

0.1 Úvod do kategórií

Táto časť je tu uvedená kvôli tomu, aby prácu mohol čítať aj ten, kto nepozná teóriu kategórií. Je to teda veľmi stručný úvod do teórie kategórií, ktorý obsahuje pojmy, ktoré budeme používať. Časť venovaná kategóriám **Top** a **Haus** je vlastne akýmsi prekladovým slovníkom medzi topologickými a kategoriálnymi pojmami.

0.1.1 Kategórie, podkategórie, funktory

Definícia 1. Kategóriou nazývame usporiadanú štvoricu $\mathbf{A} = (\text{Ob}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$, kde

- (i) Ob je trieda, ktorej prvky sa nazývajú *objekty* kategórie $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ -objekty).
- (ii) Každé usporiadanej dvojici (A, B) $\mathbf{A}$ -objektov je priradená práve jedna množina, ktorú označíme $\text{hom}(A, B)$, ktorej prvky sa nazývajú *$\mathbf{A}$ -morfizmy* z objektu A do objektu B .
- (iii) Pre každý $\mathbf{A}$ -objekt A existuje $\mathbf{A}$ -morfizmus $\text{id}_A \in \text{hom}(A, A)$.
- (iv) Pre ľubovoľné $\mathbf{A}$ -objekty A, B, C a ľubovoľné $\mathbf{A}$ -morfizmy $f \in \text{hom}(A, B)$, $g \in \text{hom}(B, C)$ existuje práve jeden $\mathbf{A}$ -morfizmus $g \circ f \in \text{hom}(A, C)$, pričom platí:

- (a) Pre ľubovoľné $f \in \text{hom}(A, B)$, $g \in \text{hom}(B, C)$, $h \in \text{hom}(C, D)$ platí:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (b) Pre ľubovoľné $f \in \text{hom}(A, B)$ platí:

$$f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f.$$

- (c) Pre ľubovoľné $\mathbf{A}$ -objekty A, B, C, D také, že $(A, B) \neq (C, D)$, platí $\text{hom}(A, B) \cap \text{hom}(C, D) = \emptyset$.

id_A sa nazýva *identita* na A a $\circ$ *skladanie* morfizmov. Trieda všetkých $\mathbf{A}$ -morfizmov sa označuje $\text{Mor}(\mathbf{A})$.

Príklad 1. Príklady kategórií: Kategória **Set** množín a zobrazení medzi nimi. Kategória **Top** topologických priestorov a spojitých zobrazení medzi nimi. Kategória **Haus** hausdorffovských topologických priestorov a spojitých zobrazení medzi nimi. Vo všetkých uvedených kategóriách je $\circ$ obvyklé skladanie zobrazení a id je identické zobrazenie.

Morfizmy nemusia vždy predstavovať zobrazenia, ako ukazujú nasledovné dva príklady.

Príklad 2 (Monoid ako kategória). Pre každý monoid (pologrupu s jednotkou) $(M, \bullet, e)$ je $\mathbf{C}(M, \bullet, e) = (\text{Ob}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ kategória s jediným objektom, ak položíme $\text{Ob} = \{M\}$, $\text{hom}(M, M) = M$, $\text{id}_M = e$, $y \circ x = y \bullet x$.

Príklad 3 (Usporiadaná trieda ako kategória). Ak X je trieda a $\leq$ je usporiadanie na X (t.j. reflexívna, antisymetrická a tranzitívna triedová relácia na X). Potom môžeme definovať kategóriu $\mathbf{C}$ tak, že položíme $\text{Ob}(\mathbf{C}) = X$,

$$\text{hom}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{ak } x \leq y \\ \emptyset & \text{inak,} \end{cases} \quad \text{id}_X = (x, x) \text{ a } (y, z) \circ (x, y) = (x, z).$$

Morfizmy sa často zvyknú znázorňovať v diagramoch pomocou šípok, napríklad nasledovný diagram znázorňuje dva morfizmy $f, g \in \text{hom}(A, B)$.

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} B$$

Definícia 2. Pre ľubovoľnú kategóriu $\mathbf{A} = (\text{Ob}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ *duálna kategória* ku $\mathbf{A}$ je kategória $\mathbf{A}^{op} = (\text{Ob}, \text{hom}^{op}, \text{id}, \circ^{op})$, kde $\text{hom}^{op}(A, B) = \text{hom}(B, A)$ a $f \circ^{op} g = g \circ f$.

Prechod od kategórie $\mathbf{A}$ ku duálnej kategórii vlastne znamená obrátenie všetkých šípok v diagramoch znázorňujúcich morfizmy.

Každú vlastnosť $S_{\mathbf{A}^{op}}(X)$ $\mathbf{A}^{op}$ -objektu X možno súčasne vysloviť ako vlastnosť $S_A^{op}(X)$ (lebo X je súčasne aj $\mathbf{A}$ -objektom). S^{op} sa nazýva *duálna* vlastnosť k S . Podobne k ľubovoľnému výroku P týkajúcemu sa nejakých morfizmov a objektov kategórie $\mathbf{A}$ možno vysloviť duálny výrok P^{op} . Duálny výrok bude platiť v $\mathbf{A}^{op}$ práve vtedy, keď v $\mathbf{A}$ platí pôvodný výrok. Pretože $(\mathbf{A}^{op})^{op} = \mathbf{A}$, tak platí:

Veta 1 (Princíp duality). Ak výrok P platí pre ľubovoľnú kategóriu $\mathbf{A}$, tak aj P^{op} platí pre ľubovoľnú kategóriu $\mathbf{A}$.

Definícia 3. Ak $S \Leftrightarrow S^{op}$, tak S sa nazýva *samoduálna* vlastnosť.

Vďaka princípu duality, ak dokážeme nejaké tvrdenie, dokázali sme už aj duálne tvrdenie. (“Jednou ranou zabijeme dve muchy, avšak niekedy sa tie dve muchy rovnajú.”)

Definícia 4. Kategória $\mathbf{A}$ sa nazýva *podkategória* kategórie $\mathbf{B}$, ak sú splnené nasledovné podmienky:

- (i) $\text{Ob}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Ob}(\mathbf{B})$,
- (ii) pre každé $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{A})$, $\text{hom}_{\mathbf{A}}(A, B) \subseteq \text{hom}_{\mathbf{B}}(A, B)$,
- (iii) pre každý $\mathbf{A}$ -objekt A $\mathbf{B}$ -identita na A je $\mathbf{A}$ -identita na A .
- (iv) skladanie v $\mathbf{A}$ je zúžením skladania v $\mathbf{B}$ na $\mathbf{A}$ -morfizmy.

$\mathbf{A}$ sa nazýva *plná podkategória* $\mathbf{B}$, ak navyše platí pre každé $A, B \in \mathbf{A}$ $\text{hom}_{\mathbf{A}}(A, B) = \text{hom}_{\mathbf{B}}(A, B)$.

Z definície vyplýva, že plná podkategória je úplne určená triedou svojich objektov.

Definícia 5. Kategória sa nazýva *malá*, ak jej trieda objektov je množina.

Definícia 6. Ak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú kategórie, tak *funktor* F z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ je zobrazenie, ktoré priradí každému $\mathbf{A}$ -objektu A $\mathbf{B}$ -objekt $F(A)$ a každému $\mathbf{A}$ -morfizmu $f: A \rightarrow A'$ $\mathbf{B}$ -morfizmus $F(f): F(A) \rightarrow F(A')$, pričom platí:

- (i) F zachováva skladanie, t.j. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,
- (ii) F zachováva identitu, t.j. $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Pod skladaním funktorov rozumieme ich zloženie ako zloženie zobrazení t.j. $G \circ F(A) = G(F(A))$, $G \circ F(f) = G(F(f))$.

Definícia 7. Ak $\mathbf{A}$ je podkategória kategórie $\mathbf{B}$, tak funktor $E: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, taký, že $E(A) = A$ pre ľubovoľný $\mathbf{A}$ -objekt A a $E(f) = f$ pre ľubovoľný $\mathbf{A}$ -morfizmus f sa nazýva *funktor vloženia*.

Niektoré výsledky o reflektívnych podkategóriách, ktorými sa budeme zaoberať, vyplývajú z tvrdení o adjungovaných funktoroch. My však tieto tvrdenia dokážeme bez použitia adjungovaných funktorov, preto tu ani neuvádzame definície pojmov súvisiacich s touto problematikou.

0.1.2 Špeciálne morfizmy

Vo zvyšku kapitoly budeme predpokladať, že pracujeme s nejakou kategóriou $\mathbf{A}$, budeme preto skrátene písať morfizmus namiesto $\mathbf{A}$ -morfizmus, objekt namiesto $\mathbf{A}$ -objekt a pod. Rovnakú dohodu budeme používať všade tam, kde v tvrdení budú vystupovať objekty a morfizmy len z jednej kategórie a od danej kategórie nebudeme požadovať nijaké špeciálne vlastnosti.

Definícia 8. Morfizmus $f: A \rightarrow B$ sa nazýva *monomorfizmus*, ak pre každé dva morfizmy $g, h: B \rightarrow C$ z rovnosti $f \circ g = f \circ h$ vyplýva rovnosť $h = g$.

Duálny pojem: Morfizmus $f: A \rightarrow B$ sa nazýva *epimorfizmus*, ak pre každé dva morfizmy $g, h: B \rightarrow C$ z rovnosti $g \circ f = h \circ f$ vyplýva rovnosť $h = g$.
 f je *bimorfizmus*, ak je monomorfizmus aj epimorfizmus.

Tvrdenie 1. Ak $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú monomorfizmy (epimorfizmy, bimorfizmy), tak $g \circ f$ je monomorfizmus (epimorfizmus, bimorfizmus).

Dôkaz. a) $g \circ f \circ h = g \circ f \circ k \Rightarrow f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$
 b) $h \circ g \circ f = k \circ g \circ f \Rightarrow h \circ g = k \circ g \Rightarrow h = k$
 c) Priamy dôsledok a) a b). □

Tvrdenie 2. Nech $f \circ g$ je monomorfizmus. Potom g je monomorfizmus.

Duálne tvrdenie: Ak $g \circ f$ je epimorfizmus, tak g je epimorfizmus.

Dôkaz. $g \circ h = g \circ k \Rightarrow f \circ g \circ h = f \circ g \circ k \Rightarrow h = k$ □

Definícia 9. Morfizmus $f: A \rightarrow B$ sa nazýva *retrakcia*, ak existuje morfizmus $g: B \rightarrow A$ taký, že $f \circ g = id_B$.

Duálny pojem: Morfizmus $f: A \rightarrow B$ sa nazýva *koretrakcia*, ak existuje morfizmus $g: B \rightarrow A$ taký, že $g \circ f = id_A$.

Morfizmus $f: A \rightarrow B$ je *izomorfizmus*, ak je retrakcia aj koretrakcia.

Bimorfizmus a izomorfizmus sú príklady samoduálnych vlastností.

Tvrdenie 3. Ak $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú retrakcie (koretrakcie, izomorfizmy), tak $g \circ f$ je retrakcia (koretrakcia, izomorfizmus).

Dôkaz. Majme $h: B \rightarrow A$, $k: C \rightarrow B$ také, že $f \circ h = id_B$, $g \circ k = id_C$. Potom $(g \circ f) \circ (h \circ k) = g \circ (f \circ h) \circ k = g \circ id_B \circ k = g \circ k = id_C$. Tým je ukázaná prvá časť tvrdenia. Druhá časť je duálne tvrdenie k prvej a tretia časť vyplýva z prvých dvoch. $\square$

Tvrdenie 4. Nech $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú morfizmy. Ak $g \circ f$ je koretrakcia, tak f je koretrakcia. Ak $g \circ f$ je retrakcia, tak g je retrakcia.

Dôkaz. $g \circ f$ je koretrakcia znamená, že existuje morfizmus h taký, že $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = id_A$, teda aj f je koretrakcia. $\square$

Tvrdenie 5. Každá koretrakcia je monomorfizmus. Každá retrakcia je epimorfizmus.

Dôkaz. Nech $f: A \rightarrow B$ je koretrakcia a $g: B \rightarrow A$ je ľavý inverzný morfizmus k f , t.j. $g \circ f = id_A$. Ak $f \circ h = f \circ k$, tak $h = id_A \circ h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ k = id_A \circ k = k$. Druhá časť tvrdenia vyplýva z duality. $\square$

Lema 1. Ak $f: A \rightarrow B$, $g, h: B \rightarrow A$ sú morfizmy také, že $g \circ f = id_A$ a $f \circ h = id_B$, tak $g = h$.

Dôkaz. $h = id_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ id_B = g$ $\square$

Tvrdenie 6. Morfizmus $f: A \rightarrow B$ je izomorfizmus práve vtedy, keď existuje morfizmus $g: B \rightarrow A$ taký, že $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$. Takýto morfizmus je určený jednoznačne.

Dôkaz. Implikácia $\boxed{\Leftarrow}$ je zrejmá. Implikácia $\boxed{\Rightarrow}$ vyplýva z prechádzajúcej lemy. $\square$

Definícia 10. Ak f je izomorfizmus, tak morfizmus $g: B \rightarrow A$ taký, že $f \circ g = id_B$ a $g \circ f = id_A$ sa nazýva *inverzný morfizmus k f* a označuje sa f^{-1} .

Ako dôsledok predchádzajúceho tvrdenia dostávame:

Tvrdenie 7. Ak f je izomorfizmus, tak aj f^{-1} je izomorfizmus.

Definícia 11. Ak existuje izomorfizmus $f: A \rightarrow B$, tak hovoríme, že objekty A a B sú *izomorfné*, označujeme $A \cong B$.

Z tvrdenia 3, tvrdenia 7 a z toho, že každá identita je izomorfizmus vyplýva, že relácia $\cong$ je relácia ekvivalencie na triede objektov.

Definícia 12. Plná podkategória $\mathbf{A}$ kategórie $\mathbf{B}$ sa nazýva *uzavretá na izomorfizmy*, ak každý $\mathbf{B}$ -objekt, ktorý je izomorfný s nejakým $\mathbf{A}$ -objektom, je $\mathbf{A}$ -objekt.

Definícia 13. Nech $f, g: A \rightarrow B$ sú morfizmy. Morfizmus $e: E \rightarrow A$ sa nazýva *ekvalizátor* f a g , ak sú splnené nasledovné podmienky:

- (i) $f \circ e = g \circ e$,
- (ii) pre ľubovoľný morfizmus $e': E' \rightarrow A$ taký, že $f \circ e' = g \circ e'$ existuje jediný morfizmus $\bar{e}: E' \rightarrow E$ taký, že diagram

$$\begin{array}{ccccc} E' & & & & \\ & \searrow e' & & & \\ \bar{e} \downarrow & & & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \end{array}$$

komutuje, t.j. taký, že $e \circ \bar{e} = e'$.

Ekvalizátor f a g označujeme $e = \text{Eq}(f, g)$.

Duálny pojem: Morfizmus $c: A \rightarrow C$ sa nazýva *koekvalizátor* dvojice morfizmov f a g , ak

- (i) $c \circ f = c \circ g$,
- (ii) pre každý morfizmus c' taký, že $c' \circ f = c' \circ g$ existuje jediný morfizmus $\bar{c}$ taký, že $\bar{c} \circ c = c'$.

Morfizmus $e: E \rightarrow A$ sa nazýva *regulárny monomorfizmus*, ak je ekvalizátor nejakej dvojice morfizmov. Morfizmus $c: A \rightarrow C$ sa nazýva *regulárny epimorfizmus*, ak je koekvalizátor nejakej dvojice morfizmov.

Tvrdenie 8. *Regulárny monomorfizmus je monomorfizmus. (Regulárny epimorfizmus je epimorfizmus.)*

Dôkaz. Nech $f = \text{Eq}(r, s)$. Nech $f \circ g = f \circ h$. Potom $r \circ (f \circ g) = s \circ (f \circ g)$ a podľa definície existuje jediný morfizmus h taký, že $f \circ g = f \circ h$, teda $g = h$. $\square$

Definícia 14. Monomorfizmus m sa nazýva *extrémny monomorfizmus*, ak spĺňa nasledovnú podmienku: Ak $m = f \circ e$, kde e je epimorfizmus, tak e je izomorfizmus.

Duálny pojem: Epimorfizmus e sa nazýva *extrémny epimorfizmus*, ak spĺňa nasledovnú podmienku: Ak $e = m \circ f$, kde m je monomorfizmus, tak m je izomorfizmus.

Tvrdenie 9. *Ak $g \circ f$ je extrémny monomorfizmus, tak f je extrémny monomorfizmus.*

Ak $g \circ f$ je extrémny epimorfizmus, tak g je extrémny epimorfizmus.

Dôkaz. Z tvrdenia 2 vieme, že f je monomorfizmus. Nech $f = h \circ e$ a e je epimorfizmus. Potom $g \circ f = g \circ h \circ e$, ale $g \circ f$ je extrémny monomorfizmus, a teda e je izomorfizmus.

Druhá časť tvrdenia je duálna k prvej. $\square$

Tvrdenie 10. Ak $f: X \rightarrow Y$ je morfizmus, tak každá z uvedených podmienok implikuje nasledujúcu:

- (i) f je izomorfizmus
- (ii) f je koretrakcia
- (iii) f je regulárny monomorfizmus
- (iv) f je extrémny monomorfizmus
- (v) f je monomorfizmus.

(Duálne tvrdenie: f je izomorfizmus $\Rightarrow$ retrakcia $\Rightarrow$ regulárny epimorfizmus $\Rightarrow$ extrémny epimorfizmus $\Rightarrow$ epimorfizmus.)

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) vyplýva priamo z definície.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ak $g \circ f = id_A$ ukážeme, že $f = Eq(id_B, f \circ g)$. Platí $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ id_A = f = id_B \circ f$. Ak $(f \circ g) \circ h = h$, tak $h = f \circ (g \circ h)$ a takýto morfizmus existuje jediný, lebo f je monomorfizmus.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Nech $f = Eq(r, s)$ a $f = g \circ e$, pričom e je epimorfizmus. Platí: $(r \circ g) \circ e = r \circ (g \circ e) = r \circ f = s \circ f = s \circ (g \circ e) = (s \circ g) \circ e$, a teda aj $r \circ g = s \circ g$ (lebo e je epimorfizmus). Podľa univerzálnej vlastnosti v definícii ekvalizátora musí potom existovať jediný morfizmus e' taký, že $g = f \circ e'$. Máme potom $f \circ id_A = f = g \circ e = f \circ e' \circ e$ a f je monomorfizmus, čiže $e' \circ e = id_A$, t.j. e je koretrakcia. Ďalej $id_E \circ e = e = e \circ id_A = e \circ (e' \circ e) = (e \circ e') \circ e$ a e je epimorfizmus, čiže $id_E = e \circ e'$, t.j. e je koretrakcia. e je retrakcia aj koretrakcia, teda e je izomorfizmus.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Vyplýva priamo z definície. $\square$

Tvrdenie 11. Nech $f: A \rightarrow B$ je morfizmus. Nasledovné podmienky sú potom ekvivalentné:

- (i) f je izomorfizmus
- (ii) f je epimorfizmus a koretrakcia
- (iii) f je epimorfizmus a extrémny monomorfizmus
- (iv) f je monomorfizmus a retrakcia
- (v) f je monomorfizmus a extrémny epimorfizmus.

Dôkaz. Vďaka dualite stačí dokazovať len ekvivalenciu prvých troch podmienok.

(i) $\Rightarrow$ (ii) vyplýva priamo z definície a (ii) $\Rightarrow$ (iii) z predchádzajúceho tvrdenia. (iii) $\Rightarrow$ (i): $f = id_B \circ f$ a f je epimorfizmus a extrémny monomorfizmus znamená, že f je izomorfizmus. $\square$

Definícia 15. Usporiadaná dvojica (M, m) , kde $m: M \rightarrow A$ je monomorfizmus sa nazýva *podobjekt* objektu A .

Usporiadaná dvojica (M, m) , kde $m: M \rightarrow A$ je extrémny monomorfizmus sa nazýva *extrémny podobjekt* objektu A .

Usporiadaná dvojica (k, K) , kde $k: A \rightarrow K$ je epimorfizmus sa nazýva *kvocient* objektu A .

Usporiadaná dvojica (k, K) , kde $k: A \rightarrow K$ je extrémny epimorfizmus sa nazýva *extrémny kvocient* objektu A .

Definícia 16. Kategória sa nazýva *lokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina podobjektov (M_i, m_i) , $i \in I$ taká, že pre každý podobjekt (M, m) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f: M_i \rightarrow M$ taký, že $m_i = m \circ f$.

Kategória sa nazýva *extrémne lokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina extrémnych podobjektov (M_i, m_i) , $i \in I$ taká, že pre každý extrémny podobjekt (M, m) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f: M_i \rightarrow M$ taký, že $m_i = m \circ f$.

Kategória sa nazýva *kolokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina kvocientov (k_i, K_i) , $i \in I$ taká, že pre každý kvocient (k, K) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f: M_i \rightarrow M$ taký, že $k_i = k \circ f$.

Kategória sa nazýva *extrémne kolokálne malá*, ak pre každý jej objekt A existuje množina extrémnych kvocientov (k_i, K_i) , $i \in I$ taká, že pre každý extrémny kvocient (k, K) objektu A existuje $i \in I$ a izomorfizmus $f: M_i \rightarrow M$ taký, že $k_i = k \circ f$.

Definícia 17. Morfizmus $f: A \rightarrow B$ sa nazýva *konštantný*, ak pre každé dva morfizmy $g, h: C \rightarrow A$ platí $k \circ g = k \circ h$. f je *kokonštantný*, ak pre každé dva morfizmy $g, h: B \rightarrow C$ platí $g \circ h = g \circ k$.

Morfizmus, ktorý je konštantný aj kokonštantný sa nazýva *nulový morfizmus*.

0.1.3 Špeciálne objekty

Definícia 18. Objekt I sa nazýva *iniciálny* objekt, ak pre každý objekt A existuje práve jeden morfizmus $f: I \rightarrow A$.

Duálny pojem: Objekt T sa nazýva *terminálny* objekt, ak pre každý objekt A existuje práve jeden morfizmus $f: A \rightarrow T$.

Objekt, ktorý je iniciálny aj terminálny, sa nazýva *nulový objekt*.

Definícia 19. Objekt S sa nazýva *separátor (generátor)*, ak pre každé dva rôzne morfizmy $f, g: A \rightarrow B$ existuje morfizmus $h: S \rightarrow A$ taký, že $f \circ h \neq g \circ h$.

Objekt C sa nazýva *koseparátor*, ak pre každé dva rôzne morfizmy $f, g: A \rightarrow B$ existuje morfizmus $h: B \rightarrow C$ taký, že $h \circ f \neq h \circ g$.

0.1.4 Limity a kolimity

Definícia 20. *Zdroj* je dvojica $(A, (f_i)_{i \in I})$, kde A je objekt a $f_i: A \rightarrow A_i$ sú morfizmy.

Ústie je dvojica $((f_i)_{i \in I}, A)$, kde A je objekt a $f_i: A \rightarrow A_i$ sú morfizmy.

Ak $\mathcal{S} = (A, (f_i)_{i \in I})$ je zdroj a $f: B \rightarrow A$ je morfizmus, tak označíme zdroj $(B, (f_i \circ f)_{i \in I}) = \mathcal{S} \circ f$. Podobne pre ústia používame značenie $f \circ \mathcal{S} = ((f \circ f_i)_{i \in I}, B)$, ak $\mathcal{S} = ((f_i)_{i \in I}, A)$ je ústie a $f: A \rightarrow B$ je morfizmus.

Definícia 21. Zdroj $\mathcal{S} = (A, (f_i)_{i \in I})$ sa nazýva *monozdroj*, ak pre každú dvojicu morfizmov $r, s: B \rightarrow A$ z rovnosti $\mathcal{S} \circ r = \mathcal{S} \circ s$ vyplýva rovnosť $r = s$.

Ústie $\mathcal{S} = ((f_i)_{i \in I}, A)$ sa nazýva *epiústie*, ak pre každú dvojicu morfizmov $r, s: A \rightarrow B$ z rovnosti $r \circ \mathcal{S} = s \circ \mathcal{S}$ vyplýva rovnosť $r = s$.

Monozdroj sa nazýva *extrémny monozdroj*, ak platí: Ak $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}} \circ e$ pre nejaký epimorfizmus e , tak e je izomorfizmus.

Epiústie sa nazýva *extrémne epiústie*, ak platí: Ak $\mathcal{S} = m \circ \overline{\mathcal{S}}$ pre nejaký monomorfizmus m , tak m je izomorfizmus.

Definícia 22. *Diagram* v kategórii $\mathbf{A}$ je funktor $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$. $\mathbf{I}$ sa nazýva *schéma* diagramu. Diagram s malou (konečnou) schémou sa nazýva *malý (konečný) diagram*.

Pre diagramy zvykneme písať D_i namiesto $D(i)$.

Definícia 23. Nech $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$ je diagram.

$\mathbf{A}$ -zdroj $(A, (f_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})})$ ($f_i: A \rightarrow D_i$) sa nazýva *prirodzený zdroj* pre D , ak pre každý $\mathbf{I}$ -morfizmus $d: i \rightarrow j$ komutuje diagram:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ D_i & \xrightarrow{Dd} & D_j \end{array}$$

Prirodzený $\mathbf{A}$ -zdroj $(L, (l_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})})$ sa nazýva *limita* D , ak má univerzálnu vlastnosť, že pre každý prirodzený zdroj $(A, (f_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})})$ pre D existuje jediný morfizmus $f: A \rightarrow L$ taký, že $f_i = l_i \circ f$ pre všetky $i \in \text{Ob}(\mathbf{I})$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & L \\ f_i \searrow & & \swarrow l_i \\ & D_i & \end{array}$$

$\mathbf{A}$ -ústie $((f_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}, A)$ sa nazýva *prirodzené ústie* pre D , ak pre každý $\mathbf{I}$ -morfizmus $d: i \rightarrow j$ komutuje diagram:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{Dd} & D_j \\ f_i \searrow & & \swarrow f_j \\ & A & \end{array}$$

Prirodzené ústie $((c_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}, C)$ pre D sa nazýva *kolimita* D , ak pre každé prirodzené ústie $((f_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}, A)$ pre D existuje jediný morfizmus $f: C \rightarrow A$

taký, že $f_i = f \circ c_i$ pre každé $i \in \text{Ob}(\mathbf{I})$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & C \\ & \nwarrow f_i \quad \nearrow c_i & \\ & D_i & \end{array}$$

Tvrdenie 12. Každá limita je extrémny monozdroj. Každá kolimita je extrémne epiústie.

Dôkaz. Nech $\mathcal{S} \circ r = \mathcal{S} \circ s$. $\mathcal{S} \circ r$ je tiež ústie, podľa definície limity teda existuje jediný morfizmus s taký, že $\mathcal{S} \circ r = \mathcal{S} \circ s$, teda $r = s$.

Nech $\mathcal{L} = \mathcal{S} \circ e$ a e je epimorfizmus. Podľa definície limity existuje h také, že pre každé $i \in \text{Ob}(\mathbf{I})$ $l_i \circ h = s_i$. Potom $l_i \circ h \circ e = s_i \circ e = l_i = l_i \circ id_L$. V prvej časti dôkazu sme už ukázali, že limita je monozdroj, z čoho vyplýva $h \circ e = id_L$. Keďže e je epimorfizmus a koretrakcia, podľa tvrdenia 11 je izomorfizmus.

Druhá časť tvrdenia je duálna k prvej. $\square$

Tvrdenie 13 (Jednoznačnosť limity). Ak $\mathcal{L} = (l_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}$, $l_i: L \rightarrow D_i$ je limita diagramu $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$, tak

- (i) pre každú limitu $\mathcal{K} = (k_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}$, $k_i: K \rightarrow D_i$, diagramu D existuje izomorfizmus $h: K \rightarrow L$ taký, že $\mathcal{K} = \mathcal{L} \circ h$,
- (ii) pre každý izomorfizmus $h: A \rightarrow L$ je zdroj $\mathcal{L} \circ h$ limita diagramu D .

Dôkaz. (i) Z definície limity vieme, že existuje jediný morfizmus h taký, že $\mathcal{K} = \mathcal{L} \circ h$. Keďže $\mathcal{K}$ je tiež limita, súčasne existuje jediný morfizmus h' taký, že $\mathcal{L} = \mathcal{K} \circ h'$. Keďže $\mathcal{K} \circ h' \circ h = \mathcal{L} \circ h = \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ id_K$ a $\mathcal{K}$ je podľa predchádzajúceho tvrdenia monozdroj, tak $h' \circ h = id_K$. Analogicky sa ukáže aj $h \circ h' = id_L$, čo znamená, že h je izomorfizmus.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightleftharpoons{h} & L \\ & \nwarrow h' \quad \nearrow h_i & \\ & D_i & \end{array}$$

(ii) Pretože $\mathcal{L}$ je prirodzený zdroj, aj $\mathcal{L} \circ h$ je prirodzený zdroj vzhľadom na D . Označme jeho morfizmy $l'_i = h \circ l_i: L' \rightarrow D$. Ak $\mathcal{K}$ je prirodzený zdroj vzhľadom na D , tak existuje jediný morfizmus $k: K \rightarrow L'$ taký, že $\mathcal{K} = \mathcal{L}' \circ k$. Potom $h^{-1} \circ k: K \rightarrow L$ je morfizmus taký, že $\mathcal{K} = \mathcal{L} \circ (h^{-1} \circ k)$. Jednoznačnosť vyplýva z toho, že $\mathcal{L}' = h \circ \mathcal{L}$ je monozdroj. Ak totiž $r \circ h \circ \mathcal{L} = s \circ h \circ \mathcal{L}$, tak $r \circ h = s \circ h$, a pretože každý izomorfizmus je monomorfizmus, potom aj $r = s$. $\square$

Súčin a kosúčin

Definícia 24. Ústie $\mathcal{P} = (p_i: P \rightarrow A_i)_{i \in I}$ sa nazýva *súčin* ak pre každé ústie $\mathcal{S} = (f_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ existuje jediný morfizmus $f: A \rightarrow P$ taký, že $\mathcal{S} = \mathcal{P} \circ f$.

Príklad 4. V **Set** je súčinom ľubovoľného systému množín ich kartézsky súčin, projekcie sú projekcie na zložky $p_j: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$.

Súčin môžeme interpretovať ako limitu funktora z diskkrétnej kategórie (t.j. schéma diagramu je kategória, ktorá okrem identít neobsahuje žiadne iné morfizmy).

Z tvrdenia o jednoznačnosti limity potom vyplýva, že súčin je jednoznačne (až na izomorfizmus) určený objektami A_i .

Súčin systému objektov $(A_i)_{i \in I}$ označujeme $\prod_{i \in I} A_i$, morfizmy $p_j: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ sa nazývajú *projekcie*. Pre súčin konečného systému používame tiež značenie $A_1 \times \dots \times A_k$, resp. $A \times B$.

Ak $(\prod A_i, p_i: \prod A_i \rightarrow A_i)_{i \in I}$ je súčin a $(A, f_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ je ústie, tak podľa definície súčinu existuje jediný morfizmus $f: A \rightarrow \prod A_i$ taký, že $f_j = p_j \circ f$ pre všetky $j \in I$. Tento morfizmus značíme $\langle f_i \rangle$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\langle f_i \rangle} & \prod A_i \\ & \searrow f_j & \downarrow p_j \\ & & A_j \end{array}$$

V prípade, že množina I je konečná, používame tiež značenie $\langle f_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$.

Tvrdenie 14. Ak $(p_i: P \rightarrow A_i)_{i \in I}$ je súčin a $i_0 \in I$ je také, že pre všetky $i \in I$ platí $\text{hom}(A_{i_0}, A_i) \neq \emptyset$, tak p_{i_0} je retrakcia.

Dôkaz. Pre každé $i \in I$ vyberme $f_i \in \text{hom}(A_{i_0}, A_i)$, pričom $f_{i_0} = \text{id}_{A_{i_0}}$. Potom $\langle f_i \rangle: A_{i_0} \rightarrow P$ je morfizmus s vlastnosťou $p_{i_0} \circ \langle f_i \rangle = f_{i_0} = \text{id}_{A_{i_0}}$. $\square$

Definícia 25. Hovoríme, že kategória *má súčiny*, ak pre každý systém objektov $(A_i)_{i \in I}$ (I je množina) existuje súčin $(\prod A_i, p_j: \prod A_i \rightarrow A_j)_{j \in I}$.

Definícia 26. Ak $f_i: A_i \rightarrow B_i$ sú morfizmy a $(\prod A_i, \pi_j: \prod A_i \rightarrow A_j)_{j \in I}$, $(\prod B_i, p_j: \prod B_i \rightarrow B_j)_{j \in I}$ sú súčiny, tak podľa definície súčinu existuje jediný morfizmus f taký, že diagram

$$\begin{array}{ccc} \prod A_i & \xrightarrow{f = \prod f_i} & \prod B_i \\ \pi_j \downarrow & & \downarrow p_j \\ A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j \end{array}$$

komutuje pre každé $j \in I$. Potom f označujeme $\prod_{i \in I} f_i$ a nazývame *súčinom* systému morfizmov $(f_i)_{i \in I}$. Ak I je konečná, používame tiež označenie $f_1 \times \dots \times f_n$.

Lema 2. $\prod_{i \in I} g_i \circ \prod_{i \in I} f_i = \prod_{i \in I} (g_i \circ f_i)$

Dôkaz. Nech $f_i: A_i \rightarrow B_i$, $g_i: B_i \rightarrow C_i$, projekcie označme $p_{A_i}, p_{B_i}, p_{C_i}$. Potom platí $p_{C_j} \circ \prod (g_i \circ f_i) = g_j \circ f_j \circ p_{A_j} = g_j \circ p_{B_j} \circ \prod f_i = p_{C_j} \circ \prod g_i \circ \prod f_i$. Priamo z definície súčiny (alebo z toho, že súčin je limita, a teda monozdroj) už potom vyplýva, že $\prod (g_i \circ f_i) = \prod g_i \circ \prod f_i$.

$$\begin{array}{ccccc} \prod A_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod B_i & \xrightarrow{\prod g_i} & \prod C_i \\ p_{A_j} \downarrow & & p_{B_j} \downarrow & & p_{C_j} \downarrow \\ A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j & \xrightarrow{g_j} & C \end{array}$$

□

Dôsledok 1. $\prod id_{A_i} = id_{\prod A_i}$.

Dôkaz. $p_j \circ \prod id_{A_i} = id_{A_j} \circ p_j = p_j = p_j \circ id_{\prod A_j}$ pre všetky $j \in I$. Keďže produkt je monozdroj, tak z toho dostaneme $\prod id_{A_i} = id_{\prod A_i}$. □

Tvrdenie 15. (i) Ak f_i je retrakcia pre každé $i \in I$, tak $\prod f_i$ je retrakcia. (Súčin retrakcií je retrakcia).

(ii) Ak f_i je koretrakcia pre každé $i \in I$, tak $\prod f_i$ je koretrakcia. (Súčin koretrakcií je koretrakcia).

(iii) Ak f_i je izomorfizmus pre každé $i \in I$, tak $\prod f_i$ je izomorfizmus. (Súčin izomorfizmov je izomorfizmus).

(iv) Ak f_i je monomorfizmus pre každé $i \in I$, tak $\prod f_i$ je monomorfizmus. (Súčin monomorfizmov je monomorfizmus).

Dôkaz. (i): Ak $f_j \circ g_j = id_{A_j}$, tak podľa predchádzajúcej lemy a dôsledku $\prod f_j \circ \prod g_j = id_{\prod A_j}$. (ii) sa ukáže úplne analogicky ako (i) a (iii) vyplýva z (i) a (ii).

(iv): Označme $m = \prod m_i$. Nech $f, g: C \rightarrow \prod A_i$ sú také, že $m \circ f = m \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow[f]{g} & \prod A_i \xrightarrow{m=\prod m_i} \prod B_i \\ & & p_j \downarrow \qquad \qquad \downarrow q_j \\ & & A_j \xrightarrow{m_j} B_j \end{array}$$

Potom $m_j \circ p_j \circ f = q_j \circ m = f = q_j \circ m \circ g = m_j \circ p_j \circ g$. Pretože m je monomorfizmus, tak potom $p_j \circ f = p_j \circ g$. Vďaka tomu, že súčin je monozdroj, vyplýva z toho $f = g$. □

Lema 3. Nech $\mathbf{A}$ má súčiny. Nech I je množina a $e_i: E_i \rightarrow A_i$ je $\mathbf{A}$ -ekvalizátor $f_i, g_i: A_i \rightarrow B_i$ pre každé $i \in I$. Potom $\prod e_i: \prod A_i \rightarrow \prod B_i$ je ekvalizátor $\prod f_i, \prod g_i: \prod A_i \rightarrow \prod B_i$.

Dôkaz.

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod E_i & \xrightarrow{\prod e_i} & \prod A_i & \xrightarrow[\prod g_i]{\prod f_i} & \prod B_i \\
 \pi_j \downarrow & & \downarrow p_j & & \downarrow q_j \\
 E_j & \xrightarrow{e_j} & A_j & \xrightarrow[g_j]{f_j} & B_j
 \end{array}$$

Súčin je limita, a teda monozdroj. Preto z $q_j \circ \prod f_i \circ \prod e_i = f_j \circ e_j = q_j \circ e_j = q_j \circ \prod g_i \circ \prod e_i$ pre všetky $j \in I$ dostaneme, že $\prod f_i \circ \prod e_i = \prod g_i \circ \prod e_i$.

Nech $h: E \rightarrow \prod A_i$ je morfizmus taký, že $\prod f_i \circ h = \prod g_i \circ h$. Potom $f_j \circ p_j \circ h = g_j \circ p_j \circ h$ pre všetky $j \in I$. Preto pre každé $j \in I$ existuje morfizmus h_j taký, že $p_j \circ h = e_j \circ h_j$ (využili sme, že (E_j, e_j) je ekvalizátor.) Potom pre $\langle f_i \rangle: E \rightarrow \prod E_i$ platí $p_j \circ \prod e_i \circ \langle h_i \rangle = e_j \circ \pi_j \circ \langle h_j \rangle = e_j \circ h_j = p_j \circ h$, teda $\prod e_i \circ \langle h_i \rangle = h$. Jednoznačnosť takéhoto morfizmu vyplýva z toho, že $\prod e_i$ je monomorfizmus (predchádzajúce tvrdenie).

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod E_i & \xrightarrow{\prod e_i} & \prod A_i & \xrightarrow[\prod g_i]{\prod f_i} & \prod B_i \\
 \pi_j \downarrow & \swarrow \langle h_i \rangle & \downarrow p_j & & \downarrow q_j \\
 & E & & & \\
 & \swarrow h_j & & & \\
 E_j & \xrightarrow{e_j} & A_j & \xrightarrow[g_j]{f_j} & B_j
 \end{array}$$

□

Z tejto lemy ľahko vyplýva, že:

Tvrdenie 16. V kategórii, ktorá má súčiny platí, že ak f_i je regulárny monomorfizmus pre každé $i \in I$, tak $\prod f_i$ je regulárny monomorfizmus. (Súčin regulárnych monomorfizmov je regulárny monomorfizmus).

Duálny pojem k súčinu je kosúčin.

Definícia 27. Zdroj $\mathcal{P} = (p_i: A_i \rightarrow P)_{i \in I}$ sa nazýva *kosúčin* ak pre každé ústie $\mathcal{S} = (f_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ existuje jediný morfizmus $f: P \rightarrow A$ taký, že $\mathcal{S} = f \circ \mathcal{P}$.

Pre kosúčin platia duálne tvrdenia ako pre súčin. Prehľad označení používaných pre kosúčin je v tabuľke

súčin	kosúčin
$(\prod A_i, p_j)$	$(i_j, \coprod A_i)$
projekcia p_j	injekcia i_j
$A \times B$	$A \sqcup B$
$\langle f_i \rangle$	$[f_i]$
$f \times g$	$f \sqcup g$
$\prod f_i$	$\coprod f_i$

Pushout a pullback**Definícia 28.** Diagram

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{f} & A \\
g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\
B & \xrightarrow{\bar{f}} & P
\end{array}$$

sa nazýva *pushout*, ak komutuje a pre každý komutujúci diagram tvaru

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{f} & A \\
g \downarrow & & \downarrow \hat{g} \\
B & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{P}
\end{array}$$

existuje jediný morfizmus $k: P \rightarrow \hat{P}$ taký, že komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{f} & A \\
g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\
B & \xrightarrow{\bar{f}} & P
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow \hat{g} \\
\searrow k \\
\searrow \hat{f}
\end{array}
\hat{P}$$

Duálny pojem k pushoutu je pullback:

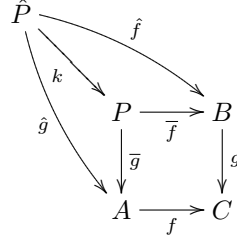
Definícia 29. Diagram

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\
\bar{g} \downarrow & & \downarrow g \\
A & \xrightarrow{f} & C
\end{array}$$

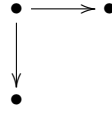
sa nazýva *pullback*, ak komutuje a pre každý komutujúci diagram tvaru

$$\begin{array}{ccc}
\hat{P} & \xrightarrow{\hat{f}} & B \\
\hat{g} \downarrow & & \downarrow g \\
A & \xrightarrow{f} & C
\end{array}$$

existuje jediný morfizmus $k: \hat{P} \rightarrow P$ taký, že komutuje diagram



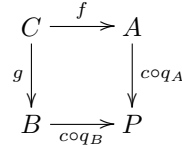
Pushout je kolimita diagramu



Pullback je limita duálneho diagramu.

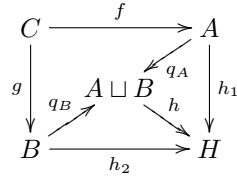
Niektoré tvrdenia budeme formulovať pre pushout a niektoré pre pullback, vždy samozrejme platí aj duálne tvrdenie.

Tvrdenie 17 (Kanonickej konštrukcia pushoutu). *Nech $f: C \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ sú morfizmy, $A \sqcup B$ je kosúčn s injekciami $q_A: A \rightarrow A \sqcup B$, $q_B: B \rightarrow A \sqcup B$. Nech $c: A \sqcup B \rightarrow P$ je $c = \text{Coeq}(q_A \circ f, q_B \circ g)$. Potom*



je pushout.

Dôkaz.



Nech $h_1: A \rightarrow H$, $h_2: B \rightarrow H$ a $h_2 \circ g = h_1 \circ f$ a $h = [h_1, h_2]: A \sqcup B \rightarrow H$. Pre h platí $h \circ q_A \circ f = h_1 \circ f = h_2 \circ g = h \circ q_B \circ g$ a z definície koekvalizátora máme, že existuje morfizmus $k: P \rightarrow H$ taký, že $h = k \circ c$. Jednoznačnosť existencie takéhoto morfizmu vyplýva z toho, že $c \circ q_A$, $c \circ q_B$ ako zloženie epiústí je epiústie. $\square$

Tvrdenie 18 (Konštrukcia ekvalizátorov pomocou súčinov a pullbackov). Ak $f, g: A \rightarrow B$ sú morfizmy, $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ je súčin A a B , a

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow id_A \times f \\ A & \xrightarrow{id_A \times g} & A \times B \end{array}$$

je pullback, tak $p_1 = p_2$ je ekvalizátor f a g .

Dôkaz. Pretože $(id_A \times f) \circ p_1 = (id_A \times g) \circ p_2$, máme

$$p_1 = \pi_A \circ (id_A \times f) \circ p_1 = \pi_A \circ (id_A \times g) \circ p_2 = p_2.$$

Nech $k: K \rightarrow A$ je morfizmus taký, že $f \circ k = g \circ k$. Potom

$$\pi_B \circ (id_A \times f) \circ k = \pi_B \circ (id_A \times g) \circ k \text{ a}$$

$$\pi_A \circ (id_A \times f) \circ k = \pi_A \circ (id_A \times g) \circ k.$$

Pretože súčin je monozdroj, dostaneme $(id_A \times f) \circ k = (id_B \times f) \circ k$, a pretože uvedený diagram je pullback, existuje jediné $h: K \rightarrow P$ také, že $k = p_1 \circ h$. $\square$

Definícia 30. Trieda morfizmov $\mathcal{M}$ sa nazýva uzavretá na tvorbu pullbackov, ak pre každý pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\ \bar{g} \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array},$$

ak $f \in \mathcal{M}$, tak aj $\bar{f} \in \mathcal{M}$.

Tvrdenie 19. Monomorfizmy, regulárne monomorfizmy a retrakcie sú uzavreté na tvorbu pullbackov.

Dôkaz. Nech f je monomorfizmus a predchádzajúci diagram je pullback.

(i) Nech $h, k: Q \rightarrow P$ sú morfizmy také, že $\bar{f} \circ h = \bar{f} \circ k$, tak $\bar{g} \circ h = \bar{g} \circ k$. Pretože pullback je monozdroj, vyplýva z toho už $h = k$.

(ii) Nech f je ekvalizátor p a q . Potom $(p \circ g) \circ \bar{f} = (q \circ g) \circ \bar{f}$. Chceme ukázať, že $\bar{f}$ je ekvalizátor $p \circ g$ a $q \circ g$. Nech $t: Q \rightarrow B$ je morfizmus taký, že $(p \circ g) \circ t = (q \circ g) \circ t$. Potom podľa definície ekvalizátora existuje nejaké $u: Q \rightarrow A$ také, že $f \circ u = g \circ t$. Potom podľa definície pullbacku existuje nejaké $h: Q \rightarrow P$ také, že $t = \bar{f} \circ h$. Jednoznačnosť h vyplýva z toho, že $\bar{f}$ je monomorfizmus.

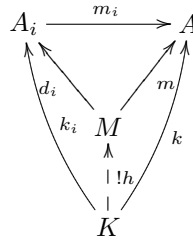
(iii) Ak f je retrakcia, tak existuje nejaké $s: C \rightarrow A$ také, že $f \circ s = id_C$. Potom $f \circ (s \circ g) = g \circ id_B$ a podľa definície pullbacku existuje nejaké $h: B \rightarrow P$ také, že $id_B = \bar{f} \circ h$. $\square$

Prieniky a koprieniky

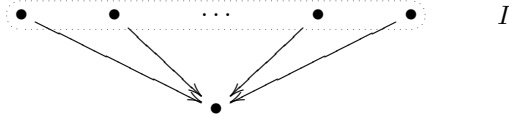
Definícia 31. Nech $(A_i, m_i)_{i \in I}$ je systém podobjektov objektu A . Potom usporiadaná dvojica (M, m) , kde $m: M \rightarrow A$ je morfizmus, sa nazýva *prienikom* systému $(A_i, m_i)_{i \in I}$, ak

- (i) pre každé $i \in I$ existuje $d_i: M \rightarrow A_i$ tak, že $m_i \circ d_i = m$,
- (ii) pre ľubovoľnú usporiadanú dvojicu (K, k) , kde $k: K \rightarrow A$ je morfizmus taký, že pre každé $i \in I$ existuje morfizmus $k_i: K \rightarrow A_i$ a $m_i \circ k_i = k$, existuje práve jeden morfizmus $h: K \rightarrow M$ taký, že $m \circ h = k$.

Označujeme $(M, m) = \bigcap_{i \in I} (A_i, m_i)$.



Prienik možno interpretovať ako limitu diagramu $A_i \xrightarrow{m_i} A$.



Tvrdenie 20. Ak $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$ sú podobjektu B , tak prienik je diagonálny morfizmus pullbacku $A_1 \xrightarrow{m_1} B \xleftarrow{m_2} A_2$.

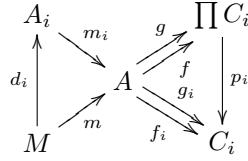
Dôkaz. Vyplýva priamo z definície. □

Veta 2. Ak $(M, m) = \bigcap_{i \in I} (A_i, m_i)$, $m_i: A_i \rightarrow A$, tak (M, m) je podobjekt A .

Ak (A_i, m_i) sú regulárne podobjektu a kategória $\mathbf{A}$ má súčiny, tak aj (M, m) je regulárny podobjekt A .

Dôkaz. Keďže prienik sme interpretovali ako limitu, tak $(M, (d_i)_{i \in I}, m)$ je monozdroj. $m \circ r = m \circ s \Rightarrow m_i \circ d_i \circ r = m_i \circ d_i \circ s \Rightarrow d_i \circ r = d_i \circ s$. Keď platí $m \circ r = m \circ s$, $d_i \circ r = d_i \circ s$ tak aj $r = s$ (vďaka tomu, že prienik je monozdroj).

Nech $m_i = \text{Eq}(f_i, g_i)$, $f_i, g_i: A \rightarrow C_i$. $\prod C_i$ nech je súčin a $p_i: \prod C_i \rightarrow C_i$ projekcie. Označme $f = \langle f_i \rangle: A \rightarrow \prod C_i$, $g = \langle g_i \rangle: A \rightarrow \prod C_i$. Tvrďme, že $m = \text{Eq}(f, g)$.



$p_i \circ f \circ m = p_i \circ m_i \circ d_i = f_i \circ m_i \circ d_i = g_i \circ m_i \circ d_i = p_i \circ g \circ m_i \circ d_i = p_i \circ g \circ m$
 $\Rightarrow f \circ m = g \circ m$ (lebo súčin je extrémny monozdroj).

Nech $t: C \rightarrow A$ je morfizmus taký, že $f \circ t = g \circ t$. Potom $p_i \circ f \circ t = p_i \circ g \circ t$ t.j. $f_i \circ t = g_i \circ t$ pre všetky i . Pretože m_i je ekvalizátor f_i a g_i , tak pre každé $i \in I$ existuje jediný morfizmus $c_i: C \rightarrow A_i$ taký, že $m_i \circ c_i = t$. Podľa definície prieniku potom existuje jediný morfizmus $h: C \rightarrow D$ taký, že $m \circ h = t$. $\square$

Duálny pojem k prieniku sa nazýva koprienik.

Ďalšie limity Ekvalizátor dvojice morfizmov môžeme interpretovať ako limitu diagramu so schémou $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Terminálny objekt možno chápať ako limitu prázdneho diagramu.

Definícia 32. *Usmernená kolimita* (nazývaná tiež induktívna limita) je kolimita diagramu, ktorého schéma je nahor usmernená množina interpretovaná ako kategória (príklad 3).

0.1.5 Úplnosť a kouplnosť

Definícia 33. Hovoríme, že kategória $\mathbf{A}$

- (i) *má súčiny*, ak pre každý systém (indexovaný množinou) $\mathbf{A}$ -objektov existuje súčin v $\mathbf{A}$.
- (ii) *má konečné súčiny*, ak pre každý konečný systém $\mathbf{A}$ -objektov existuje súčin v $\mathbf{A}$.
- (iii) *má ekvalizátory*, ak pre každú dvojicu morfizmov s rovnakým oborom a kooborom existuje ekvalizátor v $\mathbf{A}$.
- (iv) *má pullbacky*, ak pre každú dvojicu morfizmov s rovnakým kooborom existuje pullback v $\mathbf{A}$.
- (v) *má prieniky*, ak pre každý $\mathbf{A}$ -objekt A a každý systém jeho podobjektov existuje prienik.
- (vi) *má konečné prieniky*, ak pre každý $\mathbf{A}$ -objekt A a každý konečný systém jeho podobjektov existuje prienik.

Duálne pojmy: Kat $\mathbf{A}$ má (konečné) *kosúčiny*, *koekvalizátory*, *pushouty*, (konečné) *prieniky*.

Definícia 34. Kategória $\mathbf{A}$ sa nazýva *úplná*, ak pre každý malý diagram (t.j. taký, ktorého schéma je malá kategória) existuje v $\mathbf{A}$ limita.

Dôkaz ďalšej vety je súčasne dôkazom, že ľubovoľnú limitu možno zostrojiť pomocou súčinov a ekvalizátorov (a duálne ľubovoľnú kolimitu pomocou kosúčinov a koekvalizátorov).

Veta 3. Pre kategóriu $\mathbf{A}$ sú nasledovné podmienky ekvivalentné:

- (i) $\mathbf{A}$ je úplná,
- (ii) $\mathbf{A}$ má súčiny a ekvalizátory,
- (iii) $\mathbf{A}$ má súčiny a konečné prieniky.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (iii) vyplýva z toho, že súčiny a prieniky sú limity malých diagramov.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) vyplýva z tvrdenia 18 a tvrdenia 20.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nech kategória $\mathbf{A}$ má súčiny a ekvalizátory, a nech $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$ je malý diagram. Pre každý $\mathbf{I}$ -morfizmus $t: i \rightarrow j$ položíme $d(t) = i$ a $c(t) = j$. Nech $\prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i$ a $\prod_{t \in \text{Mor}(\mathbf{A})} D_{c(t)}$ sú súčiny s projekciami $\pi_j: \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i \rightarrow D_j$, $\hat{\pi}: \prod_{t \in \text{Mor}(\mathbf{I})} D_{c(t)} \rightarrow D_{c(s)}$. Pre každé $t \in \text{Mor}(\mathbf{I})$ máme teda dvojicu morfismov $\pi_{c(t)}, D_t \circ \pi_{d(t)}: \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i \rightarrow D_{c(t)}$, môžeme teda definovať dvojicu morfismov $f = \langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle, g = \langle \pi_{c(t)} \rangle, f, g: \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i \rightarrow \prod_{t \in \text{Mor}(\mathbf{I})} D_{c(t)}$. Nech $e: E \rightarrow \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i$ je ekvalizátor tejto dvojice a pre každé $i \in \text{Ob}(\mathbf{I})$ $e_i = \pi_i \circ e$. Tvrdíme, že $(E, e_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}$ je limita diagramu D v $\mathbf{A}$.

Najprv overme, že je to prirodzený zdroj pre D . Nech $s: i \rightarrow j$ je $\mathbf{I}$ -morfizmus. ■ Potom $e_j = \pi_j \circ e = \pi_{c(s)} \circ e = \hat{\pi}_s \circ \langle \pi_{c(t)} \rangle \circ e = \hat{\pi}_s \circ \langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle \circ e = D_s \circ \pi_{d(s)} \circ e = D_s \circ \pi_i \circ e = D_s \circ e_i$.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i \\
 & \searrow e_i & \downarrow \pi_i \\
 & & D_i \\
 & & \downarrow D_s \\
 & & D_{c(s)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\langle \pi_{c(t)} \rangle} & \prod_{t \in \text{Mor}(\mathbf{I})} D_{c(t)} \\
 & \xrightarrow{\langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle} & \downarrow \hat{\pi}_s \\
 & & D_{c(s)}
 \end{array}$$

Nech (K, k_i) je prirodzený zdroj vzhľadom na D a nech $k = \langle k_i \rangle: K \rightarrow \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i$. Keďže je to prirodzený zdroj, pre každé $s \in \text{Mor}(\mathbf{I})$ platí $k_{c(s)} = D_s \circ k_{d(s)}$. Potom $\hat{\pi}_s \circ \langle \pi_{c(t)} \rangle \circ k = \pi_{c(s)} \circ k = k_{c(s)} = D_s \circ k_{d(s)} = D_s \circ \pi_{d(s)} \circ k = \hat{\pi}(s) \circ \langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle \circ k$.

$$\begin{array}{ccccc}
E & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} D_i & \xrightarrow[\langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle]{\langle \pi_{c(t)} \rangle} & \prod_{t \in \text{Mor}(\mathbf{I})} D_{c(t)} \\
\uparrow k' & \nearrow k & \downarrow \pi_i & & \downarrow \hat{\pi}_s \\
K & \xrightarrow{k_i} & D_i & \xrightarrow{D_s} & D_{c(s)}
\end{array}$$

To znamená, že $\langle \pi_{c(t)} \rangle \circ k = \langle D_t \circ \pi_{d(t)} \rangle \circ k$, a pretože (E, e) je ekvalizátor, existuje jediné $k': K \rightarrow E$ také, že $k = e \circ k'$. Potom $e_i \circ k' = k$ a jednoznačnosť k' zabezpečí to, že e_i je zloženie dvoch (extrémnych) monozdrojov, teda je to monozdroj. $\square$

0.1.6 Faktorizácie

Definícia 35. Nech E (M) je trieda epimorfizmov (monomorfizmov) uzavretá na skladanie s izomorfizmami v kategórii $\mathbf{A}$. Hovoríme, že $\mathbf{A}$ je (E, M) -faktorizovateľná, ak pre každý $\mathbf{A}$ -morfizmus f existujú $e \in E$ a $n \in M$ také, že $f = m \circ e$.

$\mathbf{A}$ sa nazýva *jednoznačne (E, M) -faktorizovateľná kategória*, ak navyše požadujeme, že (E, M) -faktorizácia je jednoznačná až na izomorfizmus v tom zmysle, že ak $f = m \circ e = m' \circ e'$, $e, e' \in E$, $m, m' \in M$, sú rôzne (E, M) -faktorizácie, tak existuje izomorfizmus taký, že diagram

$$\begin{array}{ccc}
\bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \\
e' \downarrow & \swarrow j & \downarrow m \\
\bullet & \xrightarrow{m'} & \bullet
\end{array}$$

komutuje.

$\mathbf{A}$ je (E, M) -kategória, ak je jednoznačne (E, M) -faktorizovateľná a navyše E a M sú uzavreté vzhľadom na skladanie.

Ak špeciálne zvolíme za E triedu všetkých epimorfizmov a za M triedu všetkých extrémnych monomorfizmov v $\mathbf{A}$, tak dostaneme pojmy *(epi, extrémne mono)-faktorizovateľná kategória*, *jednoznačne (epi, extrémne mono)-faktorizovateľná kategória* a *(epi, extrémne mono)-kategória*.

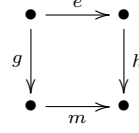
Duálne pojmy k týmto pojmom dostaneme, ak položíme za E triedu všetkých extrémnych epimorfizmov a za M triedu všetkých monomorfizmov: *(extrémne epi, mono)-faktorizovateľná kategória*, *jednoznačne (extrémne epi, mono)-faktorizovateľná kategória*, *(extrémne epi, mono)-kategória*.

Definícia 36. Ak $E(M)$ je trieda epimorfizmov (monomorfizmov) uzavretá na skladanie s izomorfizmami, tak hovoríme, že B je E -kvocient (M -podobjekt) objektu A , ak existuje morfizmus $e: A \rightarrow B$ ($m: B \rightarrow A$) také, že $e \in E$ ($m \in M$).

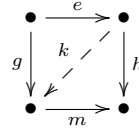
Tvrdenie 21. Ak $\mathbf{C}$ je (E, M) -faktorizovateľná kategória, tak sú ekvivalentné tieto podmienky:

(i) $\mathbf{C}$ je (E, M) -kategória

(ii) Pre každý komutatívny diagram v $\mathbf{C}$

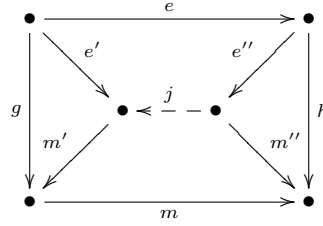


taký, že $e \in E$ a $m \in M$, existuje $\mathbf{C}$ -morfizmus k taký, že diagram



komutuje. ((E, M) -diagonálna vlastnosť)

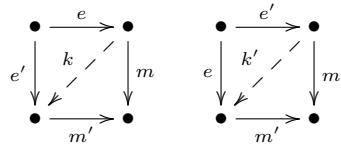
Dôkaz. $\Rightarrow$ Nech $g = m' \circ e'$ a $h = m'' \circ e''$ sú (E, M) -faktorizácie morfizmov g a h a nech $f = h \circ e = m \circ g$. Potom $f = m'' \circ (e'' \circ e)$ a $f = (m \circ m') \circ e'$ sú dve (E, M) -faktorizácie f . Potom existuje izomorfizmus j taký, že diagram



komutuje. Potom $k = m' \circ j \circ e''$ je hľadaný diagonálny morfizmus.

$\Leftarrow$

(i) Ak $f = m \circ e = m \circ e'$ sú (E, M) -faktorizácie morfizmu f , tak existujú morfizmy k a k' také, že diagramy



komutujú. Pretože e je epimorfizmus z $id \circ e = e = (k' \circ k) \circ e$ vyplýva, že $id = k' \circ k$ a pretože e' je epimorfizmus z $id \circ e' = e' = (k \circ k') \circ e'$ vyplýva, že $id = k' \circ k$. Teda k je izomorfizmus. Tým sme ukázali, že $\mathbf{C}$ je jednoznačne (E, M) -faktorizovateľná.

(ii) Ak $m_1, m_2 \in M$ sú také, že sa dajú skladať, overme či aj $m_2 \circ m_1 \in M$. Nech $m_2 \circ m_1 = m \circ e$ je (E, M) -faktorizácia ich zloženia. Potom musí podľa

(ii) existovať morfizmus k taký, že diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \\ m_1 \downarrow & \nearrow k & \downarrow m \\ \bullet & \xrightarrow{m_2} & \bullet \end{array}$$

komutuje. Tiež existuje k' také, že diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \\ id \downarrow & \nearrow k' & \downarrow k \\ \bullet & \xrightarrow{m_1} & \bullet \end{array}$$

komutuje. Pretože $k' \circ e = id$, e je koretrakcia. e je súčasne epimorfizmus, teda e je izomorfizmus. $m \in M$, preto aj $m_2 \circ m_1 = m \circ e \in M$.

(iii) Uvažujme opäť (E, M) -faktorizáciu $e_2 \circ e_1 = m \circ e$. Podľa predpokladu existuje k také, že komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e_1} & \bullet \\ e \downarrow & \nearrow k & \downarrow e_2 \\ \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \end{array}.$$

Potom tiež existuje k' také, že komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e_2} & \bullet \\ k \downarrow & \nearrow k' & \downarrow id \\ \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \end{array}.$$

Teda $m \circ k' = id$, čo znamená, že k' je retrakcia. k' je retrakcia aj monomorfizmus, musí to teda byť izomorfizmus. Keďže E je uzavretá na skladanie s izomorfizmami, tak $e_2 \circ e_1 = m \circ e \in E$. $\square$

Lema 4. *Nech $\mathbf{A}$ je (E, M) -kategória, e, f, m sú $\mathbf{A}$ -morfizmy, $e \in E$, $m \in M$, $m = f \circ e$. Potom e je izomorfizmus.*

Dôkaz. Podľa (E, M) -diagonálnej podmienky existuje morfizmus g taký, že diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \\ id \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \end{array}$$

komutuje. Keďže $g \circ e = id$, tak e je koretrakcia. e je súčasne epimorfizmus, preto e je izomorfizmus. $\square$

Tvrdenie 22. Ak $\mathbf{C}$ je (E, M) -kategória a $m_i \in I$, tak $\prod m_i \in M$.

Dôkaz. Označme $m = \prod m_i$. Nech $m = m' \circ e$ je (E, M) -faktorizácia m , pričom $e: \prod X_i \rightarrow Z$, $m': Z \rightarrow \prod Y_i$. Podľa (E, M) -diagonálnej vlastnosti existuje pre každé $i \in I$ morfizmus h_i taký, že $h_i \circ e = p_i$ a $m_i \circ h_i = q_i \circ m'$. Podľa definície súčiny potom existuje $h: Z \rightarrow \prod X_i$ také, že $h \circ p_i = h_i$.

$$\begin{array}{ccc}
 \prod X_i & \xrightarrow{m} & \prod Y_i \\
 \downarrow p_i & \swarrow e & \nearrow m' \\
 & Z & \\
 \downarrow h_i & \nwarrow h & \downarrow q_i \\
 X_i & \xrightarrow{m_i} & Y_i
 \end{array}$$

Pretože $p_i \circ id_{\prod X_i} = p_i = h_i \circ e = p_i \circ h \circ e$, máme $h \circ e = id_{\prod X_i}$. e je teda epimorfizmus a retrakcia, čiže izomorfizmus. $m' \in M$ a M je uzavretá na skladanie s izomorfizmami, teda $m \in M$. $\square$

0.1.7 Kategórie Top a Haus

Špeciálne morfizmy

Tvrdenie 23. V kategóriách **Top** a **Haus** sú monomorfizmy práve prosté spojité zobrazenia. V **Top** sú epimorfizmy práve surjektívne spojité zobrazenia. V **Haus** sú epimorfizmy práve husté spojité zobrazenia. (Spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je husté, ak $f[\overline{X}] = Y$.)

Dôkaz. Najprv ukážeme, že f je **Top** (**Haus**)-monomorfizmus $\Leftrightarrow f$ je prosté. Nech $f: X \rightarrow Y$ je **Top**-monomorfizmus a $f(a) = f(b)$. Zoberme zobrazenia g a h z jednoprvkového topologického priestoru $\{0\}$ do X , pričom $g(0) = a$ a $f(0) = b$. Keďže $f \circ g = f \circ h$, tak z definície monomorfizmu musí byť aj $a = b$. Naopak, nech $f: X \rightarrow Y$ je prosté. Ak $f \circ g = f \circ h$ tak pre každé $x \in X$ $f(g(x)) = f(h(x))$ a z injektívnosti f potom vyplýva $g(x) = h(x)$, teda $g = h$.

Ďalej ukážme, že **Top**-epimorfizmy sú práve surjektívne spojité zobrazenia. Nech by $f: X \rightarrow Y$, ktoré nie je surjektívne, bol **Top**-epimorfizmus. Zoberme dvojprvkový indiskrétny priestor $I = \{0, 1\}$. Zvolíme 2 zobrazenia $g, h: Y \rightarrow I$ tak, že $g \equiv 0$ a $h|_{f(X)} \equiv 0$, $h|_{Y-f(X)} \equiv 1$. Tieto zobrazenia sú spojité, lebo každé zobrazenie do indiskrétného priestoru je spojité. Navyše platí $g \circ f = h \circ f$ a $g \neq h$ ($Y \setminus f(X) \neq \emptyset$, lebo f nie je surjektívne), čo je spor s predpokladom, že f je epimorfizmus. Opačná implikácia vyplýva z lemy 6.

Haus-epimorfizmy sú práve husté spojité zobrazenia. Jeden smer vyplýva z nasledujúcej lemy a jej dôsledku. Opačný smer vyplýva z lemy 6. $\square$

Lema 5. Pre každé dve spojité zobrazenia $f, g: X \rightarrow Y$, kde Y je hausdorffovský, je množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ uzavretá.

Dôkaz. Ukážeme, že $A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ je otvorená. Ak $f(x) \neq g(x)$, tak existujú otvorené množiny U a V také, že $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Potom $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ je otvorené okolie x , ktoré leží pod A . $\square$

Dôsledok 2. Ak $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité, Y je hausdorffovský a $f|_A = g|_A$ pre nejakú množinu A hustú v X , tak $f = g$.

Lema 6. Ku každému (T_2-) priestoru Y a každému (uzavretému) podpriestoru $U \subseteq Y$ existujú (T_2-) priestor Q a spojité zobrazenia $r, s: Y \rightarrow Q$ také, že $U = \{y \in Y \mid r(y) = s(y)\}$.

Dôkaz. Q dostaneme tak, že v $Y \sqcup Y$ stotožníme U v oboch kópiách priestoru Y . Teda Q bude faktorový priestor $Y \sqcup Y$ podľa relácie ekvivalencie definovanej $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee u_1^{-1}(x) = u_2^{-1}(y) \in U \vee u_1^{-1}(y) = u_2^{-1}(x) \in U$, kde $u_1, u_2: Y \rightarrow Y \sqcup Y$ sú vloženia. Ak Y je T_2 a Q je uzavretá, tak dostaneme opäť T_2 -priestor. (Dva body toho istého sčítanca, ktoré sa v ňom dajú oddeliť pomocou U a V , oddelíme vo faktorovom topologickom priestore otvorenými množinami $u_i(U)$ a $u_i(V)$. Ak sú z rôznych sčítancov (t.j. ani jeden nemôže byť z U), tak ich oddelia 2 kópie množiny $Y \setminus U$.) Ak označíme $h: Y \sqcup Y \rightarrow Q$, $h = [u_1, u_2]$ tak za r a s spĺňajúce vlastnosti z tvrdenia lemy možno zvoliť $r = h \circ u_1$ a $s = h \circ u_2$. $\square$

Tvrdenie 24. f je **Top (Haus)-izomorfizmus** práve vtedy, keď f je homeomorfizmus.

Definícia 37. Podpriestor A topologického priestoru Y sa nazýva *retrakt* topologického priestoru Y , ak existuje spojité zobrazenie $r: Y \rightarrow A$, ktoré ponecháva na mieste každý bod A (t.j. $r \circ i = id_A$; kde i je vloženie). Takéto zobrazenie r sa nazýva *topologická retrakcia*.

Tvrdenie 25. f je **Top-koretrakcia** práve vtedy, keď f je topologické vloženie a $f[X]$ je retrakt, čiže koretrakcie v **Top** sú (až na homeomorfizmus) práve vloženia rektrov. f je retrakcia v **Top** práve vtedy, keď existuje topologická retrakcia r a homeomorfizmus h , že $f = h \circ r$, t.j. retrakcie sú (až na homeomorfizmus) topologické retrakcie.

Dôkaz. Nech $f: A \rightarrow X$, $g: X \rightarrow A$, $g \circ f = id_A$. Potom $f: A \rightarrow f[A]$ je bijektívne a pre $U \subseteq A$ je $f[U] = g^{-1}(U)$ otvorená, tzn. f je homeomorfizmus medzi A a podpriestorom X , teda f je vloženie. Pritom komutuje diagram

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} f[A] \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{f \circ g} \end{array} X$$

Označme $r = f \circ g$. Potom $r \circ i = f \circ (g \circ i) = f \circ f^{-1} = id_{f[A]}$. Teda f je vloženie a $f[A]$ je retrakt. Tiež g je (až na homeomorfizmus) retrakcia, lebo $f: A \rightarrow f[A]$ je homeomorfizmus. $\square$

Keďže **Haus** je plná podkategória **Top**, tak retrakcie a koretrakcie v **Haus** sú tie isté ako v **Top**.

Tvrdenie 26. Nech $X, Y \in \mathbf{Top}$ ($X, Y \in \mathbf{Haus}$) a $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité. Potom ekvalizátor f a g v **Top** (**Haus**) je podpriestor $Z = \{x \in X: f(x) = g(x)\}$ priestoru X spolu s vložením $i: Z \hookrightarrow X$.

Dôkaz. Platnosť $f \circ i = g \circ i$ je zrejmá. Nech $f \circ h = g \circ h$ pre nejaké spojité zobrazenie $f: Z \rightarrow X$. Potom musí platiť $h[X] \subseteq Z$. Ak teda vezmeme $\bar{h}: Z' \rightarrow X$, $\bar{h}(x) = h(x)$, tak platí $i \circ \bar{h} = h$. Jednoznačnosť takéhoto morfizmu zabezpečí fakt, že i je monomorfizmus.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & X \\ \uparrow \bar{h} & \nearrow h & \uparrow f \\ Z' & & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array}$$

$\square$

Tvrdenie 27. Nech $X, Y \in \mathbf{Top}$ ($X, Y \in \mathbf{Haus}$) a $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité. Označme R reláciu ekvivalencie na Y určenú tým, že $f(x)Rg(x)$ pre všetky $x \in X$. Nech Y/R je faktorový priestor a $p: Y \rightarrow Y/R$ prirodzená projekcia. Potom $(p, Y/R)$ je koekvalizátor dvojice f, g .

Dôkaz. Pre každé $x \in X$ platí $f(x)Rg(x)$, z čoho vyplýva $p(f(x)) = p(g(x))$, teda $p \circ f = p \circ g$.

Nech $h: Y \rightarrow Y'$ je spojité zobrazenie také, že $h \circ f = h \circ g$. Definujme potom $\bar{h}: Y/R \rightarrow Y'$ predpisom $\bar{h}(p(y)) = h(y)$. Aby sme ukázali, že tento predpis dobre definuje zobrazenie treba overiť, či platí $y_1 R y_2 \Rightarrow h(y_1) = h(y_2)$. Označme $R' = \{(y_1, y_2): h(y_1) = h(y_2)\}$. Zrejme R' je relácia ekvivalencie a pre každé $x \in X$ platí $f(x)R'g(x)$. Keďže R je najmenšia relácia ekvivalencie s týmito vlastnosťami, tak $R \subseteq R'$, čo je vlastne implikácia, ktorú sme chceli dokázať. Spojitosť $\bar{h}$ vyplýva z toho, že $\bar{h} \circ p = h$ je spojité a p je faktorové zobrazenie.

Ukázali sme teda, že existuje spojité zobrazenie také, že $\bar{h} \circ p = h$. Jednoznačnosť takéhoto zobrazenia vyplýva z toho, že p je surjektívne, a teda je to epimorfizmus. $\square$

Tvrdenie 28. *Nech $f: A \rightarrow B$ je **Top** (**Haus**)-morfizmus. Potom sú nasledovné podmienky ekvivalentné:*

- (i) f je vloženie (uzavreté vloženie),
- (ii) f je regulárny monomorfizmus,
- (iii) f je extrémny monomorfizmus.

(Pod uzavretým vložением sa rozumie, že $f[A]$ je uzavretý podpriestor B , čo je ekvivalentné s tým, že vloženie f je uzavreté zobrazenie.)

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ak v leme 6 položíme $U = f[X]$, tak pre r, s , ktorých existenciu táto lema zaručuje platí $f = \text{Eq}(r, s)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Tvrdenie 10.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nech $U = f[X]$ (resp. $U = \overline{f[X]}$) a $h: U \rightarrow Y$ je vloženie (resp. uzavreté vloženie). Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $g: X \rightarrow U$ také, že $h \circ g = f$ a g je surjektívne (husté), je to teda epimorfizmus. Potom g musí byť izomorfizmus (lebo f je extrémny monomorfizmus). Potom aj $f = h \circ g$ je vloženie (uzavreté vloženie). $\square$

Tvrdenie 29. *Nech $f: A \rightarrow B$ je **Top** (**Haus**)-morfizmus. Potom sú nasledovné podmienky ekvivalentné:*

- (i) f je faktorové zobrazenie,
- (ii) f je regulárny epimorfizmus,
- (iii) f je extrémny epimorfizmus.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nech $X \times X$ je súčin s projekciami p_i a $k = \text{Eq}(f \circ p_1, f \circ p_2)$. Tvrdíme, že potom $f = \text{Coeq}(p_1 \circ k, p_2 \circ k)$. Podľa tvrdenia 26 a vety 13 hovoriacej o jednoznačnosti limit, môžeme predpokladať, že $k: K \hookrightarrow X \times X$ je vloženie, pričom $K = \{(x, y) \in X \times X: f(x) = f(y)\}$. Overme, či (f, Y) má vlastnosti koekvalizátora.

Rovnosť $f \circ p_1 \circ k = f \circ p_2 \circ k$ je zrejmá. Nech platí $g \circ p_1 \circ k = g \circ p_2 \circ k$ pre nejaký morfizmus $g: X \rightarrow Z$. Potom zrejme platí implikácia $f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$. Z toho vyplýva, že môžeme nájsť $\bar{g}: Y \rightarrow Z$ tak, aby $\bar{g} \circ f = g$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & Z \\
 & & & \nearrow g & \uparrow \bar{g} \\
 K \hookrightarrow & X \times X & \xrightarrow[p_2]{p_1} & X & \xrightarrow{f} Y \\
 & & & & \downarrow
 \end{array}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Tvrdenie 10.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Na $Z = f[X]$ definujeme topológiu, ktorá je faktorová vzhľadom na zobrazenie $g: X \rightarrow Z$, ktoré je zúžením f . Nech $h: Z \rightarrow Y$ je zobrazenie také, že $h|_Z = \text{id}_Z$. Potom $f = h \circ g$ a h je monomorfizmus. Potom h je izomorfizmus, lebo f je extrémny a keďže g je faktorové zobrazenie, aj f je faktorové zobrazenie. $\square$

Tvrdenie 30. *f je konštantný morfizmus v **Top** (**Haus**) práve vtedy, keď f je konštantné zobrazenie.*

Špeciálne morfizmy

Tvrdenie 31. Každý neprázdny priestor v **Top** (**Haus**) je generátor.

Dôkaz. Nech $X \neq \emptyset$ a $f, g: Y \rightarrow Z$ sú nejaké morfizmy také, že $f \neq g$. Potom existuje $y \in Y$ také, že $f(y) \neq g(y)$. Pre konštantné zobrazenie $h: X \rightarrow Y$, $h(x) \equiv y$ potom platí $f \circ h \neq g \circ h$, a konštantné zobrazenie je samozrejme spojité. $\square$

Limity a kolimity

Tvrdenie 32. Súčin v kategórii **Top** (**Haus**) je topologický súčin topologických priestorov. Kosúčin v kategórii **Top** (**Haus**) je topologický súčet topologických priestorov.

Keďže kategórie **Top** a **Haus** majú, ako sme videli, súčiny, ekvalizátory, kosúčiny a koekvalizátory, tak na základe vety 3 platí:

Tvrdenie 33. Kategórie **Top** a **Haus** sú úplné a kóúplné.

V topológii sa definuje adjungovaný priestor takto:

Definícia 38. Nech X, Y sú topologické priestory, $M \subset X$ je topologický podpriestor a $f: M \rightarrow Y$ je spojitý. $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/E$, kde E je najmenšia ekvivalencia na $X \cup Y$ taká, že $xEf(x)$ pre všetky $x \in M$.

Poznamenajme, že napríklad v [ENG] sa navyše požaduje, aby M bol uzavretý podpriestor X , my to vyžadovať nebudeme.

Keď porovnáme uvedenú definíciu s kanonickou konštrukciou pushoutu (tvrdenie 17), vidíme, že ide o tú istú konštrukciu, s tým rozdielom, že pri pushoute nežiadame, aby $m: M \rightarrow X$ bolo vloženie, teda pushout je všeobecnejší. Platí teda tvrdenie:

Tvrdenie 34. Nasledujúci diagram je pushout:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & Y \\ m \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{j} & X \cup_f Y \end{array}$$

Ak Y je jednobodový, tak $X \cup_f Y \cong X/M$.

Nech $i_X: X \hookrightarrow X \sqcup Y$, $i_Y: Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ sú vloženia a $q: X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ je prirodzená projekcia. Ich zloženia

$$j = qi_X: X \rightarrow X \cup_f Y \text{ a } k = qi_Y: Y \rightarrow X \cup_f Y$$

sú spojitý a množina $C \subset X \cup_f Y$ je otvorená (uzavretá) práve vtedy, keď $j^{-1}(C)$ a $k^{-1}(C)$ sú otvorené (uzavreté) v X resp. v Y .

[C je otvorená (uzavretá) v $X \cup_f Y \Leftrightarrow q^{-1}(C) \text{ v } X \oplus Y \Leftrightarrow i_X^{-1}q^{-1}(C) \text{ v } X$ a $i_Y^{-1}q^{-1}(C) \text{ v } Y$]

Lahko sa overí, že:

$$j^{-1}k(B) = f^{-1}(B) \text{ a } k^{-1}k(B) = B \text{ pre } B \subset Y, \quad (1)$$

$$j^{-1}j(A) = A \cup f^{-1}f(A \cap M) \text{ a } k^{-1}j(A) = f(A \cap M) \text{ pre } A \subset X. \quad (2)$$

$j^{-1}k(B)$ = prvky z X , ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $B = f^{-1}(B)$
 $k^{-1}k(B)$ = prvky z Y , ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $B = B$
 $j^{-1}j(A)$ = prvky z X , ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $A = A \cup f^{-1}f(A)$
 $k^{-1}j(A)$ = prvky z Y , ktoré sú ekvivalentné s prvkami z $A = f(A \cap M)$

Na základe týchto vzťahov môžeme ukázať, že platí:

Tvrdenie 35. *Nech X, Y sú topologické priestory, $A \subset X$, $f: A \rightarrow Y$ je faktorové zobrazenie. (Nepredpokladám uzavretosť A .) Potom $k: Y \hookrightarrow X \cup_f Y$ je vloženie a $j: X \rightarrow X \cup_f Y$ je faktorové zobrazenie. Ak navyše $M \subseteq Y$ je otvorený (uzavretý) podpriestor, tak $k(Y)$ je otvorený (uzavretý) podpriestor.*

Dôkaz. Nech $U \subset Y$ je otvorená. Treba zistiť, či $k(U)$ je otvorená v Y . Využitím (1) a (2) dostaneme, že $k^{-1}(k[U]) = U$ je otvorená v Y a $j^{-1}k(U) = f^{-1}(U)$ je otvorená v X , čiže $k(U)$ je otvorená. Tým sme overili, že k je vloženie.

Overme tiež, či j je faktorové. Ak $j^{-1}(U)$ je otvorená v X , tak $f^{-1}k^{-1}(U) = j^{-1}(U) \cap A$ je otvorená v A , čiže aj $k^{-1}(U)$ je otvorená (f je faktorové). Keďže $j^{-1}(U)$ aj $k^{-1}(U)$ sú otvorené, U musí byť otvorená.

Ak platí, že M je otvorená (uzavretá) v Y , tak $j^{-1}(k(Y)) = f^{-1}(Y) = M$ aj $k^{-1}(k(Y)) = Y$ sú otvorené (uzavreté), teda aj $k(Y)$ je uzavretá. otvorené (uzavreté) $\square$

Definícia 39. Nech A je usmernená množina a $\{R_\alpha; \alpha \in A\}$ je systém navzájom topologických priestorov. Nech pre každú dvojicu $\alpha, \beta \in A$ takú, že $\alpha < \beta$ je dané spojité zobrazenie $\varphi_\beta^\alpha: R_\alpha \rightarrow R_\beta$ a platí $\varphi_\gamma^\alpha = \varphi_\beta^\alpha \circ \varphi_\gamma^\beta$ pre $\alpha < \beta < \gamma$. Potom systém $\{R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha; \alpha, \beta \in A, \alpha < \beta\}$ nazývame *usmernený (induktívny) systém topologických priestorov*.

Nech $R = \bigsqcup_{\alpha \in A} R_\alpha$, definujme na R ekvivalenciu tak, že $p_\alpha \in R_\alpha$ a $p_\beta \in R_\beta$ sú ekvivalentné práve vtedy, keď $\varphi_\gamma^\alpha(p_\alpha) = \varphi_\gamma^\beta(p_\beta)$ pre nejaké $\gamma \in A$. Potom faktorový priestor R^* priestoru R vzhľadom na túto ekvivalenciu sa nazýva *priama (induktívna, usmernená) limita* systému $\{R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha\}$. a označuje sa $R^* = \varinjlim \{R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha; \alpha, \beta \in A, \alpha < \beta\}$.

Napríklad ak $A = \mathbb{N}$ a φ_{n+1}^n sú vloženia, tak R^* je priestor obsahujúci všetky R_n ako svoje podpriestory, každý z nich je induktívne vložený v nasledujúcom.

Vlastnosti kategórií Top a Haus

Lema 7. *Ak X je hausdorffovský priestor a $A \subseteq X$, tak platí $\text{card } \bar{A} \leq 2^{2^{\text{card } A}}$.*

Dôkaz. Pre každé $x \in \overline{A}$ definujeme systém množín $\mathcal{A}(x) = \{U \subseteq A : x \in U \text{ a } U \text{ je otvorená v } A\}$. Z oddeliteľnosti ľubovoľných dvoch bodov otvorenými množinami vyplýva, že pre $x \neq y$ $\mathcal{A}(x) \neq \mathcal{A}(y)$. Pretože kardinalita všetkých systémov podmnožina A nemôže prevýšiť $2^{2^{\text{card } A}}$, máme $\text{card } \overline{A} \leq 2^{2^{\text{card } A}}$. $\square$

Tvrdenie 36. *Kategórie **Top** a **Haus** sú lokálne malé, kolokálne malé, extrémne lokálne malé, extrémne kolokálne malé.*

Dôkaz. Reprezentatívnu množinu podobjektov a extrémnych podobjektov X možno vybrať z topologických priestorov na podmnožinách X . Podobne pre kvocienty a extrémne kvocienty v **Top**, lebo kardinalita obrazu v surjektívnom zobrazení nepresiahne kardinalitu oboru zobrazenia. V **Haus** platí nerovnosť $\text{card } \overline{A} \leq 2^{2^{\text{card } A}}$, a teda epimorfizmy a extrémne epimorfizmy môžeme reprezentovať pomocou zobrazení do množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, ktorá má kardinalitu $2^{2^{\text{card } X}}$. $\square$

Lema 8. *V **Top** (**Haus**) sa každý morfizmus f dá napísať v tvare $f = m \circ b \circ e$, kde m je monomorfizmus, b je bimorfizmus a e je epimorfizmus.*

Dôkaz. Nech $f: X \rightarrow Y$ je spojitý. Nech B je podpriestor Y na množine $f[X]$ ($\overline{f[X]}$). Nech A je topologický priestor na množine $f[X]$ ($\overline{f[X]}$), ktorý je faktorový vzhľadom na zobrazenie f (resp. jeho príslušné zúženie). Potom $b = \text{id}: A \rightarrow B$ je spojitý (lebo A má najhrubšiu topológiu, pri ktorej je f spojitý, teda B má jemnejšiu topológiu ako A). Potom $f = m \circ b \circ e$ je hľadaná faktorizácia. $\square$

Tvrdenie 37. ***Top** (**Haus**) je (epi, extrémne mono)-faktorizovateľná kategória a (extrémne epi, mono)-faktorizovateľná kategória.*

Dôkaz. Uzavretosť vystupujúcich tried epimorfizmov a monomorfizmov je zrejmá z toho, ako sú tieto typy morfizmov charakterizované v kategóriách **Top** a **Haus**. Ak $f = m \circ b \circ e$ je faktorizácia morfizmu $f: X \rightarrow Y$ z predchádzajúcej lemy, tak $f = (m \circ b) \circ e$ je (extrémne epi, mono)-faktorizácia a $f = m \circ (b \circ e)$ je (epi, extrémne mono)-faktorizácia f . Aby sme ukázali jednoznačnosť v oboch týchto faktorizáciach, stačí ukázať jednoznačnosť v rozklade z predchádzajúcej lemy. Nech teda $f = m_1 \circ b_1 \circ e_1 = m_2 \circ b_2 \circ e_2$ sú takéto faktorizácie f cez A_1 a B_1 resp. cez A_2 a B_2 . m_1 a m_2 sú homeomorfizmy medzi svojím oborom a $f[X]$ ($\overline{f[X]}$), to znamená, že B_1 a B_2 sú navzájom homeomorfné podpriestory Y . b_1 a b_2 môžeme (homeomorfne) nahradiť identitou, a potom dostaneme homeomorfizmus medzi faktorovými priestormi A_1 a A_2 , lebo budú homeomorfné s faktorovým priestorom daným tým istým faktorovým zobrazením. $\square$