Rok: neviem.

1. Existujú mnohočleny u a v také, že

$$u(x)(x^3 - 3x + 2) + v(x)(x^6 - 3x^2 + 2) = x^8 - 1$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$?

2. Odhadnite hodnotu $\ln(1,1)$ s chybou menšou ako 10^{-3}. Dokážte splnenie požadovanej presnosti pre svoj odhad.

3. Dokážte, že ak funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňa rovnosť

$$f'(x)(2 + x^2 + \cos f(x)) = 1$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$, potom f je ohraničená funkcia.

4. Nech A je neprázdna podmnožina metrického priestoru (X, d) a $f : X \to [0, \infty)$ je funkcia vzdialenosti od A, t.j.

$$f(x) = \inf_{a \in A} d(x, a) \quad \text{pre každé } x \in X.$$

Musí f byť rovnomerne spojitá na X?

5. Nech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ je kružnica v $\mathbb{R}^2$, $A = (-p, 0) \in \mathbb{R}^2$, $B = (p, 0) \in \mathbb{R}^2$ kde $p \in (0, 1]$ je parameter. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolená priamka L v $\mathbb{R}^2$ pretínajúca kružnicu K pretne aj úsečku AB? (Uhol $\varphi \in [0, \pi)$, ktorý zviera L s osou x aj vzdialenosť $d \in [0, 1]$ priamky L od počiatku sú rovnomerne rozdelené náhodné veličiny.)

6. Vypočítajte A^{100} pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. V rovine je daných 6 bodov $\{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ ktorých vzájomné vzdialenosti sú nanajvýš $\sqrt{2}$. Dokážte, že aspoň 3 z dvojíc $\{\{x_i, x_j\} : 1 \leq i < j \leq 6\}$ sú také, že $||x_i - x_j|| \leq 1$.

Poznámka: Každý príklad je ohodnotený 5 bodmi. Hodnotené budú len 4 príklady, v ktorých získate najväčší počet bodov.

Rok: 1994
Zadanie: Vyberte si štyri z nasledujúcich úloh a snažte sa podať čo najprecíznejšie riešenie každej z nich.
1. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitú deriváciu a existuje konečná limita $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + f'(x)]$. Dokážte, že potom existuje aj $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Dokážte, že mnohočlen $x^n + 4$ možno vyjadriť v tvare súčinu dvoch mnohočlenov nižšieho stupňa s racionálnymi koeficientami práve vtedy, keď $n \equiv 0 \mod 4$.
3. Nech ξ, η sú nezávislé náhodne veličiny v $\mathbb{R}$, každá s hustotou pravdepodobnosti $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pre náhodný vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ platí $\xi^2 + \eta^2 < r^2$, kde $r \in (0, \infty)$ je dane číslo.
4. Nech $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. Vypočítajte $f^{(1994)}(0)$.
5. Nech $\mathcal{X} = \{X(u,v) : u, v \in \mathbb{R}\}$ je parametricky zadaná plocha v $\mathbb{R}^3$, kde $X(u,v) = (u+v, u-2v, u^3 - 3v^2 + 1)$. Nech ďalej $\mathcal{M}$ je množina všetkých bodov $P \in \mathcal{X}$, v ktorých sa plocha $\mathcal{X}$ dotýka guľovej plochy prechádzajúcej cez P so stredom v bode (10,-1,-4).
a) Dokážte, že množina $\mathcal{M}$ je konečná.
b) Nájdite prienik množiny $\mathcal{M}$ s krivkou $X(1,v) : v \in \mathbb{R}$.
6. Existuje komplexný mnohočlen P, pre ktorý platí

$$\max\left\{\left|P(z) - \frac{1}{z^4}\right| : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\right\} < 0.5 \ ?$$

7. V rovine sú dané dva mnohouholníky $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, pričom $\mathcal{A}$ je konvexný. Každý z nich je daný postupnosťou svojich vrcholov v poradí v akom nasledujú na kladne orientovanej hranici mnohouholníka. Navrhnite algoritmus s čo najmenšou časovou zložitosťou, ktorý určí prienik vnútier mnohouholníkov $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Zistite časovú zložitosť svojho algoritmu.

Rok: 1995
Zadanie: Vyberte si päť z nasledujúcich úloh a snažte sa podať co najprecíznejšie riešenie každej z nich.
1. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej predpisom

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

v množine $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25$.
2. Zistite, či postupnosť funkcií $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ daných predpisom

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n$$

konverguje rovnomerne na intervale $[0, 1]$?
3. Pre každé číslo n väčšie ako 2 existuje prvočíslo p take, že $n < p < n!$. Dokážte!
4. Dokážte, že ak n a k sú kladné celé čísla, tak potom

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k}$$

nie je celé číslo.
5. V trojrozmernom euklidovskom priestore je dana kocka s hranou dĺžky 1 a rovina ρ. Dokážte, že súčet štvorcov dĺžok kolmých priemetov hrán kocky do roviny ρ nezávisí od voľby roviny ρ. [Slovo štvorcov tam bolo dopísané len perom, ale asi to tam má byť.]
6. V euklidovskej rovine je daná priamka p a bod M mimo nej. Pre $k \in (0, 1)$ nájdite množinu bodov

$$A = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, M) = kd(X, p)\}.$$

7. Jadrom mnohouholníka nazveme množinu tých bodov, z ktorých úsečka do každého bodu hranice leží celá v tomto mnohouholníku. Navrhnite (čo najefektívnejší) algoritmus na nájdenie jadra mnohouholníka.
Vstup: postupnosť súradníc vrcholov mnohouholníka v rovine v poradí v akom nasledujú na kladne orientovanej hranici, o ktorej predpokladáme, že sama seba nepretína.
Výstup: podobne presný popis jadra mnohouholníka.
8. Nech funkcia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ z triedy C^2 je riešením rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

v $\mathbb{R}^2$. Dokážte, že u je triedy C^∞.

Rok: 1996
Zadanie: Vyberte si štyri z nasledujúcich úloh a snažte sa podať čo najprecíznejšie riešenie každej z nich.
1. Nech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Dokážte, že

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

2. Nech reálna funkcia $y \in C^2([0,\infty))$ je riešením počiatočnej úlohy $y'' = -|y|$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Dokážte, že existuje práve jedno $t > 0$ také, že $y(t) = 0$.
3. Ak $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je taká, že každá spojitá funkcia $f : K \to \mathbb{R}$ je ohraničená, potom K je kompaktná. Dokážte.
4. Nájdite najväčší spoločný deliteľ množiny čísel $\{n^{13} - n, n \in \mathbb{Z}\}$.
5. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionálne.
6. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Navzájom kolmé jednotkové vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ take, že $u = (u_1, u_2, a)$ a $v = (v_1, v_2, b)$ existujú práve vtedy, keď $a^2 + b^2 \leq 1$.
7. Nech $\mathcal{P} = \{P(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v), b\sin u : 0 \leq u, v < 2\pi\}$, $a > b > 0$ je parametricky zadaná toroidná plocha v $\mathbb{R}^3$ a $\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}$, $A^2 + B^2 \neq 0$ je daná rovina. Nájdite všetky body $P \in \mathcal{P}$, v ktorých dotyková rovina je rovnobežná s α.
8. Uvažujme úsečku spájajúcu body $P_1(-1, 1, -2)$ a $P_2(2, -2, 0)$.
(a) Nájdite jej perspektívnu projekciu so stredom (0,0,-1) na rovinu $z = 0$. Uvažujme v rovine $z = 0$ raster s krokom 0.25 v oboch smeroch x, y. Nech táto "rastrová obrazovka" ma 8 úrovní šedej (0,1,2,3,4,5,6,7).
(b) Ak požadujeme zobrazenie úsečky jednotkovej hrúbky (jednotkou je krok rastra), ktoré "rastrové body" sa vykreslia s maximálnou intenzitou (7)?
(c) Ak požadujeme vykreslenie tej istej úsečky (pri zachovaní celkovej intenzity) s vyhladením obrazu (antialiasing), ktoré rastrové body a s akou intenzitou sa vykreslia v tomto prípade.

Rok: 1997
[Toto zadanie bolo dosť slabo prefotené, takže možno niektoré príklady boli v skutočnosti trošičku iné.]
Na riešenie úloh mate 2 hodiny. Každá úloha je ohodnotená 10 bodmi. Každý na konci testu odovzdá riešenia štyroch úloh podľa vlastného výberu. V prípade, že účastník prijímacieho pohovoru vyriešil menej ako štyri úlohy, odovzdá na miesto chýbajúcich úloh do počtu 4 príslušný počet čistých papierov označených menom a číslom úlohy.
1. Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n.$$

2. Nech $A = (a_{ij})$ je matica typu $n \times n$, pričom $a_{ii} = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ pre $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$.
a) Dokážte, že pre n párne je A regulárna.
b) Dokážte, že pre každé n nepárne existuje singulárna matica uvedených vlastnosti.
3. Nech V je množina všetkých prirodzených čísel, ktorých dekadický zápis neobsahuje cifru 9. Dokážte, že rad $\sum_{n\in N} \frac{1}{n}$ konverguje.
4. Nech

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \frac{a_3^2}{x_3} +$$

a

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}^3; x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, x_1 + x_2 + x)3 = 4\}.$$

Nájdite minimum funkcie f na množine M v závislosti od parametrov a_1, a_2, a_3, $a_1 \geq a_2 \geq a_3$.
11. Nech G je konečná podgrupa grupy $\mathbb{C}'$ nenulových komplexných čísel s operáciou násobenia. Dokážte, že G je cyklická.
12. Nech náhodný vektor (ξ, η) má rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti v kruhu s polomerom $R = 1$. Zistite, či náhodné veličiny ξ, η sú
a) nekorelované
b) nezávislé.
13. Dokážte, že objem každého trojbokého ihlana, ktorý je ohraničený súradnicovými rovinami a dotykovou rovinou grafu funkcie $z = \frac{1}{xy}$, $x, y \neq 0$, je konštantný.
14. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná funkcia. Dokážte, že každé riešenie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciálnej rovnice $y'(x) = f(y(x))$ je monotónne.
15. Nech S je množina obsahujúca n $(n > 0)$ bodov v rovine. Súradnice bodov sú celočíselné a v rozmedzí 1 až m. Nájdite a popíšte algoritmus na zostrojenie konvexného obalu množiny S v čase $O(m + n)$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Rok: 2000
Zadanie: Počas 2 hodín riešte 4 z nasledujúcich úloh podľa vlastného výberu. Úplné riešenie každej úlohy má hodnotu 10 bodov.

1. Nech funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$f'' - 2f' + f = 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ak vieme, že $f' > 0$ na $\mathbb{R}$, platí nutne $f > 0$ na $\mathbb{R}$?

2. Nájdite $\lim\limits_{x \to 1+} \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

3. Nájdite maximum funkcie $f(x,y) = xy + y^2$ na množine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Nájdite všetky $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ take, že obe funkcie $f(x,y) = 2x + 3y$ a $g(x,y) = -3x - 2y$ nadobúdajú maximum na množine $\{(x,y) \in [0,2] \times [0,2] : px + qy = p + q\}$ v jedinom bode a tento bod je pre ne spoločný.

5. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod štvorca je (v euklidovskej metrike) bližšie k stredu štvorca ako k hranici štvorca, ak predpokladáme rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti v štvorci.

6. Nech A je reálna matica 3×3 taká, že pre každý stĺpcový vektor $u \in \mathbb{R}^3$ je vektor Au kolmý na u. Dokážte, že $A^T = -A$, kde A^T označuje maticu transponovanú k A.

7. Z 20 študentov sa každý zúčastnil od 0 do 6 z celkového počtu prednášok. Dokážte, alebo vyvráťte: existuje pätica študentov a dvojica prednášok takých, že buď všetci 5 boli na oboch týchto prednáškach, alebo žiaden z týchto 5 študentov nebol na žiadnej z týchto 2 prednášok.

8. V rovine je daných n úsečiek. Popíšte algoritmus so zložitosťou $O(n \log n)$, ktorý zistí, či úsečky sú po dvoch disjunktné.

Rok: 2001
Počas 2 hodín riešte 4 z nasledujúcich úloh podľa vlastného výberu. Úplné riešenie každej úlohy má hodnotu 10 bodov.
1. Nájdite maximum funkcie $f(x, y) = y$ na množine

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0\}.$$

2. Nech postupnosť reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa rekurentný vzťah

$$x_{n+1} = 2x_n.(1 - x_n).$$

Vyšetrite $\lim\limits_{n\to\infty}$ v závislosti od voľby x_1.
3. Existujú postupnosti $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pre ktoré

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[3]{n_k} - \sqrt[3]{m_k} = \sqrt{2}?$$

4. Čísla x, y sú zvolene nezávisle a náhodne (s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti) z intervalu (0,1). Určite pravdepodobnosť (s presnosťou na dve desatinné miesta), že celé číslo najbližšie k číslu $\frac{x}{y}$ je párne.
5. Nech G je konečná grupa pozostávajúca z reálnych matíc typu $n \times n$ s operáciou násobenia matíc. Predpokladajme, že súčet stop všetkých matíc z G je nula. Dokážte, že súčet všetkých matíc z G je nulová matica.
6. Nech A_n $(n \geq 2)$ označuje maticu (a_{ij}) typu $(n-1) \times (n-1)$ takú, že

$$a_{ij} = \begin{cases} i+2, & \text{ak } i = j, \\ 1, & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Rozhodnite, či je postupnosť $\frac{\det A_n}{n! \log n}$ ohraničená.
7. Na priamkach určených stranami AB, BC a AC trojuholníka ABC sú dané body $A' = B + a(C - B)$, $B' = C + b(A - C)$, $C' = A + c(B - A)$. Dokážte, že body A', B', C' ležia na jednej priamke práve vtedy keď $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$.
8. Nech $ABCD$ je štvoruholník s vrcholmi $A = [0, 0]^T$, $B = [20, 40]^T$, $C = [60, 40]^T$ a $D = [0, 60]^T$. Nech UV je úsečka, pričom $U = [-10, 0]^T$ a $V = [50, 60]^T$. Úsečku aj štvoruholník uvažujte rasterizované v obvyklom celočíselnom gride. Zistite výsledok orezania úsečky UV štvoruholníkom $ABCD$. Vyjadrite tiež časovú zložitosť efektívnej procedúry ako funkciu počtu komponentov súvislosti orezanej úsečky (za predpokladu, že zameníme štvoruholník všeobecným jednoduchým n-uholníkom, $n \geq 3$).

Rok: 1996
Zadanie: Vyberte si štyri z nasledujúcich úloh a snažte sa podať čo najprecíznejšie riešenie každej z nich.
1. Nech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Dokážte, že

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

2. Nech reálna funkcia $y \in C^2([0,\infty))$ je riešením počiatočnej úlohy $y'' = -|y|$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Dokážte, že existuje práve jedno $t > 0$ také, že $y(t) = 0$.
3. Ak $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je taká, že každá spojitá funkcia $f : K \to \mathbb{R}$ je ohraničená, potom K je kompaktná. Dokážte.
4. Nájdite najväčší spoločný deliteľ množiny čísel $\{n^{13} - n, n \in \mathbb{Z}\}$.
5. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionálne.
6. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Navzájom kolmé jednotkové vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ také, že $u = (u_1, u_2, a)$ a $v = (v_1, v_2, b)$ existujú práve vtedy, keď $a^2 + b^2 \leq 1$.
7. Nech $\mathcal{P} = \{P(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v), b\sin u : 0 \leq u, v < 2\pi\}$, $a > b > 0$ je parametricky zadaná toroidná plocha v $\mathbb{R}^3$ a $\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}$, $A^2 + B^2 \neq 0$ je daná rovina. Nájdite všetky body $P \in \mathcal{P}$, v ktorých dotyková rovina je rovnobežná s α.
8. Uvažujme úsečku spájajúcu body $P_1(-1, 1, -2)$ a $P_2(2, -2, 0)$.
(a) Nájdite jej perspektívnu projekciu so stredom (0,0,-1) na rovinu $z = 0$. Uvažujme v rovine $z = 0$ raster s krokom 0.25 v oboch smeroch x, y. Nech táto "rastrová obrazovka" má 8 úrovní šedej (0,1,2,3,4,5,6,7).
(b) Ak požadujeme zobrazenie úsečky jednotkovej hrúbky (jednotkou je krok rastra), ktorá "rastrové body" sa vykreslia s maximálnou intenzitou (7)?
(c) Ak požadujeme vykreslenie tej istej úsečky (pri zachovaní celkovej intenzity) s vyhladením obrazu (antialiasing), ktoré rastrové body a s akou intenzitou sa vykreslia v tomto prípade.