Rok: 2002

1. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body A, B, C a D neležiace v jednej rovine. Na úsečkách AB, CD, AC a BD sú dané body K, L, M a N tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

a) Dokážte, že úsečky KL a MN sa pretínajú práve v jednom bode.
b) V akom pomere delí priesečník úsečiek KL a MN tieto úsečky?

2. Dané sú úsečky dĺžok x a y. Skonštruujte úsečku dĺžky $v = x\sqrt{x/y}$.

3. Nech prirodzené číslo $n \in N$ a reálne číslo a, $1 < a \leq n-1$ sú dané. Koľko kladných koreňov má polynóm $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(i-a)x^i$? Nájdite všetky kladné korene v prípade, že $a = (n+1)/2$.

4. Daný je konvexný päťuholník v 3D a päť rôznych normál N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 v jeho rohoch. Smer svetelného osvitu je $L = -N_1$. Smer pohľadu kamery je $V = -N_3$. Kamera i zdroj svetla sú vo viditeľnej časti polpriestoru. Použite bilineárnu interpoláciu alebo inú procedúru na výpočet alebo odhad Phongovej zrkadlovej zložky PSC (Phong specular component) pre ťažisko päťuholníka v prípade, že zrkadlový (specular) koeficient $k_s = 0.4$ a Phongov exponent je $n = 32$. Zoslabovanie intenzity sa v tomto príklade zanedbáva.

5. Nech A, B sú štvorcové matice reálnych čísel. Maticu e^A definujeme pomocou radu ako: $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$. Dokážte, že platí $det(e^A e^B) = det(e^{A+B})$, kde det označuje determinant matice. Zistite, či vo všeobecnosti platí identita $e^A e^B = e^{A+B}$.

6. Vo vnútri intervalu (0,1) náhodne zvolíme dva body, ktoré tento interval rozdelia na tri úsečky. S akou pravdepodobnosťou tieto tri úsečky môžu byť stranami trojuholníka?

7. Nájdite maximum funkcie $f(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ (tzv. Shannonova entropia) na množine $M = \{p \in R^n, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n} ip_i = (n+1)/2\}$.

8. Nech postupnosť vektorov $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)^T \in R^3$ je definovaná rekurentným spôsobom: $x^{n+1} = Ax^n + d$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ a $d = (1, 2, 3)^T$ pričom $x^0 = d$. Dokážte, že postupnosť $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje v Euklidovskom priestore R^3. Nájdite jej limitu.

9. Je daná množina $\{(i,j), i,j = 0, 1, \ldots, n\}$ mrežových bodov v rovine. V každom mrežovom bode (pixely) je zadaná počiatočná funkcia U_{ij}^0 (počiatočná intenzita obrazu) pričom na okraji množiny mrežových bodov je táto hodnota nulová, t.j. $U_{ij}^0 = 0$ ak $i = 0 \vee i = n \vee j = 0 \vee j = n$. Pre $m = 1, 2 \ldots$ skonštruujme novú funkciu (obraz) U^{m+1} z funkcie U^m tak, že jej hodnota U_{ij}^{m+1} vo vnútornom mrežovom bode je aritmetickým priemerom hodnôt U^m susedných mrežových bodov, t.j. $U_{ij}^{m+1} =$

$\frac{1}{4}(U^m_{i-1,j}+U^m_{i+1,j}+U^m_{i,j-1}+U^m_{i,j+1})$ a na okraji množiny mrežových bodov je hodnota U^{m+1}_{ij} nulová. Zistite k akej funkcii (obrazu) U konverguje postupnosť funkcií (obrazov) U^m pre $m \to \infty$.

10. Nech A je $n \times (n+1)$ matica reálnych čísel, ktorá má hodnosť n. Ukážte, že je možné definovať maticu $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ (tzv. Moore-Penroseho inverzia). Dokážte, že A^+A je singulárna a že existuje jednotkový vektor $t \in R^{n+1}$ taký, že $A^+A = I - tt^T$, kde I je identita na R^{n+1} a tt^T je $(n+1)\times(n+1)$ matica, $(tt^T)_{ij} = t_i t_j$.