Verzia: 25. júna 2002

Problém homeomorfnosti topologických priestorov

Def: $D^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ je tzv. **(uzavretá) jednotková guľa** v $\mathbb{R}^n$.
Def: $\mathring{D}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ je tzv. n**-rozmerná jednotková bunka** v $\mathbb{R}^n$.
$\mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$
$h : \mathring{D}^n \to \mathbb{R}^n$
$h(x) = \frac{x}{1-\|x\|} \qquad h^{-1}(y) = \frac{y}{1+\|y\|}$
Def: Každý topologický priestor homeomorfný s $\mathring{D}^n$ sa nazýva n**-rozmerná bunka** (n-bunka).
Každý topologický priestor homeomorfný s D^n sa nazýva n**-rozmerná guľa**.
Tvrdenie: $\mathring{D}^k \times \mathring{D}^p$ je $(k+p)$-rozmerná bunka.
Def: $S^n := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ je n**-rozmerná jednotková sféra**.
Každý priestor homeomorfný s S^n sa nazýva n**-rozmerná sféra**.
$D_+^n = \{(x_1,\dots,x_n \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$ = **horná hemisféra**
$D_-^n = \{(x_1,\dots,x_n \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}$ = **dolná hemisféra**
$S^n = D_+^n \cup D_-^n \ D_+^n \cap D_-^n = \{(x_1,\dots,x_n \in S^n; x_{n+1} = 0\}$ = **rovník**
$D_+^n \cap D_-^n \approx S^{n-1}$
Tvrdenie: Nech $x_0 \in S^n$ je ľubovoľný bod. Potom $S^n - \{x_0\} \approx \mathbb{R}^n$.
Lema: Nech $h : X \to Y$ je homeomorfizmus, X a Y sú T_1-priestory (t.j. jednobodové množiny sú uzavreté). Potom pre ľubovoľný bod $x_0 \in X$ je $h|_{X-\{x_0\}} : X - \{x_0\} \to Y - \{h(x_0)\}$ homeomorfizmus.
Poznámka: Podľa mňa tu vôbec netreba predpoklad T_1, ale ak ide o T_1-priestory, tak možno lemu obrátiť.
Def: Pre ľubovoľný topologický priestor X a $x_0 \in X$ definujeme číslo $P_{x_0}(X)$ = počet komponentov súvislosti priestoru $X - \{x_0\}$. $P_{x_0}(X)$ = sa nazýva **index bodu** x_0 **v** X.
Tvrdenie: Ak existuje homeomorfizmus $h : X \to Y$, tak pre ľubovoľné $x_0 \in X$ máme $P_{x_0}(X) = P_{h(x_0)}(Y)$.
Def: Oblasť je otvorená súvislá podmnožina priestoru $\mathbb{R}^n$.
Veta: (o invariantnosti oblastí) Ak X, Y sú 2 podpriestory v $\mathbb{R}^n$ a existuje homeomorfizmus medzi nimi, tak z otvorenosti X vyplýva otvorenosť Y.
Dôsledok: Homeomorfný obraz oblasti je oblasť.
Veta: (o invariantnosti dimenzie) $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$.
Dôsledok: $S^m \approx S^n \Leftrightarrow m = n$.
Veta: (O invariantnosti okraja) Nech $h : D^n \to D^n$ je homeomorfizmus. Potom $h(S^{n-1}) = S^{n-1}$.

Konštrukcia topologických priestorov

Veta: Nech X je topologický priestor s reláciou ekvivalencie $\sim_R$ a Y je topologický priestor s reláciou ekvivalencie $\sim_S$. Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie také, že rešpektuje dané relácie ekvivalencie (teda $x \sim_R y \Rightarrow f(x) \sim_S f(y)$), potom predpis $[x] \mapsto [f(x)]$ dobre definuje zobrazenie $\tilde{f} : X/{\sim_R} \to Y/{\sim_S}$, $\tilde{f}$ je spojité.
Okrem toho ak f je homeomorfizmus rešpektujúci dané relácie a f^{-1} tiež rešpektuje dané relácie ekvivalencie, tak $\tilde{f} : X/{\sim_R} \to Y/{\sim_S}$ je homeomorfizmus.
Dohoda: Budeme stále predpokladať, že pri konštrukciách nových priestorov všetko, čo použijeme má také vlastnosti, aby aj výsledný priestor bol Hausdorffovský.

Faktorový priestor podľa podpriestoru

Def: Nech X je topologický priestor a nech $A \neq \emptyset$ je uzavretý topologický podpriestor X. Potom na X máme reláciu ekvivalencie $\sim$ určenú podpriestorom A: $x \sim y \Leftrightarrow \{x,y\} \subset A \vee x = y$.
Faktorový topologický priestor $X/\sim$ potom značíme X/A = **faktorový priestor topologického priestoru** X **podľa topologického podpriestoru** A. ("X podľa A")
Def: Ak X je topologický priestor, A jeho ľubovoľný topologický podpriestor, tak dvojica (X,A) sa nazýva **(topologický) pár priestorov**.
zobrazenie párov $f : (X,A) \to (Y,B)$ je spojité zobrazenie $f : X \to Y$ také, že $f(A) \subset B$.
Zobrazenie párov $f : (X,A) \to (Y,B)$ je **homeomorfizmus párov**, ak $f : X \to Y$ je homeomorfizmus taký, že $f(A) = B$.
Veta: Nech $f : (X,A) \to (Y,B)$ je zobrazenie topologických párov, predpokladajme, že podpriestory A, B sú uzavreté. Potom predpis $[x] \mapsto [f(x)]$ definuje spojité zobrazenie $\overline{f} : X/A \to Y/B$.
navyše, ak f je homeomorfizmus párov, tak $\overline{f} : X/A \to Y/B$ je homeomorfizmus.

Def: Zobrazenie topologických párov sa nazýva **relatívny homeomorfizmus**, ak $f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ je homeomorfizmus.
Veta: Nech $A \neq \emptyset$ je uzavretý topologický podpriestor X, potom $p : (X, A) \to (X/A, \{[A]\})$ je relatívny homeomorfizmus.
Veta: Nech X je kompaktný priestor a $A \neq \emptyset$ nech je uzavretý podpriestor. Potom X/A je jednobodová kompaktifikácia priestoru $X - A$.
$D^n/S^{n-1} \approx S^n$
Def: Valec (cylinder) nad priestorom X je $X \times I$, kde $I =< 0, 1 >$
Faktorový priestor $X \times I/X \times \{1\}$ sa nazýva **kužeľ (kónus)** nad X a značíme ho CX.
C$S^{n-1} \approx D^n$
Def: Nech $\{X_j\}_{j\in J}$ je systém navzájom disjunktných topologických priestorov. Z každého X_j vyberme $\mathring{x}_j \in X_j$. Faktorový priestor $\underset{j\in J}{+} X_j/\{\mathring{x}_j\}_{j\in J}$ sa nazýva **jednobodové spojenie (wedge)** priestorov X_j, označuje sa $\bigvee_{j\in J} X_j$, pri konečnom počte $X_1 \vee X_2 \vee X_3$

Zliepanie topologických priestorov

Def: Nech X, Y sú topologické priestory a nech $A \subset X$ je uzavretý podpriestor. Ak máme dáke spojité zobrazenie $f : A \to Y$, tak môžeme definovať nový topologický priestor $Y \cup_f X$ ("Y zlepené s X pomocou f pozdĺž A"), takto:
na topologickej sume $X + Y$ zoberieme reláciu ekvivalencie $\sim$ určenú tým, že $a \sim f(a)$ pre všetky $a \in A$.
Potom $Y \cup_f X := (X + Y)/_{\sim}$.

Plochy

Def: Plocha je hausdorffovský topologický priestor P so spočítateľnou bázou topológie taký, že každý jeho bod má okolie homeomorfné s uzavretým diskom D^2.
Ak P je plocha a pre daný bod $x \in P$ je $h : A \to D^2$ homeomorfizmus z okolia A bodu x na D^2, tak x sa nazýva **vnútorný bod** plochy P, ak $h(x) \in \mathring{D}^2$, a x sa volá **okrajový bod** (hraničný bod) plochy P, ak $h(x) \in S^1 \subset D^2$.
Tvrdenie: Táto definícia nezávisí od výberu okolia A ani homeomorfizmu h.
Def: Množina všetkých okrajových bodov plochy P sa nazýva **okraj** plochy P, označujeme ∂P, $P - \partial P$ sa nazýva **vnútro plochy**.
Plocha, ktorá je kompaktná a taká, že $\partial P = \emptyset$ sa nazýva **uzavretá plocha**.
Def: Plocha P sa nazýva **orientovateľná**, ak pri obehnutí po ploche P po ľubovoľnej uzavretej ceste prenesieme zvolený súradnicový systém do koncového (=začiatočného) bodu tak, že výsledný súradnicový systém súhlasí s pôvodným, pri prenose dávame pozor, aby sme súradnicový systém "nezmenili".
neorientovateľná = ak nie je orientovateľná.

Klasifikácia uzavretých plôch

Def: Nech P_1, P_2 sú dve uzavreté plochy. Nech $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$, $h_1 : D_1 \to D^2$, $h_2 : D_2 \to D^2$ sú homeomorfizmy, pričom $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$.
$h_2^{-1} \circ h_1 : D_1 \to D_2$ je homeomorfizmus, zobrazuje okraj na okraj.
Vyrežme $\mathring{D}_1$ z P_1 a $\mathring{D}_2$ z P_2. Dostaneme $P_1 - \mathring{D}_1$, $P_2 - \mathring{D}_2$ plochy s okrajom.
$\partial(P_1 - \mathring{D}_1) \approx \partial D_1$
$\partial(P_2 - \mathring{D}_2) \approx \partial D_2$
$h_2^{-1} \circ h_1 : \partial D_1 \to P_2 - \mathring{D}_2$
∂D_1 je uzavretý podpriestor v $P_1 - \mathring{D}_1$, čiže môžeme prilepiť plochu $P_1 - \mathring{D}_1$ k ploche $P_2 - \mathring{D}_2$ pomocou $h_2^{-1} \circ h_1$.
Výsledok zlepenia je tiež plocha a topologicky nezávisí od výberu homeomorfizmov h_1, h_2.
Výslednú plochu značíme $P_1 \# P_2$, je to tzv. **súvislá suma** plôch P_1 a P_2.
Veta: Každá uzavretá plocha je homeomorfná s jednou (a iba jednou) z týchto plôch:
$P_m = S^2 \# T^2 \# \ldots \# T^2$, kde $m \geq 0$
$\tilde{P}_k = S^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2$, kde $k \geq 1$
Plocha P_m sa nazýva **orientovateľná plocha rodu m**, plocha $\tilde{P}_k$ sa nazýva **neorientovateľná plocha rodu k**.

Topologické variety s okrajom

Def: Hausdorffovský topologický priestor M so spočítateľnou bázou topológie je **n-rozmerná topologická varieta s okrajom**, ak každý bod má okolie homeomorfné s uzavretým diskom D^n.

Ak M je n-rozmerná topologická varieta s okrajom a pre $x \in M$ je $h : A \to D^n$ homeomorfizmus, tak bod x je **vnútorný bod** M, ak $h(x) \in \mathring{D}^n$ a x je **okrajový bod** M, ak $x \in S^{n-1} \subset D^n$.
∂M je množina všetkých okrajových bodov variety M, nazýva sa **okraj variety** M.
Ak M je kompaktná a $\partial M = \emptyset$, tak je to tzv. **uzavretá varieta**.
Tvrdenie: Ak ∂M je okraj n-rozmernej topologickej variety, tak ∂M je $(n-1)$-rozmerná varieta bez okraja.
Lema: Nech M je n-rozmerná topologická varieta, nech $\partial M \neq \emptyset$. Potom pre ľubovoľný bod $z \in \partial M$ existuje okolie $W \ni z$ také, že existuje homeomorfizmus $h : D^{n-1} \times I \to W$ taký, že $h(0,0) = z$ a $h(D^{n-1} \times \{0\}) = W \cap \partial M$.

Priliepanie n-rozmernej bunky k priestoru

Def: Nech X je topologický priestor (podľa dohody hausdorffovský) a nech $f : S^{n-1} \to X$ je spojité zobrazenie. S^{n-1} je uzavretý podpriestor v D^n. Prilepme D^n k X pomocou f pozdĺž S^{n-1}, vznikne priestor $X \cup_f D^n$
$X \cup_f D^n = X + D^n / \sim$, kde $\sim$ je generované tým, že $a \sim f(a)$ pre $a \in S^{n-1}$.
$p : X + D^n \to X + D^n / \sim = X \cup_f D^n$ je kanonická projekcia, $p(z) = [z]$.
$e^n := p(\mathring{D}^n) \approx \mathring{D}^n$ sa volá n-rozmerná bunka priestoru $X \cup_f e^n$
Tvrdenie: $p|_{D^n} : (D^n, S^{n-1}) \to (X \cup_f e^n, p(X))$ je relatívny homeomorfizmus.
Tvrdenie: Pár priestorov (Z, X) a relatívny homeormorfizmus $F : (D^n, S^{n-1}) \to$ (Z,X), kde Z je hausdorffovský a X je uzavretý. Potom Z je priestor, vzniknutý z X prilepením jednej n-rozmernej bunky pomocou $F|_{S^{n-1}}$, t.j. $Z \approx X \cup_{F|S^{n-1}} e^n$.
Veta: Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, nech na X je relácia ekvivalencie $\sim_R$ a na Y je relácia ekvivalencie daná rovnosťou. Ak f rešpektuje dané relácie ekvivalencie, tak $\overline{f} : X/\sim_R \to Y$; $\overline{f}([z]) = f(z)$ je dobre definované spojité zobrazenie.
Veta: Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, $\sim_R$ je relácia na X, $\sim_S$ je relácia daná rovnosťou na Y. Ak pre každé $z \in X$ je množina $f(p^{-1}[z])$ jednobodová, tak máme dobre definované zobrazenie $fp^{-1} : X/\sim_R \to Y$
$fp^{-1}([z]) = f(p^{-1}[z])$.
Veta: Nech A je uzavretý podpriestor priestoru X a $f : A \to Y$ je spojité zobrazenie. Nech $\varphi : X \to Z$, $\psi : Y \to Z$ sú spojité zobrazenia také, že diagram
$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi \\ Y & \overset{\psi}{\to} & Z \end{array}$$
komutuje.
Potom $(\varphi + \psi)p^{-1} : Y \cup_f X \to Z$ je dobre definované a spojité. [$\varphi + \psi : X + Y \to Z$ je spojité zobrazenie.
$(\varphi + \psi)|_X = \varphi$, $(\varphi + \psi)|_Y = \psi$]
Veta: Nech Z je hausdorffovský topologický priestor a nech X je jeho uzavretý podpriestor taký, že existuje relatívny homeomorfizmus $F : (D^n, S^{n-1}) \to (Z, X)$. Potom priestor Z je homeomorfný s priestorom, ktorý vznikne z X tak, že k X prilepíme pomocou zobrazenie $F|_{S^{n-1}}$ jednu n-rozmernú bunku.
Tvrdenie: Projektívny priestor $\mathbb{R}P^n$ sa dostane z $\mathbb{R}P^{n-1}$ tak, že k $\mathbb{R}P^{n-1}$ vhodne prilepíme jednu n-rozmernú bunku, t.j. $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n$
(Z toho: $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{n-1} \cup e^n$)

Súvislé a lineárne súvislé priestory

Def: Topologický priestor $X \neq \emptyset$ je súvislý, ak okrem $\emptyset$ a X v ňom nie sú iné obojaké (t.j. otvorené aj uzavreté) množiny.
Def: **Cesta** v topologickom priestore X je ľubovoľné spojité zobrazenie $c : I =< 0,1 > \to X$, presnejšie c je cesta z bodu $c(0)$ do $c(1)$. Hovoríme tiež, že c sa začína v $c(0)$ a končí v $c(1)$.
Hovoríme, že $x_0, x_1 \in X$ **sa dajú spojiť cestou v** X, ak existuje cesta c v X taká, že $c(0) = x_0$ a $c(1) = x_1$.
opačná cesta k c: $\overline{c}(t) = c(1-t)$
spojenie ciest c a d:
$$c * d(t) = \{ \begin{array}{cc} c(2t) & t \in < 0, \frac{1}{2} > \\ d(2t-1) & t \in < \frac{1}{2}, 1 > \end{array}$$

Lema: Nech $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, kde všetky A_i sú uzavreté v X. Potom ľubovoľné zobrazenie $f : X \to Y$ je spojité $\Leftrightarrow$ $f|_{A_i}$ je spojité pre $i = 1, \ldots, k$.
Tvrdenie: Relácia $\sim$ definovaná: $x \sim y \Leftrightarrow$ existuje cesta v X z x do y, je relácia ekvivalencie.
Def: Trieda ekvivalencie priestoru X vzhľadom na reláciu ekvivalencie $\sim$ sa nazýva **komponent lineárnej súvislosti** priestoru X.
X je **lineárne súvislý**, ak má jediný komponent súvislosti (t.j. každé 2 body sa dajú spojiť cestou v X).
Veta: Každý lineárne súvislý topologický priestor je súvislý.
Lema: Nech $X \neq \emptyset$ je priestor taký, že každé 2 body z X ležia v súvislom podpriestore. Potom X je súvislý priestor.
Lema: Nech $A \subset B \subset \overline{A}$. Ak A je súvislý, tak aj B je súvislý.
Priestor $\overline{X}$, kde $X = \{(x, sin(\frac{1}{x}));\ x \in \mathbb{R}\}$, je príklad priestoru, ktorý je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.
Def: Pre daný topologický priestor X označujeme $\Pi_0(X)$ množinu komponentov lineárnej súvislosti priestoru X.
Tvrdenie: Nech $f : X \to Y$ je spojité. Ak X je lineárne súvislý, tak aj $f(X)$ je lineárne súvislý.
Veta: Nech $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom f zobrazí každý komponent lineárnej súvislosti priestoru X do nejakého komponentu lineárnej súvislosti priestoru Y.
Teda f jednoznačne určuje zobrazenie $\Pi_0(f) : \Pi_0(X) \to \Pi_0(Y)$.
$\Pi_0(f)(K_L(x)) = K_L(f(x))$
Ak f je homeomorfizmus, tak $\Pi_0(f) : \Pi_0(X) \to \Pi_0(Y)$ je bijekcia.

Lokálne lineárne súvislé priestory

Def: Topologický priestor X je **lokálne lineárne súvislý**, ak každý jeho bod v každom svojom okolí obsahuje lineárne súvislé podokolie.
Poznámka: Lineárne súvislý topologický priestor nemusí byť lokálne lineárne súvislý.
Veta: Nech X je lokálne lineárne súvislý topologický priestor. Potom komponenty lineárnej súvislosti priestoru X sú otvorené aj uzavreté (obojaké).
Dôsledok: Priestor, ktorý je súvislý a lokálne lineárne súvislý je aj lineárne súvislý.

Homotópia

Def: Nech $f, g : X \to Y$ sú spojité zobrazenia. Hovoríme, že f je **homotopné** s g ($f \simeq g$, f sa dá homotopicky zdeformovať na g), ak existuje spojité zobrazenie $H : X \times I \to Y$ také, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ pre každé $x \in X$.
H je **homotópia** od f ku g.
Vlastne: $\forall t \in I$ H definuje spojité zobrazenie $h_t : X \to Y$; $h_t(x) = H(x, t)$.
To, že H je spojité znamená to, že systém zobrazení $\{h_t\}_{t \in I}$ je spojitý.
To, že H je homotópia od f ku g znamená, že $h_0 = f$ a $h_1 = g$.
Def: Ak $f, g : X \to Y$ sú spojité zobrazenia, také, že pre dáku podmnožinu $A \subset X$ máme $f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A$, hovoríme, že f a g sú **homotopné rel** A, ak existuje homotópia $H : X \times I \to Y$ taká, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ a $H(a, t) = f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A, t \in I$.
H=**homotópia rel** A od f ku g.
$f \simeq g(relA)$
Tvrdenie: Na triede spojitých zobrazení z X do Y (pre dané X, Y) je relácia $\simeq$ reláciou ekvivalencie.
Def: Triedy ekvivalencie $\simeq$ sa nazývajú **homotopické triedy** zobrazení z X do Y.
Veta: Spojité zobrazenie $f : S^n \to X$ sa dá rozšíriť na spojité zobrazenie $F : D^{n+1} \to X \Leftrightarrow f$ je homotopné s konštantným zobrazením; $f \simeq const$.
Def: Zobrazenie, ktoré je homotopné s konštantným zobrazením sa tiež nazýva **nula-homotopné** (alebo homotopné s nulou).
Veta: 1.Nech $f, g : X \to Y$, nech $A \subset X$ a $f|_A = g|_A$.
Nech $h : Y \to Z$ je ľubovoľné spojité zobrazenie.
Ak $f \simeq g(relA)$, tak aj $h \circ f \simeq h \circ g(relA)$.
2. V situácii z 1, ak $k : W \to X$ a $f \simeq g(relA)$, tak $f \circ k \simeq g \circ k(rel\ k^{-1}(A))$
Def: Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva **homotopická ekvivalencia**, ak existuje spojité zobrazenie $g : Y \to X$ také, že $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$.
(g sa tiež zvykne volať ľavé homotopicky inverzné zobrazenie ku f a naopak, f a g sú navzájom homo-

topicky inverzné.)
Priestory X, Y sú **homotopicky ekvivalentné** (=**majú ten istý homotopický typ**), ak existuje homotopická ekvivalencia $f : X \to Y$. Budeme označovať $X \sim Y$ (v literatúre aj $X \cong Y$)
Platí: Topologicky ekvivalentné topologické priestory sú homotopicky ekvivalentné (homeomorfizmus je homotopická ekvivalencia).
Tvrdenie: Relácia homotopickej ekvivalencie je relácia ekvivalencie na triede topologických priestorov.
$\mathbb{R}^n \sim \{x\}$
$\mathbb{R}^n - \{0\} \sim S^{n-1}$
Def: Ak A je topologický podpriestor X a $i : A \hookrightarrow X$ a $r : X \to A$ je (spojité) také, že $r \circ i = id_A$ (t.j. $r|_A \equiv id_A$), tak r sa nazýva **retrakcia** (stiahnutie) priestoru X na podpriestor A. (A je **retrakt** X.)
Ak $r : X \to A$ je retrakcia taká, že $i \circ r \simeq id_X$, tak r sa nazýva **deformačná retrakcia**. (A je **deformačný retrakt** priestoru X).
Ak $i \circ r \simeq id_X(relA)$, tak r je **silná deformačná retrakcia**.
Def: Priestor X sa nazýva **kontraktibilný** (stiahnuteľný), ak pre dáke $x \in X$ platí, že $\{x\}$ je deformačným retraktom priestoru X.
Tvrdenie: Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow$ X je homotopicky ekvivalentný s jednobodovým priestorom.
Tvrdenie: Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow id_X \simeq const.$
Tvrdenie: Nech $f : X \to S^n$, $n \geq 1$ je spojité zobrazenie také, že $f(X) \neq S^n$. Potom $f \simeq const.$
Tvrdenie: $CX = X \times I/X \times \{1\}$ je kontraktibilný.

Fundamentálna grupa topologického priestoru

Def: $\Omega(X, x_0)$ = množina všetkých ciest v X, ktoré začínajú aj končia v x_0.
Prvky z $\Omega(X, x_0)$ sa nazývajú slučky.
Veta: Nech $c, d : I \to X$ sú cesty také, že $c(1) = d(0)$ a nech $c', d' : I \to X$ sú cesty také, že $c'(1) = d'(0)$. Ak $c \simeq c'(rel\{0, 1\})$ a $d \simeq d'(rel\{0, 1\})$, tak $c * d \simeq c' * d'(rel\{0, 1\})$.
Okrem toho: $c^- \simeq c'^- rel\{0, 1\}$
Dôsledok: Na množine homotopických tried $rel\{0, 1\}$ slučiek priestoru X v bode x_0 predpis $[c] \cdot [d] = [c * d]$ dobre definuje binárnu operáciu.
Lema: Nech $c : I \to X$ je cesta. Nech $\alpha : I \to I$ je spojité zobrazenie také, že $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Potom $c \circ \alpha \simeq c(rel\{0, 1\})$.
Def: Nech $c, d : I \to X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0, 1)$. Potom definujeme novú cestu $c *_q d$.

$$c *_q d(t) = \{ \begin{array}{rl} c(\frac{t}{q}) & t \in <0, q> \\ d(\frac{t-q}{1-q}) & t \in <q, 1> \end{array}$$

Veta: Nech $c, d : I \to X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0, 1)$. Potom $(c *_q d) \circ \alpha = c * d$ pre vhodné $\alpha : I \to I$; $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Čiže $c *_q d \simeq c * d(rel\{0, 1\})$.
Veta: Nech c, d, f sú také cesty v X, že sa dajú skladať. Potom: $(c * d) * f \simeq c * (d * f)rel\{0, 1\}$.
Dôsledok: Operácia $\cdot$ na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek v $x_0 \in X$ definovaná pomocou spájania ciest je asociatívna.
$([c] \cdot [d]) \cdot [f] = [c] \cdot ([d] \cdot [f])$ pre ľubovoľné $c, d, f \in \Omega(X, x_0)$.
Veta: Nech $c : I \to X$ je cesta v X a nech $c(0)$ resp. $c(1)$ sú konštantné cesty v $c(0)$ resp. $c(1)$. Potom
$c(0) * c \simeq c\ rel\{0, 1\}$,
$c * c(1) \simeq c\ rel\{0, 1\}$.
Dôsledok: Konštantná slučka v $x_0 \in X$ je neutrálnym prvkom operácie $\cdot$ na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek v $x_0 \in X$.
Veta: Pre ľubovoľnú cestu $c : I \to X$.
$c * c^- \simeq c(0)\ rel\{0, 1\}$
$c^- * c \simeq c(1)\ rel\{0, 1\}$
Dôsledok: Pre $c \in \Omega(X, x_0)$ máme, že $[c^-] = [c]^{-1}$
Veta: Nech X je topologický priestor, pevne zvoľme $x_0 \in X$. Ak na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek priestoru X v bode x_0 definujeme operáciu $\cdot$ predpisom $[c] \cdot [d] = [c * d]$, tak dostaneme z tejto množiny grupu; označme ju $\pi(X, x_0)$.

Def: Grupa $\pi(X, x_0)$ sa nazýva **fundamentálna grupa** priestoru X v bode x_0 (s referenčným (bázovým) bodom x_0).

Závislosť $\pi(X, x_0)$ od x_0

Def: Ak $r : I \to X$ je cesta v X, $r(0) = x_1$, $r(1) = x_0$, definujeme $\alpha_r : \Omega(X, x_0) \to \Omega(X, x_1)$, $\alpha_r(c) = r * c * r^-$.
Toto zobrazenie indukuje zobrazenie fundamentálnych grúp:
$\alpha_r : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1)$
$\alpha_r[c] = [r * c * r^-]$
Tvrdenie: $\alpha_r : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1)$
1. je homomorfizmus grúp
2. je izomorfizmus grúp
3. α_r závisí od homotopickej triedy $rel\{0, 1\}$ cesty r.
4. Ak $s : I \to X$ je cesta z x_1 do x_0, tak α_r a α_s sa líšia o vnútorný automorfizmus grupy $\pi(X, x_1)$
(Teda ak $\pi(X, x_1)$ je komutatívna, tak máme $\alpha_r = \alpha_s$, t.j. izomorfizmus $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$ nezávisí od výberu cesty z x_0 do x_1 (ak taká cesta existuje).)
Dôsledok: Ak priestor X je lineárne súvislý, tak pre ľubovoľné $x_0, x_1 \in X$ máme $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$.
(vo všeobecnosti tento izomorfizmus nie je kanonický - závisí od homotopickej triedy rel{0,1})
Potom $\pi(X, x_0)$ označujeme $\pi(X)$.
Lema: Nech $c, d : I \to X$ sú uzavreté cesty a nech $H : I \times I \to X$ je homotópia od c ku d taká, že $H(0, s) = H(1, s)\ \forall s \in I$
(=t.j. cez uzavreté cesty). Nech $h : I \to X$ je cesta definovaná ako $h(s) = H(0, s)$ pre $s \in I$.
Potom $\alpha_h([d]) = [c]$.
Def: Pre spojité zobrazenie $f : X \to Y$, definujeme
$\pi(f) : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$
$\pi(f)([c]) = [f \circ c]$
Tvrdenie: $\pi(f) : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$ je homomorfizmus grúp.

Ak $g : Y \to Z$ je spojité, tak $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$. T.j. ak diagram
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$
komutuje, tak

komutuje aj
$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\pi(f)"] \arrow[dr, "\pi(g\circ f)"'] & \pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\pi(g)"] \\ & \pi(Z, gf(x_0)). \end{tikzcd}$$
Okrem toho $\pi(id_X) = id_{\pi(X, x_0)}$
Veta: Nech $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ sú spojité zobrazenia, nech $x_0 \in X$. Nech $f \simeq g$ a $H : X \times I \to Y$ je homotópia od f ku g. Definujme cestu $h : I \to Y$, $h(s) = H(x_0, s)$. (cesta z $f(x_0)$ do $g(x_0)$) Potom $\alpha_h \circ \pi(g) = \pi(f)$ a α_h je izomorfizmus.
$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\pi(g)"] \arrow[dr, "\pi(f)"'] & \pi(Y, g(x_0)) \arrow[d, "\alpha_h \cong"] \\ & \pi(Y, f(x_0)) \end{tikzcd}$$
Dôsledok: $\pi(g)$ je izomorfizmus $\Leftrightarrow$ $\pi(f)$ je izomorfizmus.
Veta: Nech X, Y majú ten istý homotopický typ. Potom ich fundamentálne grupy sú izomorfné.
Dôsledok: Fundamentálna grupa ľubovoľného kontraktibilného priestoru je triviálna.
Tvrdenie: Nech X, Y sú topologické priestory, nech $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Potom $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.

Fundamentálna grupa kružnice

Veta: $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.
Lema: Označme $\Phi : \mathbb{R} \to S^1$, $\Phi(t) = e^{2\pi i t}$ Nech $c : I \to S^1$ je ľubovoľná slučka v 1. Potom existuje jediná cesta $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}$ taká, že: $\tilde{c}(0) = 0$ a $\Phi \circ \tilde{c} = c$. ($\tilde{c}$ sa nazýva zdvih cesty c do $\mathbb{R}$.)
Tvrdenie: V situácii z predchádzajúcej lemy je $\tilde{c}(1) \in Z$.
Veta: Nech $c, d \in \Omega(S^1, 1)$ sú homotopné $rel\{0, 1\}$. Nech $H : I \times I \to S^1$ je homotópia $rel\{0, 1\}$ od c ku d. Potom existuje jediná homotópia $rel\{0, 1\}$ $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ od $\tilde{c}$ ku $\tilde{d}$ taká, že $\Phi \circ \tilde{H} = H$.

Dôsledok: Ak $[c] = [d] \in \pi(S^1, 1)$, tak $\tilde{c} \simeq \tilde{d}(rel\{0,1\})$, a preto $\tilde{c}(1) = \tilde{d}(1)$. Teda predpis $[c] \mapsto \tilde{c}(1)$ dobre definuje zobrazenie $\chi : \pi(S^1) \to \mathbb{Z}$.
Tvrdenie: χ je izoomorfizmus grúp.
Tvrdenie: S^1 nie je retraktom gule D^2.
Tvrdenie: Torus T má fundamentálnu grupu $\pi(T) \cong \mathbb{Z}^2$.

Obehové číslo uzavretej krivky v $\mathbb{C}$

Def: Nech $a \in \mathbb{C}$, nech $c : I \to \mathbb{C} - \{a\}$ je uzavretá krivka. Definujme spojité zobrazenie $r_a : \mathbb{C} - \{a\} \to S^1$
$r_a(z) = \frac{z-a}{|z-a|}$
Potom $r_a \circ c : I \to S^1$ je slučka v S^1 v bode $r_a(c(0)) = r_a(c(1))$ a $r_a \circ c \in \pi(S^1, r_a(c(0))$. S^1 je lineárne súvislý a $h : I \to S^1$ je ľubovoľná cesta z 1 do $r_a \circ c(0)$. Pretože $\pi(S^1, 1)$ je komutatívna existuje kanonický (nezávislý od voľby h) izomorfizmus $\alpha_h : \pi(S^1, r_a \circ c(0)) \to \pi(S^1, 1)$.
Potom $\alpha_h \circ \pi(r_a)[c] \in \pi(S^1, 1)$, čiže pomocou χ možno priradiť jednoznačné číslo.
Def: V situácii popísanej vyššie sa celé číslo $\chi \circ \alpha_h \circ \pi(r_a)[c]$ nazýva **obehové číslo** uzavretej krivky c vzhľadom na a.
Označujeme $\rho(c, a)$
Poznámka: $\rho(c, a)$ znamená počet obehov okolo bodu a pri prejdení po krivke c z c(0) do c(1).
Tvrdenie: $\rho(e^{2\pi ik}, 0) = k$
Veta: Nech $c, d : I \to \mathbb{C} - \{a\}$ sú 2 uzavreté cesty a nech $H : I \times I \to \mathbb{C} - \{a\}$ je homotópia od c ku d cez uzavreté krivky, t.j. $H(s, 0) = H(s, 1) \forall s \in I$
Potom $\rho(c, a) = \rho(d, a)$
Veta: (E.Rouché) Nech $c, d : I \to \mathbb{C} - \{a\}$ sú uzavreté cesty také, že $|c(t) - d(t)| < |c(t) - a|$. Potom $\rho(c, a) = \rho(d, a)$. (a neleží medzi $c(I)$ a $d(I)$.)
Veta: Nech $f : D^2 \to \mathbb{C}$ je spojité zobrazenie. Definujme uzavretú cestu $c : I \to \mathbb{C}$, $c(t) = f(e^{2\pi it})$.
Potom ak $\rho(c, a) \neq 0$, tak $a \in f(D^2)$
Veta: (Základná veta algebry) Polynóm $p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ pre $k \geq 1$, $a_0 \neq 0$,$a_i \in \mathbb{C}$ má koreň v $\mathbb{C}$.

Seifert-Van Kampenova veta

Def: Nech A,B,C sú grupy a $f : A \to B$, $g : A \to C$ sú homomorfizmy grúp. Potom hovoríme, že diagram grúp a homomorfizmov medzi nimi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \\ C \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

sa nazýva **pushout** dvojice (f, g), ak

1. komutuje, t.j. $u \circ f = v \circ g$

2. Pre ľubovoľnú grupu G' a homomorfizmy $u' : B \to G'$, $v' : C \to G'$ také, že

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u'"] \\ C \arrow[r, "v'"] & G' \end{tikzcd}$$

komutuje, existuje jediný homomorfizmus $h : G \to G'$ taký, že $h \circ u = u'$, $h \circ v = v'$.

Tvrdenie: Ak diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \\ C \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

je pushout dvojice homomorfizmov (f, g), tak G je určená jednoznačne odhliadnuc od izomorfizmu. (Preto sa tiež hovorí o G ako o pushoute dvojice (f, g).)
Veta: (Seifert-Van Kampen) Nech X je lineárne súvislý priestor a nech X_1, X_2 sú jeho otvorené podpriestory také, že $X_0 := X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = X$. Nech X_0, X_1, X_2 sú lineárne súvislé. Označme $i_1 : X_0 \hookrightarrow X_1$, $i_2 : X_0 \hookrightarrow X_2$, $j_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $j_2 : X_2 \hookrightarrow X$ inklúzie. Potom diagram

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \overset{i_1}{\hookrightarrow} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \overset{j_2}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

komutuje.
Pre $x_0 \in X$ je diagram indukovaný predchádzajúcom diagramom pushoutom t.j.

$$\begin{array}{ccc} \pi(X_0,x_0) & \xrightarrow{\pi(i_1)} & \pi(X_1,x_0) \\ {\scriptstyle\pi(i_1)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi(j_1)} \\ \pi(X_2,x_0) & \xrightarrow{\pi(j_2)} & \pi(X,x_0)) \end{array}$$ je pushout dvojice $(\pi(i_1),\pi(i_2))$.

Veta: Nech X je lineárne súvislý priestor a nech $f: S^{n-1} \to X$ $(n \geq 2)$ je spojité. Označme $Y = X \cup_f D^n$.
Potom (pre $y_0 \in Y$): $\pi(Y,y_0) \cong \pi(X, f(1,0,\ldots,0))/N(\pi(f)(\pi(S^{n-1},(1,0,\ldots,0))))$
Lema: (Whitehead) Nech X a Y sú topologické priestory. Nech $f : X \to Y$ je surjektívne zobrazenie. Ak topológia Y je faktorová vzhľadom na f, tak potom pre každý lokálne kompaktný priestor A má priestor $X \times A$ faktorovú topológiu vzhľadom na zobrazenie $f \times id_A : X \times A \to Y \times A$.
Dôsledok: Ak $n \geq 2$, tak $\pi(S^n) = 0$.
Def: Priestor, ktorý má triviálnu fundamentálnu grupu, sa nazýva **jednoducho súvislý** priestor.
Dôsledok: Nech X je lineárne súvislý a $Y = X \cup_f D^n$, $n \geq 3$. Potom $\pi(X) \cong \pi(Y)$.
Veta: $\pi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$.
Pr: Príkladom priestoru, ktorý má nekomutatívnu fundamentálnu grupu je osmička, resp. homotopicky ekvivalentný priestor $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$.

Kategórie

Def: Kategória $\mathcal{C}$ pozostáva z triedy objektov $Obj(\mathcal{C})$ (prvky $Obj(\mathcal{C})$ - **objekty kategórie** $\mathcal{C}$) a pre každú dvojicu $(X,Y) \in Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$ z množiny $\mathcal{C}(X,Y)$ (jej prvky sú **morfizmy** z X do Y) pričom, ak $(X,Y) \neq (X',Y')$, tak $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{C}(X',Y') = \emptyset$ a sú splnené tieto podmienky:
1. Pre $(X,Y),(Y,Z) \in Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$ je definované
$\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$
- tzv. **skladanie morfizmov**, pričom
a) Ak $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$, $h \in \mathcal{C}(Z,W)$, tak

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(axióma asociatívnosti).
b) Pre každé $X \in Obj(\mathcal{C})$ existuje jediný morfizus id_X taký, že

$$f \circ id_X = f$$

pre každé $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ a

$$id_Y \circ f = f$$

pre každé $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. (axióma identity)
Ak $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, tak X sa nazýva definičný obor a Y obor hodnôt.
Def: Ak $g \circ f = id_X$, tak g je **ľavý inverzný k** f a f je **pravý inverzný ku** g. Morfizmus, ku ktorému existuje pravý aj ľavý inverzný sa nazýva **izomorfizmus**.
Def: Kovariantný funktor z kategórie $\mathcal{C}$ do kategórie $\mathcal{D}$ je funkcia $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ktorá každému objektu $X \in Obj(\mathcal{C})$ priradí $T(X) \in Obj(\mathcal{D})$ a každému morfizmu $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ priradí $T(f) \in \mathcal{D}(T(X),T(Y))$, pričom:
1. $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$
2. $T(id_X) = id_{T(X)}$.
Def: Kontravariantný funktor z kategórie $\mathcal{C}$ do kategórie $\mathcal{D}$ je funkcia $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ktorá každému objektu $X \in Obj(\mathcal{C})$ priradí $T(X) \in Obj(\mathcal{D})$ a každému morfizmu $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ priradí $T(f) \in \mathcal{D}(T(Y),T(X))$, pričom:
1. $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$
2. $T(id_X) = id_{T(X)}$.
Def: Direktný súčin grúp $\prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha =$ karteziánsky súčin s operáciami definovanými po zložkách.
Direktný súčet grúp - ako direktný súčin, ale len konečný počet indexov je nenulový.
Ak máme G_α podgrupy G a $G_\alpha \cup \bigoplus\limits_{\beta \neq \alpha} G_\beta = \{0\}$, tak direktný súčet $\bigoplus\limits_{\alpha \in A}$ tvoria súčty prvkov z G_α.
Def: Voľná abelovská grupa generovaná množinou M - ozn. $\mathbb{Z} < M >$.
Báza=taká množina, že každý prvok v grupe je celočíselnou kombináciou prvkov z bázy.

Ak existuje báza v grupe G, tak G sa nazýva voľná.
rang grupy G (voľná abelovská grupa generovaná konečnou množinou) = počet prvkov bázy.
Def: $\mathbb{Z}$-graduovaná abelovská grupa je systém $G = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$, kde G_α sú abelovské grupy.
Ak G,H sú graduované abelovské grupy, tak homomorfizmus graduovaných grúp $f : G \to H$ je systém $\{f_\alpha : G_\alpha \to H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$, kde každé $f_\alpha : G_\alpha \to H_\alpha$ je homomorfizmus abelovských grúp.
Def: Torzná podgrupa = podgrupa prvkov konečného rádu abelovskej grupy A.
Konečne generovanú grupu môžeme zapísať v tvare: $A \cong \mathbb{Z} \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}_{k_1} \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z}_{k_s}$, čiže ako súčet voľnej časti a torzie.
$rang(A)$ = počet sčítancov vo voľnej časti.

Exaktné postupnosti homomorfizmov abelovských grúp

Def: Postupnosť $G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je **exaktná** v G, ak $Ker(\beta) = Im(\alpha)$.
Def: Postupnosť $\dots G_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} G_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \dots$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je **exaktná**, ak každá postupnosť $G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_{n+2}$ je exaktná v G_{n+1}. $(\forall n \in \mathbb{Z})$.
Def: Exaktná postupnosť $0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 0$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi sa nazýva **krátka exaktná postupnosť**.
Tvrdenie: a) Postupnosť $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ je exaktná $\Leftrightarrow$ α je monomorfizmus grúp.
b) Postupnosť $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je exaktná $\Leftrightarrow$ α je epimorfizmus grúp.
c) Postupnosť $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je exaktná $\Leftrightarrow$ α je izomorfizmus grúp.
Veta: Nech $0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 0$ je krátka exaktná postupnosť. Potom nasledujúce 2 podmienky sú ekvivalentné:
i) existuje homomorfizmus $\lambda : G'' \to G$ taký, že $\beta \circ \lambda = id_{G''}$.
ii) existuje homomorfizmus $\mu : G \to G'$ taký, že $\mu \circ \alpha = id_{G'}$.
Navyše, ak platí hociktorá z podmienok i,ii, tak $G \cong G' \oplus G''$.
Def: V situácii z vety, ak platí hociktorá z podmienok i,ii, tak hovoríme, že daná krátka exaktná postupnosť sa **štiepi** (je **rozštiepená**).
λ, μ - štiepiace zobrazenia
Lema: (5-Lema) Nech je daný komutatívny diagram grúp a homomorfizmov medzi nimi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r] \arrow[d, "k"] & E \arrow[d, "l"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

s exaktnými riadkami. Ak f, g, k, l sú izomorfizmy, tak aj h je izomorfizmus.

Reťazcové komplexy

Def: Δ_q = **q-rozmerný štandardný simplex** = konvexný obal koncových bodov bázových vektorov $e_0, \dots e_q$ v $\mathbb{R}^{q+1} = \{(t_0, \dots, t_q); t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{q} t_i = 1\}$.
Body $e_0, \dots, e_q$ sa volajú vrcholy Δ_q.
Množina $\{(t_0, \dots, t_q) \in \Delta_q;\ t_i = 0\}$ pre dáke i sa nazýva ***i*-ta stena** simplexu Δ_q, leží oproti vrcholu e_i.
Definujeme zobrazenie $d_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ $d_q^i(t_0, \dots, t_{q-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{q-1})$ pre každé $i = 0, \dots, q$. (tzv. stenové zobrazenie)
Lema: $i, j \in \{0, 1, \dots, q\}$ také, že $j < i$ máme $d_q^i \circ d_{q-1}^j = d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}$.
Def: Singulárny q-rozmerný simplex topologického priestoru X je spojité zobrazenie $f : \Delta_q \to X$.
$S_q(X)$:= voľná abelovská grupa generovaná množinou všetkých q-simplexov priestoru X pre $q \geq 0$ a $S_q(X) := 0$ pre $q < 0$.
Definujme homomorfizmus
$\partial_q^i : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$
$\partial_q^i(f) = f \circ d_q^i$ pre $i = 0, \dots, q$
Definujeme **hraničný operátor**:
$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$
$\partial_q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_q^i$, ak $q \geq 0$, inak $\partial_q = 0$.

Veta: $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$.
Def: Prvky z $S_q(X)$ sa volajú **q-rozmerné singulárne reťazce** priestoru X.
Def: Postupnosť $S(X) = (S_q(X), \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ sa nazýva **singulárny reťazcový komplex** topologického priestoru X.
Pre spojité zobrazenie $f : X \to Y$ definujeme $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y)$, $S_q(f)(T) = f \circ T$ pre $q \geq 0$, pre $q < 0$ je $S_q(f)$ nulové zobrazenie.
Veta: Ak $f : X \to Y$ je spojité, tak diagram

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "S_q(f)"] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "S_{q-1}(f)"] & S_{q-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "S_{q-2}(f)"] & {} \\
{} \arrow[r] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"] & S_{q-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & S_{q-2}(Y) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

komutuje, t.j. $\forall q \in \mathbb{Z}$ máme $S_{q-1}(f) \circ \partial_q = \partial_q \circ S_q(f)$.
Tvrdenie: Ak $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sú spojité, tak $S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f)$ a $S_q(id_X) = id_{S_q(X)}$.
Def: **Reťazcový komplex** je postupnosť $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, kde K_q sú abelovské grupy a $\partial_q : K_q \to K_{q-1}$ je homomorfizmus grúp (pre všetky $q \in \mathbb{Z}$) taký, že $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.
Ak $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ sú dva reťazcové komplexy, tak **homomorfizmom reťazcových komplexov** z K do L rozumieme postupnosť $f = (f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ homomorfizmov $f_q : K_q \to L_q$ takých, že $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$.
Stručne hovoríme o homomorfizme reťazcových komplexov $f : K \to L$.
(∂_q sa aj tu volá **hraničný operátor**).
Tvrdenie: Je jasné, že ak $f : K \to L$, $g : L \to M$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak aj $g \circ f : K \to M$ je homomorfizmus reťazcových komplexov, $id_K : K \to K$ je tiež homomorfizmus reťazcových komplexov.
Def: $\mathcal{K}$=kategória všetkých reťazcových komplexov a homomorfizmov medzi nimi.
Def: Reťazcový komplex E taký, že $E_0 = \mathbb{Z}$ a $E_q = 0$ pre $q \neq 0$ sa nazýva **augmentačný komplex**.
"Máme reťazcový komplex, ktorý vyzerá neškodný, a škodný vcelku nie je, ale je užitočný." (J.K.)
Def: Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex. Potom označme $Z_q(K) := Ker(\partial_q)$, $B_q(K) := Im(\partial_{q+1})$.
Tvrdenie: $B_q(K)$ je podgrupa grupy $Z_q(K)$.
Def: $Z_q(K)$=**grupa q-cyklov** reťazcového komplexu K.
$B_q(K)$=**grupa q-hraníc** reťazcového komplexu K.
Def: Ak $K = (K_q, \partial_q)$ je reťazcový komplex, tak faktorová grupa $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ sa nazýva **q-ta grupa homológií** (q-ta homologická grupa) komplexu K.
Jej prvky označujeme $[c] \in H_q(K)$.
Def: Relácia ekvivalencie na grupe $Z_q(K)$ určená podrupou $B_q(K)$ sa nazýva **homológia**.
$c, d \in Z_q(K) :\ c \simeq d \Leftrightarrow c - d \in B_q(K) \Leftrightarrow c - d = \partial_{q+1}(a)$ pre dáke $a \in K_{q+1}$.
Hovorí sa vtedy, že c a d sú homologické.
Tvrdenie: Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q\in Z}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q\in Z}$ sú reťazcové komplexy, nech $f : K \to L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov. Potom:
$f_q(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$
$f_q(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$
Veta: Ak $f : K \to L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov, tak predpis $[c] \mapsto [f_q(c)]$ dobre definuje homomorfizmus grúp $H_q(f) : H_q(K) \to H_q(L)$.
Def: Homomorfizmus $H_q(f) : H_q(K) \to H_q(L)$ z predchádzajúcej vety sa nazýva **homomorfizmus homologických grúp indukovaný homomorfizmom reťazcových komplexov** $f : K \to L$.
Tvrdenie: Ak $f : K \to L$, $g : L \to M$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak pre každé $q \in \mathbb{Z}$ máme:
$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$
$H_q(id_K) = id_{H_q(K)}$
Máme teda kovariantný funktor $H : \mathcal{K} \to GradAb$.

Singulárne homologické grupy topologických priestorov

Def: Nech X je topologický priestor. Potom **q-ta singulárna grupa homológií priestoru** X sa definuje ako $H_q(X) := H_q(S(X))$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$. Ak $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, tak máme homomorfizmus singulárnych reťazcových komplexov $S(f) : S(X) \to S(Y)$; definujeme homomorfizmus

singulárnych grúp homológií ako $H_q(f) := H_q(S(f)) : H_q(X) \to H_q(Y)$. $H_q(f)$ sa nazýva **homomorfizmus singulárnych grúp homológií** indukovaný spojitým zobrazením $f : X \to Y$.
Samozrejme $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$, $H_q(id_X) = id_{H_q(X)}$, teda $H_q : Top \to Ab$ a $H : Top \to GradAb$.
Tvrdenie: Ak P je jednobodový priestor, tak

$$H_q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ ak } q = 0 \\ 0, \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

Veta: Nech X je lineárne súvislý priestor. Potom $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.
Dôsledok: Nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém komponentov lineárnej súvislosti priestoru X. Potom $H_q(X) \cong \prod\limits_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha)$.
Dôsledok: $H_0(X) \cong \bigoplus\limits_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$
Dôsledok: X je lineárne súvislý $\Leftrightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Singulárne homologické grupy párov priestorov

Def: Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex. Jeho **reťazcový podkomplex** je reťazcový komplex $K' = (K'_q, \partial'_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ taký, že pre každé q je $K'_q \subset K_q$ podgrupa a $\partial'_q = \partial_q|_{K'_q}$. (Definícia hovorí aj to, že $\partial_q(K'_q) \subseteq K'_{q-1}$.)
Veta a definícia: Nech $K' = (K'_q, \partial'_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ je podkomplex reťazcového komplexu $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$. Potom predpis $[x] \mapsto [\partial_q(x)]$ dobre definuje operátor $\overline{\partial_q} : K_q/K'_q \to K_{q-1}/K'_{q-1}$. Platí $\overline{\partial_{q-1}} \circ \overline{\partial_q} \equiv 0$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$ a $K/K' := (K_q/K'_q, \overline{\partial_q})_{q \in \mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex, je to tzv. **faktorový komplex** komplexu K podľa K'.
Def: Špeciálne, ak X je topologický priestor a A jeho topologický podpriestor, tak $(S_q(X)/S_q(A), \overline{\partial_q})_{q \in \mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex, tzv. **relatívny reťazcový komplex páru** (X, A).
Def: Postupnosť reťazcových komplexov a homomorfizmov medzi nimi sa nazýva **exaktná**, ak pre každé $q \in \mathbb{Z}$ dáva exaktnú postupnosť grúp a abelovských homomorfizmov medzi nimi.
Veta: Nech $0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$ je krátka exaktná postupnosť reťazcových komplexov. Potom v homologických grupách máme exaktnú postupnosť $H_q(K') \xrightarrow{H_q(\alpha)} H_q(K) \xrightarrow{H_q(\beta)} H_q(K'')$ pre každé $q \in \mathbb{Z}$.
Najskôr definujeme homomorfizmus $\delta_q : Z_q(K'') \to H_{q-1}(K')$. Nech $x \in Z_q(K'')$ je ľubovoľný cyklus. $\beta_q : K_q \to K''_q$ je epimorfizmus, teda existuje $y \in K_q$, pre ktoré $\beta_q(y) = x$. Ďalej sa ukáže, že $\partial_q(y) \in \operatorname{Ker} \beta_{q-1} = \operatorname{Im} \alpha_{q-1}$. Teda existuje jediné $u \in K'_{q-1}$, že $\alpha_{q-1}(u) = \partial_q(y)$. Ukáže sa, že u je cyklus, že definícia $\delta_q(x) = [u]$ je dobrá, že $\delta_q(B_q(K'')) = 0$. Potom sa definuje $\partial_{*q} : H_q(K'') \to H_{q-1}(K')$ ako $\partial_{*q}([x]) = \delta_q(x)$.
Veta: Nech $0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$ je exaktná postupnosť. Potom postupnosť $\to H_{q+1}(K'') \xrightarrow{\partial_{*(q+1)}} H_q(K') \xrightarrow{H_q(\alpha)} H_q(K) \xrightarrow{H_q(\beta)} H_q(K'') \xrightarrow{\partial_{*q}} H_{q-1}(K') \xrightarrow{H_{q-1}(\alpha)}$ je exaktná.
Def: Postupnosť z predchádzajúcej vety = **dlhá exaktná postupnosť** indukovaná krátkou exaktnou postupnosťou reťazcových komplexov $0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$.
∂_{*q} - **spájajúci homomorfizmus**
Veta: Nech $0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$ a $0 \to L' \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} L'' \to 0$ sú krátke exaktné postupnosti reťazcových komplexov. Nech $\gamma' : K' \to L'$, $\gamma : K \to L$, $\gamma'' : K'' \to L''$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov také, že diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma'"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & K'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\kappa"] & L \arrow[r, "\lambda"] & L'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(=krátky komutatívny rebrík s exaktnými riadkami) komutuje. Potom diagram (dlhý komutatívny rebrík s exaktnými riadkami)

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & H_{q+1}(K'') \arrow[r, "\partial_{*(q+1)}"] \arrow[d, "H_{q+1}(\gamma'')"'] & H_q(K') \arrow[r, "H_q(\alpha)"] \arrow[d, "H_q(\gamma')"'] & H_q(K) \arrow[r, "H_q(\beta)"] \arrow[d, "H_q(\gamma)"'] & H_q(K'') \arrow[r, "\partial_{*q}"] \arrow[d, "H_q(\gamma'')"'] & H_{q-1}(K') \arrow[r] \arrow[d, "H_{q-1}(\gamma')"'] & \dots \\ \dots \arrow[r] & H_{q+1}(L'') \arrow[r, "\partial_{*(q+1)}"] & H_q(L') \arrow[r, "H_q(\kappa)"] & H_q(L) \arrow[r, "H_q(\lambda)"] & H_q(L'') \arrow[r, "\partial_{*q}"] & H_{q-1}(L') \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

komutuje.

Tvrdenie: Ak X je topologický priestor, $A \subset X$ je topologický podpriestor X, tak postupnosť

$$\longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_{*q}} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} H_{q-1}(X) \longrightarrow \dots$$

je exaktná.

Def: Je to tzv. **dlhá exaktná postupnosť** topologického páru (X, A).

Def: $H_q(S(X,A)) =: H_q(X,A)$ je q-ta **singulárna (relatívna) homologická grupa** topologického páru X, A.

Veta: Ak $f : (X,A) \to (Y,B)$ je zobrazenie párov, tak máme komutatívny rebrík s exaktnými riadkami

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r, "H_q(i)"] \arrow[d, "H_q(f|_A)"] & H_q(X) \arrow[r, "H_q(j)"] \arrow[d, "H_q(f)"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_{*q}"] \arrow[d, "H_q(f)"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "H_{q-1}(f|_A)"] \\
\dots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r, "H_q(i)"] & H_q(Y) \arrow[r, "H_q(j)"] & H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_{*q}"] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Okrem toho: ak $f : (X,A) \to (Y,B)$, $g : (Y,B) \to (S,C)$, tak

$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$

$H_q(id_{(X,A)}) = id_{H_q(X,A)}$, pre $q \in \mathbb{Z}$.

Teda vlastne máme kovariantný funktor H_q z kategórie párov priestorov a spojitých zobrazení medzi nimi do kategórie GradAb.

Def: Trojicou priestorov budeme rozumieť trojicu (X, A, B), kde X je topologický priestor, A a B sú jeho topologické podpriestory a $B \subset A$.

$\to H_q(A,B) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X,B) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_{*q}} H_{q-1}(A,B) \to \dots$ je **dlhá exaktná postupnosť trojice** (X, A, B).

Tvrdenie: Nech (X, A) je topologický pár, nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém komponentov lineárnej súvislosti X. Označme $A_\alpha := X_\alpha \cap A$. Potom:

$$H_q(X,A) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha, A_\alpha)$$

Vlastnosti singulárnej homologickej teórie

Veta: Singulárnou homologickou teóriou rozumieme dvojicu (H, ∂_*), kde H je kovariantný funktor z kategórie párov topologických priestorov a spojitých zobrazení medzi nimi do kategórie GradAb, a ∂_* je pre každé $q \in \mathbb{Z}$ homomorfizmus $\partial_{*q} : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$, pričom sú splnené nasledovné podmienky:

1. **prirodzenosť** ∂_*: Pre každé $f : (X,A) \to (Y,B)$ diagram

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_{*q}"] \arrow[d, "H_q(f)"'] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "H_{q-1}(f|_A)"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_{*q}"] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

komutuje (pre každé $q \in \mathbb{Z}$)

2. Pre každý pár (X, A) máme exaktnú postupnosť

$$\dots \to H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_{*q}} H_{q-1}(A) \to \dots$$

3. **Homotopická vlastnosť** Ak $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ sú homotopné (t.j. existuje $H : (X \times I, A \times I) \to (Y,B)$ spojité, také, že $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $x \in X$), tak $H_q(f) = H_q(g)$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$.

4. **Excízia - výrez** Nech (X, A) je pár priestorov a nech $U \subset A$ je taká, že $\overline{U} \subset \mathring{A}$. Potom inklúzia $j : (X - U, A - U) \to (X, A)$ indukuje izomorfizmus $H_q(j) : H_q(X - U, A - U) \to H_q(X, A)$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$.

5. **Vlastnosť dimenzie** Ak P je jednobodový priestor, tak

$$H_q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ ak } q = 0 \\ 0, \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

6. **Aditívnosť:** Nech (X, A) je pár priestorov, nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém otvorených podmnožín v X takých, že $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Označme $A_\alpha = A \cap X_\alpha$. Potom

$$H_q(X,A) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha, A_\alpha)$$

Dôsledok: Ak X je kontraktibilný, tak

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ ak } q = 0 \\ 0, \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

Redukované singulárne homologické grupy

Def: Nech P je jednobodový priestor a nech X je ľubovoľný priestor. Označme $k_X : X \to P$. Označme $\tilde{H}_q(X) = Ker(H_q(k_X))$.
Potom podgrupa $\tilde{H}_q(X)$ grupy $H_q(X)$ sa nazýva **q-ta redukovaná singulárna homologická grupa** priestoru X.
Veta: Pre $q \neq 0$ máme $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ a $\tilde{H}_0(X) \bigoplus \mathbb{Z} \cong H_0(X)$.
Teda špeciálne: Ak X je lineárne súvislý, tak $\tilde{H}_0(X) = 0$. (aj obrátene)
Veta: Ak (X, A), kde $A \neq \emptyset$, je pár priestorov, tak máme exaktnú postupnosť $\ldots \longrightarrow \tilde{H}_q(X, A) \xrightarrow{\tilde{H}_q(i)} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\tilde{H}_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_{*q}} \tilde{H}_{q-1}(A)$.
Veta: Nech $n \geq 0$. Potom

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

Lema: $H_q(i_+) : H_q(D^n_+, S^{n-1}) \to H_q(S^n, D^n_-)$ je pre $\forall q \in \mathbb{Z}$ izomorfizmus.
Dôsledok:

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

Dôsledok:

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

Veta: Ak sféry S^m, S^n sú homotopicky ekvivalentné, tak $m = n$.
Veta: Ak $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ sú homeomorfné, tak $m = n$.
Lema: Pre pár (X, A) máme $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(A) \bigoplus H_q(X, A)$, ak existuje retrakcia X na A.
Dôsledok: Sféra S^{n-1} nemôže byť retrakciou gule D^n.
Veta: (Brouwerova veta o pevnom bode) Pre každé spojité zobrazenie $f : D^n \to D^n$ existuje $x_0 \in D^n$: $f(x_0) = x_0$.
Def: Nech X je topologický priestor taký, že všetky homologické grupy $H_q(X)$ sú konečne generované, pričom iba konečne veľa z nich je nenulových. Potom $b_q = rang(H_q(\mathbb{Z}X))$ (počet kópií $\mathbb{Z}$ vo voľnej časti).
Potom **Eulerova-Poincarého charakteristika** X je celé číslo $\chi(X) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots$.
Veta: Nech X je lineárne súvislý priestor, nech $x_0 \in X$. Potom platí:

$$H_1(X) \cong \pi(X, x_0)/[\pi(X, x_0), \pi(X, x_0)]$$

Špeciálne, ak $\pi(X)$ je komutatívna, tak $H_1(X) \cong \pi(X)$.

Singulárne kohomologické grupy

Def: Nech X je topologický priestor.
$S_n(X)$ - grupa n-rozmerných singulárnych reťazcov topologického priestoru X
(grupa generovaná n-rozmernými simplexami)
Definujeme: $S^n(X) := Hom(S_n(X), \mathbb{Z})$
$S^n(X)$ je duálny modul k modulu $S_n(X)$
$S^n(X)$ sa nazýva **grupa n-rozmerných koreťazcov.**
Hodnotu singulárneho koreťazca $c \in S^n(X)$ na reťazci $\alpha \in S_n(X)$ označujeme $< c, \alpha > \in \mathbb{Z}$.
$<, >$: $S^n(X) \times S_n(X) \to \mathbb{Z}$ je tzv. **párovacie zobrazenie**
Definujeme homomorfizmus $\delta_n : S^n(X) \to S^{n+1}(X)$ predpisom $< \delta_n c, \tau > := < c, \partial_{n+1}\tau >$ pre ľubovoľné $c \in S^n(X)$, $\tau \in S_{n+1}(X)$.
δ_n je **kohraničný operátor**
$(S^n(X), \delta_n)$ je **koreťazcový komplex**
$Z^n(X) = Ker\delta_n$
$B^n(X) = Im\delta_{n-1}$

Tvrdenie: $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$
Dôsledok: Pre každé $n \in \mathbb{Z}$ je $Im\delta_n \subseteq Ker\delta_{n+1}$
Def: Faktorová grupa $Z^n(X)/B^n(X) =: H^n(X)$ sa nazýva **n-tá singulárna kohomologická grupa** priestoru X (grupa singulárnych kohomológií).
Def: Ak $f : X \to Y$ je spojité a $S_n(f)$ je singulárny reťazec indukovaný zobrazením f, tak definujeme zobrazenie $S^n(f) : S^n(Y) \to S^n(X)$ predpisom $< S^n(f)(d), \beta >:=< d, S_n(f)(\beta) >$ pre $d \in S^n(f)$, $S^n(f)(d) \in S^n(X)$, $\beta \in S_n(X)$.
Ináč povedané: $S^n(f)(d) = d \circ S_n(f)$.
Def: Homomorfizmus $h_n : S^n(X) \to S^n(Y)$ sa nazýva **koreťazcový homomorfizmus**, ak diagram

$$\begin{array}{ccc} S^n(X) & \xrightarrow{h_n} & S^n(Y) \\ {\scriptstyle \delta_n}\downarrow & & {\scriptstyle \delta_n}\downarrow \\ S^{n+1}(X) & \xrightarrow{h_{n+1}} & S^{n+1}(Y) \end{array}$$

komutuje.
Tvrdenie: $f : X \to Y$ je spojité $\Rightarrow$ homomorfizmus $S^n(f) : S^n(Y) \to S^n(X)$ definovaný vyššie je koreťazcový homomorfizmus.
Dôsledok: Ak $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, tak koreťazcový homomorfizmus $S^n(f) : S^n(Y) \to S^n(X)$ zobrazuje kocykly do kocyklov a kohranice do kohraníc.
Def: Ak $f : X \to Y$ je spojité, tak homomorfizmus $H^n(f) : H^n(Y) \to H^n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$ daný predpisom $[c] \mapsto [S^n(f)(c)]$ sa nazýva homomorfizmus singulárnych kohomologických grúp indukovaný spojitým zobrazením f.
Ľahko sa overí, že ak $f : X \to Y$, $g : Y \to S$ sú spojité, tak $H^n(g \circ f) = H^n(f) \circ H^n(g)$ a $H^n(id_X) = id_{H^n(X)}$, čiže je to kontravariantný funktor z kategórie Top do kategórie GradAb.
Exaktnosť: Pre každý pár (X, A) máme exaktnú postupnosť

$$\ldots \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta^*_{q-1}} H^q(X, A) \xrightarrow{H_q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H_q(i)} H^q(A) \xrightarrow{\delta^*_q} \ldots$$

kde $i : A \hookrightarrow X$, $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ sú vloženia a $\delta^*_{q-1} : H^{q-1}(A) \to H^q(X, A)$
Homotopická vlastnosť Ak (X, A),(Y, B) sú homotopicky ekvivalentné $H^q(X, A) \cong H^q(Y, B)$
Prirodzenosť: Ak $f : (X, A) \to (Y, B)$ je spojité zobrazenie, tak máme komutatívny rebrík s exaktnými riadkami:

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H^{q-1}(A) & \xrightarrow{\delta^*_{q-1}} & H^q(X, A) & \xrightarrow{H^q(j)} & H^q(X) & \xrightarrow{H^q(i)} & H^q(A) & \xrightarrow{\delta^*_q} \\ & \downarrow{\scriptstyle H^{q-1}(f|_A)} & & \downarrow{\scriptstyle H^q(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H^q(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H^q(f|_A)} & \\ \longrightarrow & H^{q-1}(B) & \xrightarrow{\delta^*_{q-1}} & H^q(Y, B) & \xrightarrow{H^q(j)} & H^q(Y) & \xrightarrow{H^q(i)} & H^q(B) & \xrightarrow{\delta^*_q} \end{array}$$

Vlastnosť dimenzie: Ak P je jednobodový priestor, tak

$$H^q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ ak } q = 0 \\ 0, \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

Aditívnosť: Nech (X, A) je pár priestorov, nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém otvorených podmnožín v X takých, že $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Označme $A_\alpha = A \cap X_\alpha$. Potom

$$H^q(X, A) \cong \prod_{\alpha \in A} H^q(X_\alpha, A_\alpha)$$

Excízia: Nech (X, A) je pár priestorov a nech $U \subset A$ je taká, že $\overline{U} \subset \mathring{A}$. Potom inklúzia $j : X - U, A - U \to (X, A)$ indukuje izomorfizmus $H^q(j) : H^q(X, A) \to H^q(X - U, A - U)$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$.
Vlastnosť singulárnych kohomológií, ktorá ich podstatne odlišuje od homológií: v singulárnych kohomologických grupách sa dá zaviesť pohárový súčin.
Def: Najskôr definujme súčin koreťazcov $\cup : S^m(X) \times S^n(X) \to S^{m+n}(X)$.
Nech $c \in S^m(X)$, $c' \in S^n(X)$. Definujme singulárne komplexy:
$\alpha_m : \Delta_m \to \Delta_{m+n}$

$\alpha_m(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$
$\beta_n : \Delta_n \to \Delta_{m+n}$
$\beta_n(t_0, \dots, t_n) = (0, \dots, 0, t_m, \dots, t_{m+n})$
Definujme koreťazec $c \cup c' \in S^{m+n}$
$< c \cup c', \varphi >:=< c, \varphi \circ \alpha_m >< c', \varphi \circ \beta_n >$ pre $\varphi \in S_{n+m}(X)$.
Dá sa ukázať $\delta_{m+n}(c \cup c') = \delta_m(c) \cup c' \pm c \cup \delta_n(c')$.
Z toho vyplýva, že predpis $([c], [c']) \mapsto [c \cup c']$ dobre definuje zobrazenie $\cup : H^m(X) \times H^n(X) \to H^{m+n}(X)$, je to tzv. **pohárový súčin** v graduovanej grupe $(H^0(X), H^1(X), \dots)$ (tiež: kohomologický súčin).

Ľjusternikova-Šnireľmanova kategória topologického priestoru

Def: Nech $X \neq \emptyset$ je topologický priestor a A jeho topologický podpriestor. Hovoríme, že topologický podpriestor A je **kontraktibilný** v X, ak existuje homotópia v X medzi konštantným zobrazením $c : A \to X$, $c(x) = a$ pre ľubovoľné $x \in A$ (pre dáke $a \in X$) a inklúziou $i : A \hookrightarrow X$, t.j. vlastne ak existuje homotópia $H : A \times I \to X$;
$H(x, 0) = c(x) = a \ \forall x \in A$
$H(x, 1) = x \ \forall x \in A$
Def: Nech X je topologický priestor. Potom najmenší počet otvorených kontraktibilných v X podmnožín X, ktoré pokrývajú X, sa nazýva **Ľjusternikova-Šnireľmanova kategória topologického priestoru** X, $\mathrm{cat}(X)$.
Horné odhady:
Nech M je kompaktná hladká varieta (bez okraja). Potom platí: $\mathrm{cat}(M) \leq$ počet kritických bodov ľubovoľnej hladkej reálnej funkcie na M.
Ak M je n-rozmerná varieta, tak $\mathrm{cat}(M) \leq n$.
Dolné odhady:
Def: Kohomologickou dĺžkou topologického priestoru$X$ rozumieme najväčšie p také, že existujú nenulové $a_{i_1} \in H^{i_1}(X; \mathbb{Z}_2), \dots, a_{i_p} \in H^{i_p}(X; \mathbb{Z}_2), i_k > 0$ také, že $a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \dots \cup a_{i_p} \neq 0$, značíme ju $\mathrm{cup}(X)$.
Tvrdenie: $\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cup}(X) + 1$

Intuitívny prístup k $H_1(P)$, P je komp. plocha

Def: Kompaktná plocha = kompaktná 2-rozmerná topologická varieta. (t.j. haussdorfovský so spočítateľnou bázou, kde každý bod má okolie homeomorfné s D^2).
Def: Cyklus v $\mathbb{R}^2$ je dvojvrcholový graf s orientovanými hranami taký, že počet hrán vchádzajúcich do každého (z tých dvoch) vrcholov je rovnaký ako počet vychádzajúcich hrán.
Def: Cyklus na kompaktnej ploche P = homeomorfný obraz cyklu v $\mathbb{R}^2$, pričom homeomorfizmus zachováva orientácie hrán.

Rozlišovanie spojitých zobrazení $S^n \to S^n$ pomocou stupňa zobrazenia

Def: Nech $f : S^n \to S^n$ je spojité. Potom $\tilde{H}_n(f) : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ je homomorfizmus grúp, a teda $\tilde{H}_n(f)(s_n) = ks_n$. Číslo $k \in \mathbb{Z}$ sa nazýva **stupeň zobrazenia** f, $k = \deg(f)$.
Veta: 1.$\deg(id_X) = 1$
2.Ak $f, g : S^n \to S^n$ sú homotopné, tak $\deg(f) = \deg(g)$.
3.$f, g : S^n \to S^n$ sú 2 zobrazenia, tak $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$
4.$f : S^n \to S^n$ je konštantné $\implies \deg(f) = 0$.
Veta: Ak $f : S^n \to S^n$ je spojité zobrazenie také, že $\deg(f) \neq 0$, potom f je surjektívne.
Def: $a : S^n \to S^n$ $a(x) = -x$ je tzv. **antipodálne zobrazenie**.
Tvrdenie: $\deg(a) = (-1)^{n+1}$
Def: Antipodálny bod zobrazenia $f : S^n \to S^n$ je $x_0 \in S^n : f(x_0) = -x_0$
Veta: Nech $f : S^n \to S^n$ je spojité zobrazenie.
a) Ak f nemá pevný bod, tak f je homotopné s antipodálnym zobrazením.
b) Ak f nemá antipodálny bod, tak f je homotopné s id_{S^n}.
Veta: Ak f je homotopická ekvivalencia, tak $\deg(f) \in \{-1, 1\}$
Veta: Ak $f : S^n \to S^n$ je spojité také, že $|\deg(f)| \neq 1$, tak f má aspoň 1 pevný bod a aspoň 1 antipodálny bod.
Veta: Ak $n \geq 2$ je párne, tak každé spojité zobrazenie $f : S^n \to S^n$ má pevný bod, alebo má antipodálny bod.

Def: Vektorové pole na sfére S^n môžeme chápať ako také zobrazenie $s : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ také, že $< x, s(x) >= 0$.
Veta: Na sfére párnej dimenzie neexistuje vektorové pole, ktoré by bolo v každom bode nenulové.

Súvislosť existencie všade nenulového vekt. poľa na S^{2k+1} s tokom na S^{2k+1}

Def: Tok vektorového poľa $v : S^{2k+1} \to \mathbb{R}^{2k+2}$ je spojité zobrazenie $\Phi : \mathbb{R} \times S^{2k+1} \to S^{2k+1}$ také, že
$\Phi(0, x) = x$
$\frac{d\Phi(t,x)}{dt} = v(\Phi(t, x))$ pre všetky (t, x).
Pre každé $t \in \mathbb{R}$ je $\Phi(t, \cdot) = \Phi_t : S^n \to S^n$ homeomorfizmus.

Otázky na skúške

Cesta v topologickom priestore. Výpočet fundamentálnej grupy kružnice. (Doplňujúce otázky: Musí byť $\pi(X, x)$ komutatívna? Ako súvisí $\pi(X, x)$ s homológiami?)
Vlastnosti homológií. Definícia $H_q(f)$. ($H_q(S^n) =?$, $H_0(X) =?$)
Homomorfizmy reťazcových komplexov. Brouwerova veta o pevnom bode.
Definovať faktorový reťazcový komplex. Odvoďte dlhú exaktnú homologickú postupnosť pre páry priestorov.