

Poznámky z Naylor-Sell: Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách  
(str.37)  $F(t)$ -sila

$$x(t) = \int_0^t v(s)ds = \int_0^t ds \int_0^s \frac{F(u)}{M} du = \frac{1}{M} \int_0^t du \int_u^t F(u)ds = \frac{1}{M} \int_0^t (t-u)F(u)du.$$

(str.116/20,21) Dôkaz Weierstrassovej vety pomocou Bernsteinových polynómov. (Ten istý dôkaz je aj v skriptách Barnovská, Smítalová: Matematická analýza 3.)

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(x, f) \Rightarrow f(x)$$

z-transformácia - 183/4,187/5

$V(A)$ =lineárny obal  $A$

Dôkaz, že ľubovoľné dve Hamelove bázy majú rovnakú kardinalitu - nekonečnorozmerný prípad.

*Dôkaz.* Nech  $B_1, B_2$  sú dve Hamelove bázy priestoru  $X$ . Pre každé  $x \in B_1$  nech  $B_2(x)$  je jednoznačne určená konečná množina bodov bázy  $B_2$ , ktorých lineárnou kombináciou je  $x$ . Najprv ukážeme, že pre každé  $y \in B_2$  existuje také  $x \in B_1$ , že  $y \in B_2(x)$ .

Nech by to tak nebolo, teda  $y \in B_2(x)$  pre žiadne  $x$ . Potom  $B_1 \subseteq [B_2 \setminus \{y\}]$  ( $[V]$  označuje lineárny obal množiny  $V \subseteq X$ ). Keďže  $B_1$  je báza, tak potom  $[B_2 \setminus \{y\}] = X$ , a teda  $y$  je lineárna kombinácia prvkov z  $B_2 \setminus \{y\}$ . Ukázali sme, že  $B_2$  nie je lineárne nezávislá, čo je spor s predpokladom, že je to Hamelova báza.

Máme teda ukázané  $(\forall y \in B_2)(\exists x \in B_1)y \in B_2(x)$ . Platí potom  $B_2 = \bigcup_{x \in B_1} B_2(x)$ . Pre kardinality dostávame  $\text{card } B_2 = \text{card} \left( \bigcup_{x \in B_1} B_2(x) \right) \leq \text{card } B_1 \cdot \aleph_0 = \text{card } B_1$  (v poslednej rovnosti sme využili, že  $\text{card } B_1$  je nekonečná.) Rovnakým spôsobom ako  $\text{card } B_2 \leq \text{card } B_1$  môžeme ukázať nerovnosť  $\text{card } B_1 \leq \text{card } B_2$ . Z týchto dvoch nerovností (podľa Cantor-Bernsteinovej vety) dostaneme  $\text{card } B_2 = \text{card } B_1$ .  $\square$

Fourierova transformácia - 200/1, 210/1

200/5: časovo invariantné, spojité, lineárne  $\Rightarrow$  komutujú ???

$L^T$  označuje duál lineárnej transformácie  $L: X \rightarrow Y$ .  $R(L)$  znamená obor hodnôt (range)  $L$  a  $N(L)$  nulový priestor  $L$ .

Pre lineárnu transformáciu  $L: X \rightarrow Y$  platí:

$R(L) = Y$  práve vtedy, keď  $L^T$  je prosté.

$L^T$  je surjektívne  $\Rightarrow L$  je prosté.

V druhom tvrdí vo všeobecnosti neplatí ekvivalencia, hoci platí v konečnorozmerných priestoroch.

