteq A$ *je uzavretá v* $(X, \tau|_A) \Leftrightarrow M$ *je uzavretá v* (X, τ)*.*

3. Zobrazenia.

Cvičenie 3.1. *Nech* X, Y *sú topologické priestory,* $f : X \to Y$ *je zobrazenie,* $a \in X$*,* $\mathcal{B}(a)$ *je báza okolí* a *v* X*,* $\mathcal{B}(f(a))$ *je báza okolí* $f(a)$ *v* Y*. Dokážte, že nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(1) f *je spojité v* a*.*
(2) *Pre každé* $V \in \mathcal{B}(f(a))$ *existuje* $U \in \mathcal{B}(a)$ *tak, že* $f[U] \subseteq V$*.*
(3) *Pre každú podmnožinu* $A \subseteq X$ *ak* $a \in \bar{A}$*, tak* $f(a) \in \overline{f[A]}$*.*

Cvičenie 3.2. *Dokážte, že ak* $f : X \to Y$*,* $g : Y \to Z$ *sú sekvenciálne spojité zobrazenia, tak zobrazenie* $g \circ f : X \to Z$ *je sekvenciálne spojité.*

Cvičenie 3.3. *Dokážte, že ak* $f : X \to Y$ *je spojité v bode* a *a* $g : Y \to Z$ *je spojité v bode* $f(a)$*, tak* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité v* a*.*

Cvičenie 3.4. *Nech* τ, τ' *sú topológie na* X*. Dokážte, že* $id_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$ *je spojité zobrazenie práve vtedy, keď* $\tau \supseteq \tau'$*.*

Cvičenie 3.5. *Overte, že priestory* $(\mathbb{R}, \tau_d)$ *a* $(\mathbb{R}, \tau_z)$ *nie sú homeomorfné.*

Cvičenie 3.6. *Nech* $X = \{a, b, c, d\}$*,* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$*. Nájdite všetky homeomorfizmy* $(X, \tau) \to (X, \tau)$*.*

Cvičenie 3.7. *Overte, že platí:*

(1) $\sin : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *je uzavreté a nie je otvorené.*
(2) $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *je otvorené, ale nie je uzavreté.*

Cvičenie 3.8.
Nech $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *je podpriestor* $\mathbb{R}^2$ *s obvyklou topológiou a* $[-1, 1] \times [-1, 1]$ *je tiež podpriestor* $\mathbb{R}^2$ *s obvyklou topológiou. Ukážte, že* D_2 *je homeomorfný s* $[-1, 1] \times [-1, 1]$*.*

Cvičenie 3.9. *Dokážte, že ak* $f : X \to Y$ *a* $g : Y \to Z$ *sú vnorenia, tak* $g \circ f : X \to Z$ *je vnorenie.*

Cvičenie 3.10. *Nech* $f : X \to Y$ *je faktorové zobrazenie,* A *je podpriestor* X*,* $f[A]$ *je podpriestor* Y*. Ukážte na príklade, že* $f|_A : A \to f[A]$ *nemusí byť faktorové zobrazenie.*

Cvičenie 3.11. *Nech* $f : X \to Y$ *je faktorové zobrazenie,* $B \subseteq Y$*. Dokážte, že ak* B *je uzavreté alebo otvorené v* Y*, tak zobrazenie* $f\restriction_{f_{-1}(B)} : f_{-1}(B) \to B$ *je faktorové zobrazenie.*

Cvičenie 3.12. *Dokážte, že zobrazenia* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $(a, b) \mapsto a + b$*,* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $(a, b) \mapsto a \cdot b$*,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $f(a_1, \cdots, a_n) = \max\{a_1, \cdots, a_n\}$*,* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $g(a_1, \cdots, a_n) = \min\{a_1, \cdots, a_n\}$ *sú spojité.*

Cvičenie 3.13. *Nech* (X, d_1)*,* (Y, d_2) *sú metrické priestory. Dokážte, že* $d : (X, Y) \times (X, Y) \to \mathbb{R}$*,* $d((a, b), (c, d)) = d_1(a, c) + d_2(b, d)$ *je metrika na* $X \times Y$*. Ďalej dokážte, že* $(X \times Y, \tau_d) = (X, \tau_{d_1}) \times (Y, \tau_{d_2})$*.*

Cvičenie 3.14. *Nech* X, Y *sú priestory a* $X \times Y$ *je ich topologický súčin. Dokážte, že:*

(1) *Pre každé* $a \in X$ *je podpriestor* $\{a\} \times Y$ *priestoru* $X \times Y$ *homeomorfný s* Y*.*
(2) *Pre každé* $b \in Y$ *je podpriestor* $X \times \{b\}$ *priestoru* $X \times Y$ *homeomorfný s* X*.*

Cvičenie 3.15. *Nech* $f, g : X \to Y$ *sú spojité zobrazenia,* Y *je* T_2*-priestor a* $E = \{a \in X,\ f(a) = g(a)\}$*. Dokážte, že* E *je uzavretá podmnožina* X*.*

4. Faktorové priestory.

Cvičenie 4.1. *Nech* $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$ *je podpriestor priestoru* $\mathbb{R}^2$ *a* $I=[0,1]$ *je podpriestor* $\mathbb{R}$.

(1) *Nech* E *je relácia ekvivalencie na* I *taká, že* $xEy \Leftrightarrow x = y$ *alebo* $\{x,y\} = \{0,1\}$. *Dokážte, že faktorový priestor* I/E *je homeomorfný s* S^1.
(2) *Nech* E *je relácia ekvivalencie na* $I \times I$ *taká, že* $(x,y)E(x',y') \Leftrightarrow (x,y)=(x',y')$ *alebo* $(y=y' \wedge \{x,x'\}=\{0,1\})$. *Dokážte, že* $(I \times I)/E$ *je homeomorfný s priestorom* $S^1 \times I$.
(3) *Nech* E *je relácia ekvivalencie na* $I \times I$ *taká, že* $(x,y)E(x',y') \Leftrightarrow (x,y)=(x',y') \vee (y = y' \wedge \{x,x'\} = \{0,1\}) \vee (x=x' \wedge \{y,y'\} = \{0,1\})$. *Dokážte, že* $(I\times I)/E$ *je homeomorfný s priestorom* $S^1 \times S^1$.

Cvičenie 4.2. *Dokážte, že* X *je* T_2*-priestor práve vtedy, keď podmnožina* $\Delta_x = \{(x,x); x \in X\}$ *priestoru* $X \times X$ *je uzavretá v* $X \times X$.

Cvičenie 4.3. *Nech* X, Y *sú priestory,* Y *je* T_2*-priestor a* $f : X \to Y$ *je spojité zobrazenie. Dokážte, že potom množina* $\{(x, f(x)), x \in X\}$ *je uzavretá v* $X \times Y$. *Platí obrátené tvrdenie?*

Cvičenie 4.4. *Nech* $\forall\alpha \in I:\ M_\alpha$ *je podpriestor* X_α. *Dokážte, že* $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ *je podpriestor* $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Cvičenie 4.5. *Nech* $X = \bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$. *Dokážte, že ak* $\forall\alpha \in I:\ X_\alpha$ *je* T_1 *(*$T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$*, regulárny, úplne regulárny, normálny) tak aj* X *je* T_1 *(*$T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$*, regulárny, úplne regulárny, normálny).*

Cvičenie 4.6. *Nech* $f_1 : X_1 \to Y_1,\ f_2 : X_2 \to Y_2$ *sú spojité zobrazenia. Dokážte, že potom aj* $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, $(f_1 \times f_2)(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$ *je spojité zobrazenie.*

Cvičenie 4.7. *Nech* $X = \prod X_\alpha$ *a* $\forall\alpha \in I$ *je* $X_\alpha \neq \emptyset$. *Zistite, či platí: ak* X *je (úplne) regulárny, tak* $\forall\alpha \in I\ X_\alpha$ *je (úplne) regulárny.*

Cvičenie 4.8. *Ukážte, že:*

(1) *Každý uzavretý podpriestor normálneho priestoru je normálny priestor.*
(2) X *je normálny* $\Leftrightarrow$ *pre všetky otvorené množiny* U, V *v* X *také, že* $U \cup V = X$ *existujú uzavreté podmnožiny* A, B *priestoru* X *také, že* $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ *a* $A \cup B = X$.
(3) *Ak* X *je normálny a* $f : X \to Y$ *je surjektívne, spojité, uzavreté zobrazenie, tak* Y *je normálny.*
(4) *Nájdite príklad faktorového zobrazenia* $f : X \to Y$ *takého, že* X *je normálny a* Y *nie je normálny. (Návod: 3-prvkový nenormálny, faktorové zobrazenie.)*

5. Konvergencia.

Cvičenie 5.1. *Zistite, či nasledujúci systém podmnožín danej množiny je báza filtra, resp. filter na danej množine.*

(1) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}/A$ *je spočítateľná*$\}$ *v* $\mathbb{R}$.
(2) $\mathcal{F}_2 = \{(a,\infty),\ a \in \mathbb{Q}\}$ *v* $\mathbb{R}$.
(3) $\mathcal{B}(a)$ *– báza okolí bodu* a *v topologickom priestore* X.

Cvičenie 5.2. *Určte všetky hromadné body, resp. limity daných báz filtrov, resp. filtrov v daných topologických priestoroch*

(1) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}/A$ *je spočítateľná*$\}$ *v* $\mathbb{R}$ *s obyčajnou topológiou.*
(2) $\mathcal{F}_2 = \{(a,\infty),\ a \in \mathbb{Q}\}$ *v* $\mathbb{R}$ *s obyčajnou topológiou a v* $\mathbb{R}$ *s topológiou* $\tau_{\rightarrow} = \{(a,\infty),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

Cvičenie 5.3. *Nech* X *je topologický priestor. Dokážte, že nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(1) X *je kompaktný.*
(2) *Každý filter v* X *má hromadný bod.*
(3) *Každý ultrafilter v* X *konverguje.*

Cvičenie 5.4. *Nech* X *je topologický priestor,* $a \in X$ *a* $\mathcal{F}$ *je filter na* X. *Nech* X_a *je topologický priestor definovaný na množine priestoru* X *nasledovne:* U *je otvorené v* $X_a \Leftrightarrow U \subseteq X/\{a\}$ *alebo existuje* $F \in \mathcal{F}$ *tak, že* $U = F \cup \{a\}$. *Nech* $id_X : X_a \to X$ *je identické zobrazenie. Dokážte, že* $\mathcal{F} \to a \Leftrightarrow id_X : X_a \to X$ *je spojité zobrazenie.*

Cvičenie 5.5. *Dokážte, že priestor X je T_2-priestor práve vtedy, keď každá sieť v X má najviac jednu limitu.*

Cvičenie 5.6. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie, X, Y sú topologické priestory, $a \in X$. Dokážte, že f je spojité v a práve vtedy, keď pre ľubovoľnú sieť $(x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v X taká, že $x_\sigma \to a$ platí $f(x_\sigma) \to f(a)$.*

Cvičenie 5.7. *Nech $X = \prod X_\alpha$ je topologický súčin priestorov, $(x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X. Dokážte, že $x_\sigma \to a$ v $X \Leftrightarrow \forall \alpha \in I$: $p_\alpha(x_\sigma) \to p_\alpha(a)$.*