

Poznámky z V.J.Arsenin: Matematická fyzika. Základné rovnice a špeciálne funkcie.

(str. 90) Tu je dokázaná jednoznačnosť riešenia hyperbolickej a parabolickej úlohy na ohraničenej oblasti pomocou Steklovovej vety o rozvoji.

(str. 108) Tu sa spomína, že Fourierov rad ľubovoľnej kvadraticky integrovateľnej funkcie podľa úplného ortonormálneho systému možno člen po člene integrovať bez ohľadu na to, či tento rad konverguje alebo nie. (To vyplýva z toho, že Fourierov rad konverguje k f v strede.)

(str. 121) Jednoznačnosť pre jednorozmernú úlohu bez použitia vety o rozvoji. (Vlastne sa ukáže, že energia kmitajúcej struny zostane konštantná, bude teda nulová.)

5 METÓDA FUNKCIÍ ZDROJOV (GREENOVEJ FUNKCIE) PRE ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

5.2. Fundamentálne riešenie (Greenova funkcia)

$$a^2 u_{xx} = u_t; u(x, 0) = \delta(x - x_0)$$

$$G(x - x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$$

5.3. Riešenie úlohy o šírení tepla na priamke

$$a^2 u_{xx} = u_t; u(x, 0) = \varphi(0)$$

bodové zdroje tepla: $dQ = c\rho\varphi(\xi)d\xi$

teplota spôsobená bodovým zdrojom: $\frac{dQ}{c\rho} G(x - \xi, t) = \varphi(\xi)G(x - \xi, t)$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x - \xi, t)$$

$$u(x, t) = G(x, t) * \varphi(x)$$

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_t; u(x, 0) = 0$$

$f(\xi, \tau)G(x - \xi, t - \tau)d\xi d\tau$ = teplo od zdrojov na úsečke dĺžky $d\xi$ za čas $d\tau$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau)G(x - \xi, t - \tau)d\xi d\tau = G(x, t) * f(x, t)$$

5.4. Riešenie úlohy o vedení tepla v trojrozmernom (dvojrozmernom) priestore

$$a^2 \Delta u = u_t$$

Fundamentálne riešenie $G(M, M_0; t)$ je riešenie pre počiatočnú podmienku $u(M, 0) = \delta(M, M_0)$

Lema: Ak v Cauchyho úlohe $a^2 \Delta u = u_t$, $u(M, 0) = \varphi(M)$ je začiatková funkcia v tvare $\varphi(M) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$, tak riešením danej úlohy je funkcia $u(M, t) = u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$, kde u_1, u_2, u_3 sú riešenia jednorozmerných úloh s počiatočnou podmienkou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

$$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

$$G(M, M_0; t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^3 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

$$G(M, M_0; t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4a^2 t}}$$

$$u(x, y, z, t) = G(x, y, z, t) * \varphi(x, y, z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$$

6 ROVNICE ELIPTICKÉHO TYPU

6.1. Greenov vzorec. Najjednoduchšie vlastnosti harmonických funkcií

$$L(u) = \operatorname{div}(k\nabla u) - qu$$

$$R[u, v] = - \int_D vL(u)d\tau = \int_D k(\nabla u \cdot \nabla v)d\tau + \int_D quvd\tau - \int_S kv \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (1)$$

$$R[v, u] - R[u, v] = \int_D \{vL(u) - uL(v)\}d\tau = \int_S k \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma \quad (2)$$

$v = 1, L(u) = f(M)$:

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_D f(M) d\tau \quad (1)$$

$L(u) = \Delta u = 0$ - harmonické funkcie

V $\mathbb{R}^2$ $\ln \frac{1}{r}$ a v $\mathbb{R}^3$ $\frac{1}{r}$ (mimo $r = 0$)

Pre harmonické funkcie dostaneme z (3):

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Veta o strednej hodnote:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(M) d\sigma \quad (2)$$

v $\mathbb{R}^2$:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u(M) d\sigma \quad (3)$$

ak u je harmonická a spojitá aj s prvými parciálnymi deriváciami.

6.2. Jednoznačnosť riešenia okrajových úloh

(str. 181) Veta o maxime a minimi a veta o jednoznačnosti

6.3. Metóda greenovej funkcie