

Tento dokument vznikol ako reakcia na niektoré otázky položené na blogu Michala Lehutu <http://lehuta.blog.sme.sk/c/100142/>. Určite by to bolo lepšie napísať priamo do diskusie na blogu, ale <http://diskusie.sme.sk> dáko moc nepodporuje písanie matematiky ;-). Ak budete nato chcieť nejako zareagovať, IMHO najlepšie v diskusii k blogu. Pretože sa dokument (a tým aj číslovanie) môže meniť, je lepšie odvolať sa na rovnicu pomocou kódu pri nej ako pomocou čísla.

Dúfam, že som tam nespravil priveľa chýb a preklepov.

Fibonacciho špirála

Fibonacciho čísla:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (1) \quad \{\text{EQFIB}\}$$

a $F_0 = F_1 = 1$;

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - (1 - \varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad (2) \quad \{\text{EQFIBUZ}\}$$

kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.¹

Uvedieme (bez dôkazu) ešte 2 identity, ktoré by mohli byť pre nás užitočné²

$$F_{2n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n F_{n-1} + F_n F_{n+1} \quad (3) \quad \{\text{EQF2N}\}$$

$$F_{2n+2} = F_{n-1} F_{n+1} + F_{n+2} F_n \quad (4) \quad \{\text{EQF2N1}\}$$

Fibonacciho špirála (pozri <http://lehuta.blog.sme.sk/c/100142/>) vznikne tak, že z bodu $(0, 0)$ ideme postupne o F_0 na západ, o F_1 na sever, o F_2 na východ, o F_3 na juh atď. Zaujímajú nás vlastnosti tejto špirály, konkrétne by sme chceli zistiť asymptoty, ku ktorým sa tieto body blížila.

Súradnice bodov

Zaoberajme sa len bodmi po každých 4 úsekoch. Tieto body majú súradnice $x_0 = y_0 = 0$ a

$$\begin{aligned} x_n &= (F_3 - F_1) + (F_7 - F_5) + \dots + (F_{4n-1} - F_{4n-3}), \\ y_n &= (F_4 - F_2) + (F_8 - F_6) + \dots + (F_{4n} - F_{4n-2}). \end{aligned}$$

Po využití (1) to upravíme na

$$x_n = F_2 + F_6 + \dots + F_{4n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+2} \quad (5) \quad \{\text{EQXN}\}$$

$$y_n = F_3 + F_7 + \dots + F_{4n-3} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+3} \quad (6) \quad \{\text{EQYN}\}$$

¹Pozor! Niekde sa vyskytuje definícia v tvare $F_1 = F_2 = 1$ (alebo ekvivalentne $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$). Preto je dôležité, ak čerpáme z rôznych prameňov, porovnať aj definície a veci, ktoré chceme použiť upraviť tak, aby súhlasili s definíciou, ktorú používame my. V tomto texte budeme všetky veci uvádzať tak, ako platí pre Fibonacciho postupnosť definovanú počiatočnými hodnotami $F_0 = F_1 = 1$, ako sme uviedli na začiatku. (Aby som bol úprimný, definícia, ktorú som uviedol ja je asi oveľa menej štandardná, ako tá druhá; ale už sa mi to nechcelo všetko opravovať naspäť.)

²ak chcete dôkaz môžete sa pozrieť napríklad na vetu 2.8 v http://is.muni.cz/th/106232/prif_b/fp.pdf, ktorá je dokonca všeobecnejšia.

Prvé hodnoty:

$$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 2 + 13 = 15, x_3 = 2 + 13 + 89 = 104, x_4 = 2 + 13 + 89 + 610 = 714$$

$$y_0 = 0, y_1 = 3, y_2 = 3 + 21 = 24, y_3 = 3 + 21 + 144 = 168, y_4 = 3 + 21 + 144 + 987 = 1155$$

Chceli by sme nájsť predpis pre x_n . Jedna možnosť je uhádnuť a dokázať matematickou indukciou. Skúsme si všimnúť hodnoty x_n a porovnať ich s Fibonacciho číslom nasledujúcim hneď po poslednom sčítanci v x_n . Po chvíli skúmania tabuľky prideme na to, že ich rozdiel sa dá získať vždy ako súčin 2 po sebe idúcich Fibonacciho čísel. (Význam posledného stĺpca v nasledujúcej tabuľke vysvetlíme neskôr.)

n	x_n	F_{4n-1}	$F_{2n-1}F_{2n-2}$	$F_{4n-1} - F_{2n-1}F_{2n-2}$	G_{4n}
1	2	3	1	2	11
2	15	21	6	15	76
3	104	144	40	104	521
4	714	987	273	714	3571

Teraz, keď už sme prišli na to, akú rovnosť chceme dokázať

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+2} = F_{4n-1} - F_{2n-1}F_{2n-2} \quad (7) \quad \{\text{EQXNUZ}\}$$

malo by to ísť vcelku jednoducho. (Nevedel som vymyslieť postup, ako to dokazovať bez toho, aby sme museli „hádať“, čiže bez toho, aby sme vopred vedeli pravú stranu.)

Takéto rovnosti sa dajú dokazovať matematickou indukciou. Poznáme totiž hodnotu x_1 a vieme, že všetky ďalšie hodnoty x_n sú jednoznačne určené rovnosťou $x_{n+1} - x_n = F_{4n+2}$. Na to, aby sme dokázali rovnosť (7) stačí zistiť, či takýto vzťah platí aj pre pravú stranu rovnosti.

Skúsme teda upraviť príslušný rozdiel

$$F_{4n+3} - F_{2n+1}F_{2n} - (F_{4n-1} - F_{2n-1}F_{2n-2}) = F_{4n+3} - F_{4n-1} - (F_{2n+1}F_{2n} - F_{2n-1}F_{2n-2}) =$$

$$F_{4n+3} - F_{4n-1} - (F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n-1}) + (F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-1}F_{2n-2}) \stackrel{(3)}{=} F_{4n+3} - F_{4n-1} - F_{4n+1} + F_{4n-1} = F_{4n+3} - F_{4n+1} = F_{4n+2}$$

Teraz celý postup zopakujeme pre y_n

n	y_n	F_{4n}	$F_{2n-2}F_{2n}$	$F_{4n} - F_{2n-2}F_{2n}$	G_{4n+1}
1	3	5	2	3	18
2	24	34	10	24	23
3	168	233	65	168	843
4	1155	1597	442	1155	5778

Chceme dokázať

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+3} = F_{4n} - F_{2n-2}F_{2n} \quad (8) \quad \{\text{EQYNUZ}\}$$

V indukčnom kroku teraz dostaneme

$$F_{4n+4} - F_{2n}F_{2n+2} - (F_{4n} - F_{2n-2}F_{2n}) = F_{4n+4} - F_{4n} - F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n-2}F_{2n} =$$

$$F_{4n+4} - F_{4n} - (F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n-1}F_{2n+1}) + (F_{2n-2}F_{2n} - F_{2n-1}F_{2n+1}) \stackrel{(4)}{=} F_{4n+4} - F_{4n} - F_{4n+2} + F_{4n} = F_{4n+4} - F_{4n+2} = F_{4n+3}$$

Možno by mohlo byť užitočné vyjadriť y_n a x_n aj priamo pomocou φ . Kvôli prehľadnosti označme $\psi = 1 - \varphi$. Pre tieto čísla platí $\varphi\psi = -1$ a $\varphi + \psi = 1$. (Sú to korene kvadratickej rovnice $x^2 - x - 1 = 0$.) Tiež je užitočné všimnúť si, že $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} y_n = F_{4n} - F_{2n}F_{2n-2} &= \frac{\varphi^{4n+1} - \psi^{4n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(\varphi^{2n+1} - \psi^{2n+1})(\varphi^{2n-1} - \psi^{2n-1})}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{5}(\varphi^{4n+1} - \psi^{4n+1}) - (\varphi^{4n} + \psi^{4n}) + \varphi^{2n-1}\psi^{2n-1}(\varphi^2 + \psi^2)}{5} = \\ &= \frac{(\varphi - \psi)(\varphi^{4n+1} - \psi^{4n+1}) - (\varphi^{4n} + \psi^{4n}) + \varphi^{2n-1}\psi^{2n-1}(\varphi^2 + \psi^2)}{5} = \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} + \psi^{4n+2} - \varphi\psi(\varphi^{4n} - \psi^{4n}) - (\varphi^{4n} - \psi^{4n}) - 3}{5} = \frac{\varphi^{4n+2} + \psi^{4n+2} - 3}{5} \end{aligned}$$

Ak označíme $G_n = \varphi^{n+1} + \psi^{n+1}$, tak máme

$$y_n = \frac{G_{4n+1} - 3}{5}. \quad (9) \quad \{\text{EQYNGN}\}$$

Pritom G_n je opäť postupnosť, ktorá spĺňa rekurenciu $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$. (Kto sa niekde učil nejaké základy o riešení lineárnych rekurentných rovníc,³ vidí to hneď. Dá sa nato prísť z toho, že túto rekurenciu spĺňajú postupnosti φ^{n+1} aj ψ^{n+1} , teda aj všetky ich lineárne kombinácie.) Vďaka tejto rekurencii z počiatočných rovníc vieme vypočítať všetky hodnoty G_n :

$$G_0 = \varphi + \psi = 1$$

$$G_1 = \varphi^2 + \psi^2 = 3$$

ďalšie hodnoty: 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778...

Môžeme si overiť, že skutočne $y_1 = \frac{18-3}{5}$, $y_2 = \frac{123-3}{5}$, $y_3 = \frac{843-3}{5}$.⁴ Čísla G_n sa tiež zvyknú volať *Lucasove čísla* – aj keď opäť je to štandardne o 1 posunuté oproti môjmu označeniu http://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_number.

Teraz sa pokúsme odvodiť niečo podobné pre x_n .

$$\begin{aligned} x_n = F_{4n-1} - F_{2n-1}F_{2n-2} &= \frac{\varphi^{4n} - \psi^{4n}}{\sqrt{5}} - \frac{(\varphi^{2n} - \psi^{2n})(\varphi^{2n-1} - \psi^{2n-1})}{5} = \\ &= \frac{(\varphi - \psi)(\varphi^{4n} - \psi^{4n}) - (\varphi^{2n} - \psi^{2n})(\varphi^{2n-1} - \psi^{2n-1})}{5} = \\ &= \frac{(\varphi^{4n+1} + \psi^{4n+1}) - \varphi\psi(\varphi^{4n-1} + \psi^{4n-1}) - (\varphi^{4n+1} + \psi^{4n+1}) + \varphi^{2n-1}\psi^{2n-1}(\varphi + \psi)}{5} = \\ &= \frac{(\varphi^{4n+1} + \psi^{4n+1}) - (\varphi + \psi)}{5} = \frac{G_{4n} - 1}{5}. \end{aligned}$$

Získali sme teda rovnosť

$$x_n = \frac{G_{4n} - 1}{5}, \quad (10) \quad \{\text{EQXNGN}\}$$

ktorú môžeme opäť skontrolovať v tabuľke pre x_n .

³http://en.wikipedia.org/wiki/Difference_equation

⁴TODO dopln G_n do tabuľky

Smernica asymptoty

Ak sa body so súradnicami (x_n, y_n) blížia k nejakej asymptote, tak jej smernica musí byť limite podielu $\frac{y_n}{x_n}$. Zo vzťahov (10), (9) dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{4n+1} - 3}{G_{4n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{4n+1}}{G_{4n}} = \varphi$$

Posledná rovnosť sa dá odvodiť z predpisu $G_n = \varphi^{n+1} + \psi^{n+1}$. (Je známe, že podiel po sebe idúcich Fibonacciho čísel konverguje k zlatému rezu. Odvodenie podobného vzťahu pre G_n je takmer rovnaké.)

Asymptota teda skutočne existuje a jej smernica je φ .

Ešte by sme tu odvodili ten istý fakt trochu iným spôsobom, ktorý je pekný v tom, že nepotrebujeme na jeho odvodenie poznať vzťah popisujúci x_n a y_n pomocou Fibonacciho čísel (resp. pomocou G_n), limitu vyrátame priamo z vyjadrenia y_n a x_n ako sumy niektorých Fibonacciho čísel.

Využijeme Stolzovu vetu. Stolzova veta je akýsi ekvivalent L'Hospitalovho pravidla pre rady.⁵

Veta 1 (Stolzova-Cesarova veta). *Nech (x_n) a (y_n) sú postupnosti reálnych čísel. Nech (y_n) je kladná, ostro rastúca a $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Ak existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L,$$

tak potom aj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

Stolzovu vetu môžeme preformulovať aj takto:

Dôsledok 1. *Nech (a_n) a (b_n) sú postupnosti reálnych čísel, pričom $b_n > 0$ a $\sum b_n = +\infty$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ak existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} = L.$$

Použitím Stolzovej vety priamo dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+3}}{\sum_{k=0}^{n-1} F_{4k+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{4n+3}}{F_{4n+2}} = \varphi$$

Asymptoty

Zistili sme už smer asymptoty. Priamok daného smeru je veľa – ešte chceme zistiť, kam je asymptota posunutá. Bod, v ktorom asymptota pretína y -ovú os zistíme, keď vyrátame limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - \varphi x_n).$$

⁵Dôkaz Stolzovej vety možno nájsť napríklad tu <http://planetmath.org/encyclopedia/StolzCesaroTheorem.html>, ak preferujete Čestinu/Slovenčinu, tak skúste <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/tc2006/tc.pdf>, <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/MA/MA-prednaska.pdf>

Začnime najprv upravovať

$$y_n - \varphi x_n = \frac{G_{4n+1} - 3 - \varphi(G_{4n} - 1)}{5} = \frac{\varphi^{4n+2} + \psi^{4n+2} - 3 - \varphi(\varphi^{4n+1} + \psi^{4n+1} - 1)}{5} =$$

$$\frac{\varphi^{4n+2} - \varphi^{4n+2} + (\psi - \varphi)\psi^{4n+1} - 3 + \varphi}{5} = \frac{F_0\psi^{4n+1} + \varphi - 3}{5} = \frac{\psi^{4n+1} + \varphi - 3}{5},$$

preto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \varphi x_n = \frac{\varphi - 3}{5}.$$

Rovnica asymptoty je teda $y = \varphi \cdot x + \frac{\varphi - 3}{5}$

n	x_n	y_n	$y = \varphi \cdot x + \frac{\varphi - 3}{5}$
1	2	3	2,9597
2	15	24	23,9941
3	104	168	167,9991
4	714	1597	1154,9999

Ostatné postupnosti

Smernice vyjdú rovnaké (resp. otočené o 90°). Vidno to napríklad z toho, že odvodenie pomocou Stolzovej vety vyjde aj pre ostatné postupnosti.

Zostáva otázka, či sa protiahle asymptoty stretnú v tom istom bode. Pretože som lenivý, pozriem sa len na postupnosť protiahlu k tej, ktorú som už vyráťal.

Tu budú súradnice

$$x'_n = x_n - F_{4n+1}$$

$$y'_n = y_n - F_{4n+2}$$

Limita, ktorú budeme rátať pri posune asymptoty sa teda zmení o hodnotu $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{4n+2} - \varphi F_{4n+1} = 0$. Teda skutočne budú existovať len 2 asymptoty, pretnú sa v niektorom bode (ale určite to nebude bod $(0,0)$, ako by to mohlo vyzeráť z obrázku). Ten bod, takisto ako druhú (kolmú) asymptotu som bol lenivý vyráťal.

Otázky

1. Dali by sa tie vzťahy odvodiť aj bez toho, aby sme najprv „uhádli“ pravú stranu?
2. Dá sa bod, kde sa asymptoty pretnú, vyráťal bez toho, aby sme vyráťali priamo rovnice asymptot?
3. Neverím, že by to už niekto niekde neráťal, ak to nájdete niekde na webe, dajte mi vedieť – napríklad to napíšte do diskusie na spomínanom blogu. (Trochu som googlil, ale nenašiel som príklad, kde by bol priamo zráťaný súčet každého štvrtého Fibonacciho čísla.)