

Zabreikova lema

Referát som robil najmä podľa príslušnej kapitoly z [M]. Pri dôkaze Zaberikovej lemy som sa držal blogu [MSE].

1 Polonormy

1.1 Spojitosť polonormy

Definícia 1.1.1. Nech X je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Funkcia $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ je polonorma, ak pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ platí:

- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Je to teda funkcia, ktorá je *subaditívna* a *absolútne homogénna*. Môžeme si všimnúť, že z týchto podmienok vyplýva $p(0) = 0$ a tiež $p(x) \geq 0$ (pre ľubovoľné $x \in X$).

Pretože sa budeme zaoberať spojitostou polonoriem, nie je zlé si uvedomiť, že platí:

{TVRSP0J}

Tvrdenie 1.1.2. Nech $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ je polonorma na nejakom lineárnom normovanom priestore X . Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) Funkcia p je ohraničená na nejakej guli $B(0, r) = \{x \in X; \|x\| < r\}$ so stredom v nule.
- (ii) Existuje konštanta C taká, že $p(x) \leq C\|x\|$ pre ľubovoľné $x \in X$.
- (iii) Polonorma p je spojitá v 0.
- (iv) Polonorma p je spojitá na celom X .

Dôkaz. Prepokladajme, že máme $p(x) \leq M$ pre $x < r$. Potom špeciálne platí

$$\|x\| = r/2 \quad \Rightarrow \quad p(x) \leq M.$$

Ak položíme $C = 2M/R$ tak dostaneme

$$p(x) \leq C\|x\|$$

aspoň pre $\|x\| = r/2$. Pomocou absolútnej homogenity rozšírime túto nerovnosť na celé X .

Implikácie (ii) $\Rightarrow$ (iii) ak (iii) $\Rightarrow$ (i) sú zrejmé

Vidíme teda, že všetky tri formulácie spojitosti v nule sú skutočne ekvivalentné.

Na to, že zo spojitosti v nule vyplýva spojitosť na celom X si stačí všimnúť, že máme

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) &\Rightarrow & p(x+y) - p(x) \leq p(y) \\ p(x) &\leq p(x+y) + p(-y) &\Rightarrow & p(x) - p(x+y) \leq p(-y) \end{aligned}$$

čo nám, spolu s rovnosťou $p(-y) = p(y)$, už dáva

$$|p(x+y) - p(x)| \leq p(y).$$

□

1.2 Zabreikova lema

V definícii polonormy máme (konečnú) subaditívnosť. Zabreikova lema hovorí, že ak ju nahradíme spočítateľnou subaditívnosťou, tak to zabezpečí spojitosť polonormy.

{VTZABREIKO}

Veta 1.2.1 (Zabreikova lema). *TODO subaditívna polonorma je spojitá*

Z dôkazu vidno, že vlastne stačí vyžadovať uvedenú podmienku pre *absolútne* konvergentné rady.

2 Aplikácie Zabreikovej lemy

2.1 Banach-Steinhaus

Veta 2.1.1. *Nech X je Banachov priestor a Y je lineárny normovaný priestor. Nech $\mathfrak{T}$ je nejaký systém lineárnych funkcií $X \rightarrow Y$. Ak pre každé $x \in X$ platí*

$$\sup\{\|Tx\|; T \in \mathfrak{T}\} < +\infty$$

tak aj

$$\sup\{\|T\|; T \in \mathfrak{T}\} < +\infty.$$

$$p(x) = \sup\{\|Tx\|; T \in \mathfrak{T}\}$$

$$\left\| T \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) \right\| \stackrel{(1)}{=} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n \right\| \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$$

(1): linearita a *spojitosť* T ;

(2): trojuholníková nerovnosť a *spojitosť* normy $\|\cdot\|$

(V oboch prípadoch by sme takéto niečo bez spojitosti vedeli povedať iba pre konečné sumy.)

Z predchádzajúcej nerovnosti už máme:

$$p\left(\sum x_n\right) = \sup_{t \in \mathfrak{T}} \left\| T\left(\sum x_n\right) \right\| \leq \sum p(x_n)$$

Z vety 1.2.1 potom dostaneme spojitosť, čo podľa tvrdenia 1.1.2 znamená, že existuje C také, že

$$\sup\{\|Tx\|; T \in \mathfrak{T}\} \leq C\|x\|.$$

Špeciálne pre $\|x\| \leq 1$ dostaneme $\sup\{\|Tx\|; T \in \mathfrak{T}\} \leq C$, čo znamená, že aj

$$\sup\{\|T\|; T \in \mathfrak{T}\} \leq C.$$

2.2 Veta o otvorenom zobrazení

Veta 2.2.1. *Nech X, Y sú Banachove priestory a $T: X \rightarrow Y$ je spojitý lineárny funkcionál, ktorý je navyše surjektívny. Potom T je otvorené zobrazenie.*

$$p(y) = \{\inf\|x\|; x \in X, Tx = y\}$$

Všimnime si, že využívame surjektívnosť. (Inak by sme mohli mať infimum z prázdnej množiny, t.j. pre niektoré $y \in Y$ by bolo $p(y)$ nedefinované, alebo by sme mali $p(y) = -\infty$)

2.3 Veta o uzavretom grafe

Veta 2.3.1. *Nech X, Y sú Banachove priestory a $T: X \rightarrow Y$ je lineárne zobrazenie. Nech navyše T má uzavretý graf, t.j. ak $x_n \rightarrow x$ v X a $T(x_n) \rightarrow y$ v Y , tak platí $y = T(x)$. Potom T je spojité.*

$$p(x) = \|Tx\|$$

3 Kontrapríklady

V [M, Exercise 1.75] sú uvedené príklady, ktoré ukazujú, že keď vynecháme predpoklad o úplnosti, tak uvedené vety už neplatia.

Budeme pracovať s priestorom V všetkých postupností s konečným nosičom. (T.j. takých, že iba konečne veľa členov je nenulových.)

Označme X tento priestor s ℓ_1 normou a Y tento priestor s ℓ_∞ normou, t.j.

$$\begin{aligned}\|x\|_X &= \|x\|_1 = \sum |x_k| \\ \|x\|_Y &= \|x\|_\infty = \sup |x_k|\end{aligned}$$

Ani v jednom prípade nie je tento priestor úplný.

a) Ak definujeme

$$\begin{aligned}T_m: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ T_m(x) &= mx_m\end{aligned}$$

tak máme $\|T_m\| = m$.

Súčasne pre každé $x \in X$ je iba konečne veľa hodnôt x_m nenulových. Ak pre $k > n_0$ máme $x_k = 0$, tak dostaneme

$$\sup\{\|T_m(x)\|; m \in \mathbb{N}\} \leq n_0.$$

Teda tieto funkcionály sú ohraňované bodovo, nie však rovnomerne. Teda bez predpokladu o úplnosti už neplatí Banach-Steinhausova veta.

b) Zoberme $T: X \rightarrow Y$, ktoré je definované ako identita (t.j. $T(x) = x$). Toto zobrazenie je spojité, lebo $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Očividne je aj surjektívne.

Na to, aby sme videli že T nie je otvorené si stačí všimnúť, že T^{-1} nie je spojité. Skutočne, pre žiadnu konštantu neplatí $\|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty$. (Opäť sa stačí pozerať na postupnosti kde na začiatok dáme dostatočný počet jednotiek a zvyšok doplním nulami.)

c) Zoberme $T: Y \rightarrow X$, ktoré je definované ako identita (t.j. $T(y) = y$). Toto zobrazenie nie je spojité, má však uzavretý graf.

T nie je spojité. Všetky prvky tvaru $y = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ máme $\|y\|_Y = 1$ ale pridaním dostatočného počtu jednotiek môžeme dosiahnuť ľubovoľne veľkú normu $\|Ty\|_X$.

T má uzavretý graf. Vlastne chceme ukázať, že ak $x^{(n)} \rightarrow x$ v ℓ_1 -norme a $x^{(n)} \rightarrow y$ v ℓ_∞ -norme, tak $x = y$. Na to si stačí uvedomiť, že s konvergencie v ℓ_1 - resp. v ℓ_∞ -norme vyplýva bodová konvergencia.

Môžeme si všimnúť, že rovnaký argument prejde aj ak X nahradíme priestorom ℓ_1 . Takže máme kontrapríklad ukazujúci, že veta o uzavretom grafe neplatí ak vynecháme úplnosť definičného oboru (aj ak by sme mali úplnosť kooboru).

d) Ak zoberieme $p(x) = \|x\|_1$, tak dostaneme spočítateľne subaditívnu polonormu na Y , ktorá nie je spojité.

Môžeme to skontrolovať aj tak, že sa pozrieme na dôkaz vety o uzavretom grafe a uvedomíme si, že na overenie spočítateľnej subaditivty nám stačila úplnosť cieľového priestoru.

(Pre takto zvolené T je to presne polonorma použitá v tomto dôkaze. Úplnosť definičného oboru sme potrebovali až keď sme chceli aplikovať Zabreikovu lemu.)

Môžeme to overiť aj priamo: Nech platí $\sum x^{(k)} = x$ v Y a ako $s^{(n)}$ označme n -tý čiastočný súčet. (T.j. $s^{(n)}$ konverguje k x v suprémovej norme.) TODO

Banach-Steinhausova veta $X = c_{00}$ so suprémovou normou:

Definujme $T_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ako $T_n(x) = x_1 + \dots + x_n$.

Potom pre každé x máme $|T_n(x)| \leq |x_1 + \dots + x_n|$, teda $\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(x)| < +\infty$.

Súčasne $\|T_n\| = n$, teda $\sup_{n \in \mathbb{N}} = +\infty$.

Veta o uzavretom grafe TODO vedel by som nájsť aj kontrapríklad, kde vynechám úplnosť iba pri jednom priestore?

Veta o otvorenom zobrazení TODO vedel by som nájsť aj kontrapříklad, kde vynechám úplnosť iba pri jednom priestore?

Zabreikova lema TODO čo sa stane bez úplnosti

TODO čo sa stane, ak by p bola iba sublineárna?

4 Gliding hump

Ešte sme odbočili k tomu, že Banach-Steinhausova veta sa dá dokazovať aj cez gliding hump argument.

Sokal Velmi jednoducho je dôkaz takéhoto typu urobený v [S].

TODO

Megginson Dôkaz uvedený v [M, Exercise 1.75] by mal byť v podstate pôvodný Hahnov dôkaz.

TODO

Pietsch Trochu inak je tento dôkaz sformulovaný v [P, 2.3.3].

TODO

Literatúra

[M] Robert E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, New York, 1998. Graduate Texts in Mathematics 193.

[MSE] Zabreiko's lemma and four fundamental theorems of functional analysis. <http://math.blogoverflow.com/2014/06/25/zabreikos-lemma-and-four-fundamental-theorems-of-functional-analysis/>.

[P] Albrecht Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhäuser, Boston, 2007.

[S] Alan D. Sokal. A really simple elementary proof of the Uniform Boundedness Theorem. *Amer. Math. Monthly*, 118(6):450–452, 2011.