Verzia: 25. júna 2002

Def: Nech $U \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená a nech $f : U \to \mathbb{R}$. Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** triedy C^k ($k \geq 0 \in \mathbb{N}$) na U (stručne $f \in C^k(U)$), ak f má na U spojité všetky možné parciálne derivácie až do rádu k (vrátane).
Funkcia f, ktorá je na U triedy C^k pre každé $k \in \mathbb{N}$ sa nazýva **nekonečnediferencovateľná** (hladká) funkcia na U. ($f \in C^\infty(U)$)

Def: Nech $U \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená a nech $f : U \to \mathbb{R}^k$. Potom hovoríme, že zobrazenie f je **diferencovateľné** triedy $C^k(U)$, ak všetky parciálne funkcie zobrazenia f, t.j. všetky $f_i = r_i \circ f$ sú z $C^k(U)$.

Def: **Lokálne euklidovský priestor** dimenzie d je Hausdorffovský topologický priestor M, taký, že každý jeho bod má otvorené súvislé okolie homeomorfné s otvorenou podmnožinou v $\mathbb{R}^d$.
Ak M je d-rozmerný lokálne euklidovský priestor $x \in M$ a $U \ni x$ je otvorená a súvislá množina v M, ktorá je prostredníctvom homeomorfizmu $\varphi : U \to \varphi(U)$ homeomorfná s otvorenou podmnožinou $\varphi(U)$ v $\mathbb{R}^d$, tak (U, φ) sa nazýva **lokálny súradnicový systém** okolo bodu x (so začiatkom v bode x).
Funkcia $r_i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ sa nazýva **i-ta súradnicová funkcia**.
U = **súradnicové okolie**
φ = **lokálne súradnicové zobrazenie**

Def: Nech M^d je d-rozmerný lokálne euklidovský priestor. Potom **diferencovateľná štruktúra triedy** C^k ($k \geq 1$) na M^d je systém $\mathcal{F} = (U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A$ lokálnych súradnicových systémov na M taký, že:
1. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M^d$
2. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k$ na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ $\forall \alpha, \beta \in A$.
3. $\mathcal{F}$ je maximálny systém lokálnych súradnicových systémov s týmito vlastnosťami. Teda ak (U, φ) je lokálny súradnicový systém, taký, že $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^k$ pre $\forall \alpha \in A$, tak $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.
Diferencovateľná štruktúra triedy C^∞ sa nazýva aj **C^∞-štruktúra (hladká štruktúra)** na M^d.

Tvrdenie: Nech M^d je d-rozmerný lokálne euklidovský priestor a nech $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\} \neq \emptyset$ je systém lokálnych súradnicových systémov na M^d, ktorý má vlastnosti 1 a 2. Potom existuje jednoznačne určený systém $\mathcal{F}$, že $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$ je už diferencovateľná štruktúra triedy C^k na M^d. (spĺňa 3)

Def: Nech M^d je d-rozmerný lokálne euklidovský priestor so spočítateľnou bázou topológie a nech $\mathcal{F}$ je diferencovateľná štruktúra triedy C^k na M^d. Potom $(M^d, \mathcal{F})$ sa nazýva d-rozmerná **diferencovateľná varieta** triedy C^k.
Zadať štruktúru diferencovateľnej variety triedy C^k na lokálne euklidovskom priestore M so spočítateľnou bázou topológie znamená určiť na M nejakú diferencovateľnú štruktúru triedy C^k.
Diferencovateľná varieta triedy C^∞ sa nazýva aj **hladká varieta**.
d-rozmerný lokálne euklidovský priestor so spočítateľnou bázou topológie sa nazýva aj **topologická varieta**.

Def: Nech $(M, \mathcal{F}_M)$, $(N, \mathcal{F}_N)$ sú C^k-variety. Spojité zobrazenie $f : M \to N$ je v bode $x \in M$ **diferencovateľné triedy** C^k ($k \geq 1$), ak pre ľubovoľné $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$, $(V, \psi) \in \mathcal{F}_N$, $x \in U$, $f(x) \in V$ je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ triedy C^k.
f sa nazýva **diferencovateľné triedy** C^k **na** M, ak je diferencovateľné triedy C^k v každom $x \in M$.
Diferencovateľné zobrazenie triedy C^∞ sa nazýva **hladké**.

Def: Nech M, N sú C^∞-variety. **Difeomorfizmus** z M na N je C^∞-zobrazenie také, že $f^{-1} : N \to M$ existuje a je tiež C^∞.

Def: C^∞-štruktúry $\mathcal{F}_M, \tilde{\mathcal{F}}_M$ na C^∞-variete M sú ekvivalentné, ak existuje difeomorfizmus $f : (M, \mathcal{F}_M) \to (M, \tilde{\mathcal{F}}_M)$.

Def: Nech $X \neq \emptyset$ je topologický priestor a nech $W \subset X$. **Pokrytie množiny** W je systém $\{U_\alpha;\ \alpha \in A\}$, kde A je indexová množina, pričom platí, že $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \supset W$.

Def: Jeho **podpokrytie** je systém $\{U_\alpha;\ \alpha \in A'\}$ $A' \subset A$.

Def: Pokrytie nazývame **otvorené**, ak pre každé $\alpha \in A$ je U_α otvorená množina.

Def: **Zjemnenie pokrytia** $\{U_\alpha;\ \alpha \in A\}$ je pokrytie $\{V_\beta;\ \beta \in B\}$ také, že pre každé $\beta \in B$ $\exists \alpha \in A$: $V_\beta \subset U_\alpha$.

Def: Pokrytie $\{U_\alpha;\ \alpha \in A\}$ priestoru X sa nazýva **lokálne konečné**, ak pre každé $x \in X$ existuje otvorené okolie U_x také, že $U_x \bigcap U_\alpha \neq \emptyset$ iba pre konečne veľa α.

Def: Topologický priestor nazývame **parakompaktný**, ak je hausdorffovský a každé jeho otvorené pokrytie má lokálne konečné zjemnenie.

Pr: 1. Každý kompaktný, hausdorffovský je parakompaktný.

Dohoda: V ďalšom sa pod pojmom kompaktný priestor bude rozumieť kompaktný, T2.
Pr: 2. Priestor, ktorý nie je kompaktný, ale je parakompaktný – $\mathbb{R}^n$.
Def: Topologický priestor je lokálne kompaktný, ak každý jeho bod má otvorené okolie, ktorého uzáver je kompaktný.
Pr: 1. $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ je lokálne kompaktný priestor
Pr: 2. Lokálne euklidovský priestor je lokálne kompaktný priestor, diferencovateľné variety triedy $C^k(C^\infty)$.
Veta: Nech $X \neq \emptyset$ je hausdorffovský lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou topológie. Potom X je parakompaktný. Špeciálne: Každá $C^\infty(C^k)$ varieta je parakompaktná.
Platí aj silnejšie tvrdenie pre X: Každé jeho otvorené pokrytie má spočítateľné lokálne konečné zjemnenie také, že uzáver každej množiny toho zjemnenia je kompaktný.
Lema: Nech X je priestor s vlastnosťami v predpokladoch vety. Potom existuje spočítateľný systém otvorených podmnožín $G_i \subset X$, $i = 1, 2, ...$ taký, že $G_i \subset G_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $\overline{G_i}$ je kompaktná množina a $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i = X$.
Dôkaz:

- Existuje spočítateľná báza $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ taká, že $\overline{U}_\alpha$ je kompaktná.
- Nech $B = \{B_j; j \in \mathbb{N}\}$ je ľubovoľná spočítateľná báza topol. priestoru X. Potom $B' = \{B_{j_k}; \overline{B_{j_k}}$ je kompakt $\}$ je neprázdny systém.

X je lokálne kompaktný priestor, teda pre každý bod x z X existuje otvorené okolie U také, že $\overline{U}$ je kompaktná množina. Keďže systém B tvorí bázu topológie(spočítateľnú) $\exists j \in \mathbb{N}$: $x \in B_j \subseteq U$. Potom, ale $\overline{B_j} \subseteq \overline{U}$ a $\overline{B_j}$ je uzavretá podmnožina kompaktnej množiny U, teda tiež kompakt.

- B' je bázou rovnakej topológie ako systém B

Nech $x \in X$ je ľubovoľný bod a nech $x \in U$ je ľubovoľné jeho otvorené okolie a nech K je otvorené okolie, ktorého uzáver je kompakt. Potom $K \cap U$ je otvorené okolie bodu x, teda $\exists j \in \mathbb{N}$: $B \ni B_j \subset B \cap U$, $B_j \in B'$, pretože $\overline{B_j} \subset \overline{K}$, čo je kompakt.
Def: Nech M^d je d-rozmerná C^∞-varieta a nech $f : M \to R$ je reálna funkcia na M. Potom **nosič funkcie** f je $supp(f) = \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$.
Def: Nech M^d je d-rozmerná C^∞-varieta. Potom **hladký rozklad jednotky** je systém hladkých funkcií $\varphi_i; i \in I$ takých, že
1. $\varphi_i \geq 0$
2. Systém nosičov φ_i je lokálne konečný
3. $\sum \varphi_i(x) = 1$ $\forall x \in M$

Ak $U_\alpha; \alpha \in A$ je otvorené pokrytie variety M, tak hovoríme, že rozklad jednotky je **podriadený** tomuto pokrytiu, ak pre každé $i \in I$ existuje $\alpha \in A$ také, že $supp(\varphi_i) \subset U_\alpha$.
Špeciálne hovoríme, že rozklad jednotky je podriadený pokrytiu $U_i; i \in I$ s tou istou indexovou množinou, ak $\forall i \in I$ $supp(\varphi_i) \subset U_i$.
Lema: Existuje nezáporná hladká funkcia $\varphi : R^d \to R$ taká, že
$\varphi(x) = 1$ $\forall x \in \overline{C(1)} = \{(x_1, ...x_d) \in R^d; |x_i| \leq 1\}$ a $\varphi(x) = 0$ $\forall x \in R^d - C(2)$.
Veta: Nech M^d je C^∞-varieta a nech $U_\alpha; \alpha \in A$ je ľubovoľné otvorené pokrytie. Potom existuje spočítateľný hladký rozklad jednotky $\varphi_1, \varphi_2, ...$ podriadený pokrytiu $U_\alpha; \alpha \in A$, pričom $supp(\varphi_i)$ je kompaktný pre každé $i \in I$.
Tvrdenie: Nech M^d je C^∞-varieta a nech $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ sú uzavreté disjunktné podmnožiny v M. Potom existuje C^∞-funkcia $f : M \to \mathrm{R}$ taká, že $f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$.
Def: Ak f, g sú reálne funkcie, definované a hladké na nejakom okolí bodu $p \in M^d$, tak $f \sim g$, ak existuje také otvorené okolie U bodu p, že $f|_U = g|_U$.
$\sim$ je relácia ekvivalencie na množine funkcií definovaných a hladkých na okoliach bodu $p \in M^d$.
$\widetilde{f}$ = trieda ekvivalencie reprezentovaná funkciou f definovanou a hladkou na nejakom okolí bodu p.
$\widetilde{F_p}$ = množina všetkých tried ekvivalencie
Prvky z $\widetilde{F_p}$ sa nazývajú **zárodky(germy)** hladkých funkcií. $\widetilde{F_p}$ je vektorový priestor nad R a je to aj okruh s jednotkou - tzv. reálna algebra. Pre ľubovoľné $\widetilde{f} \in \widetilde{F_p}$ je dobre definovaná hodnota $\widetilde{f}(p) = f(p)$.
$F_p = \{\widetilde{f} \in \widetilde{F_p}, \widetilde{f}(p) = 0\}$
F_p je vektorový podpriestor $\widetilde{F_p}$ a je to ideál v algebre $\widetilde{F_p}$
F_p^2 = množina všetkých konečných lineárnych kombinácií súčinov dvojíc prvkov F_p, je to ideál v F_p, a

teda aj v $\widetilde{F_p}$.
Def: Nech M je C^∞-varieta a $p \in M$. **Dotykový vektor** k M v bode p definujeme ako reálny lineárny operátor derivovania na algebre $\widetilde{F_p}$. Teda dotykový vektor $\overrightarrow{v}$ k M v bode p je operátor:
$\overrightarrow{v} : \widetilde{F}_p \to R$ taký, že
1. je lineárny $\overrightarrow{v}(\alpha\widetilde{f} + \beta\widetilde{g}) = \alpha\overrightarrow{v}(\widetilde{f}) + \beta\overrightarrow{v}(\widetilde{g})$
2. $\overrightarrow{v}(\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}) = \overrightarrow{v}(\widetilde{f}) \cdot g(p) + \overrightarrow{v}(\widetilde{g}) \cdot f(p)$.
Def: Označme M_p množinu všetkých dotykových vektorov k M v bode p. Potom $M_p \neq \emptyset$, lebo $\overrightarrow{0} \in M_p$. Na M_p definujeme sčitovanie a násobenie:
$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})(\widetilde{f}) = \overrightarrow{v}(\widetilde{f}) + \overrightarrow{w}(\widetilde{f})$
$(\alpha\overrightarrow{v})(\widetilde{f}) = \alpha(\overrightarrow{v}(\widetilde{f}))$
Potom M_p je reálny vektorový priestor. Vektorový priestor M_p sa nazýva **dotykový (tangenciálny) vektorový priestor** k hladkej variete M v bode p.
Veta: $dimM_p = dimM$ pre $p \in P$
Tvrdenie: Ak M je C^∞-varieta a $p \in M$, tak dotykový priestor $M_p \cong (F_p/F_p^2)^*$.
Lema: Nech $\widetilde{v} \in M_p$ a $(\widetilde{c})$ je germ konštantnej funkcie. Potom $\overrightarrow{v}(\widetilde{c}) = 0$.
Tvrdenie: $dim(F_p/F_p^2) = dim(M)$
Lema: Nech $g : U \to \mathcal{R}$ je C^∞-funkcia, kde U je otvorená podmnožina v $\mathcal{R}^d$. Nech $p \in U$. Potom pre každý bod $q \in U$ máme:

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)(q_i - p_i) + \sum_{i,j}(q_i - p_i)(q_j - p_j)\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(q-p))dt$$

Def: Nech (U, φ) je lokálny súradnicový systém okolo $p \in M^d$, označme $X_i = r_i \circ \varphi_i, i = 1, \ldots, n$. Definujeme operátor $\frac{\partial}{\partial X_i}|_p$ na $\widetilde{F}_p$ takto:
$\frac{\partial f}{\partial X_i}|_p = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \in R$
Tvrdenie: $\frac{\partial}{\partial X_i}|_p \in M_p$
Tvrdenie: Dotykové vektory $\frac{\partial}{\partial X_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_d}|_p \in M_p$ sú lineárne nezávislé (a teda v M_p tvoria bázu, keďže $dim(M_p) = d$).
$M_p^* \cong F_p/F_p^2$ - **kodotykový(kotangenciálny) vektorový priestor** k variete M v bode p
$[X_i - X_i(p)]$ je báza F_p/F_p^2
Tvrdenie: Nech (U, φ) je lokálny súradnicový systém okolo $p \in M^d$, $X_i = r_i \circ \varphi$. Potom každý dotykový vektor $\overrightarrow{v} \in M_p$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{d} \overrightarrow{v}(X_i)\frac{\partial}{\partial X_i}|_p$.
TODO: Závislosť bázy od voľby l.s.s..
Veta a definícia: Nech $f : M^d \to N^k$ je C^∞-zobrazenie medzi C^∞-varietami. Nech $p \in M$. Potom zobrazenie
$df_p : M_p \to N_{f(p)}$
$df_p(\overrightarrow{v})(g) := \overrightarrow{v}(g \circ f)$
je dobre definované lineárne zobrazenie; nazýva sa **diferenciál** zobrazenia f v bode p. **Def:** Zobrazenie
$df_p^* : N_{f(p)}^* \to M_p^*$
medzi kodotykovými priestormi
$df_p^*(l)(\overrightarrow{v}) = l(df_p(\overrightarrow{v}))$
sa nazýva **kodiferenciál (kodotykové zobrazenie) hladkého zobrazenia f v bode** p.
Veta: (Reťazcové pravidlo pre diferenciál) Pre ľubovoľný bod $p \in M$ máme:
$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$
Tvrdenie: Ak M a N sú súvislé difeomorfné C^∞-variety, tak $dim(M) = dim(N)$.
Špeciálne, ak R^d a R^k sú difeomorfné, tak $d = k$.
Def: C^∞**-krivka** na C^∞-variete je ľubovoľné C^∞-zobrazenie $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$.
Dotykový vektor C^∞-krivky σ v bode $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sa definuje ako $\dot{\sigma}(t) := d\sigma_t(\frac{d}{dx}|_t)$.
Tvrdenie: Nech M^d je hladká varieta, $p \in M$, $\overrightarrow{v} \in M_p - \{\overrightarrow{0}\}$. Potom existuje krivka σ na M taká, že $\dot{\sigma}(0) = \overrightarrow{v}$.
Def: Nech M^d je C^∞-varieta.

$TM := \coprod_{p \in M} M_p$
Definujeme: $\Pi : TM \to M$
$\Pi(\overrightarrow{v}) = p$, ak $\overrightarrow{v} \in M_p$.
Π je surjekcia.
Pre ľubovoľné $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$ definujeme zobrazenie $\widetilde{\varphi}_U : \Pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^d$ dané predpisom $\widetilde{\varphi}_U(\vec{v}) = (X_1(\Pi(\vec{v})), \ldots, X_d(\Pi(\vec{v})), (dX_1)_{\Pi(\vec{v})}(\vec{v}), \ldots, (dX_d)_{\Pi(\vec{v})}(\vec{v}))$. Na $\Pi^{-1}(U)$ prenesieme topológiu z $\varphi(U) \times \mathbb{R}^d$ cez bijekciu $\widetilde{\varphi}_U$. Systém $\{(\Pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}_U); (U, \varphi) \in \mathcal{F}_M\}$ definuje C$^\infty$-štruktúru na TM.
TM je $(2d)$-rozmerná hladká varieta a nazýva sa **dotyková(tangenciálna) varieta** variety M. ($d = dim(M)$)
Def: Trojica (E, p, B) sa nazýva **hladká vektorová fibrácia** s **totálnym priestorom** E **bázou** B a **projekciou** p, ak
1. $p : E \to B$ je C$^\infty$-zobrazenie C$^\infty$-variet, surjekcia.
2. pre každé $b \in B$ existuje na $p^{-1}(b)$ štruktúra reálneho vektorového priestoru dimenzie $k \in N \cup \{0\}$.
3. pre každé $b \in B$ existuje otvorené okolie $U \ni b$ a difeomorfizmus $h : U \times R^k \to p^{-1}(U)$ taký, že:

$$\begin{tikzcd} U \times R^k \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "pr_U"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p|_{p^{-1}(U)}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

komutuje, pričom $h|\{s\} \times R^k : \{s\} \times R^k \to p^{-1}(s)$ pre každé $s \in U$ je lineárny izomorfizmus.
h sa nazýva **lokálna trivializácia**
$p^{-1}(b)$= fiber fibrácie $\xi = (E, p, B)$ nad bodom b
Ak B je súvislý topologický priestor, tak hodnota k z definície hladkej vektorovej fibrácie je na celom B rovnaká a nazývame ju **dimenzia** hladkej vektorovej fibrácie.
Tvrdenie: Ak (E, p, B) je hladká vektorová fibrácia, tak p je otvorené zobrazenie.
Def: Nech $\xi = (E, p, B)$ a $\xi' = (E', p', B')$ sú hladké vektorové fibrácie. Potom **homomorfizmus** (stručne morfizmus) z ξ do ξ' je dvojica zobrazení $(\tilde{f}, f)$, kde $f : B \to B'$ a $\tilde{f} : E \to E'$ sú hladké zobrazenia také, že diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

komutuje a $\tilde{f}|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to {p'}^{-1}(f(b))$ je lineárne zobrazenie pre všetky $b \in B$.
Def: Nech $\xi = (E, p, B)$ a $\xi' = (E', p', B)$ sú hladké vektorové fibrácie s tou istou bázou B. Potom B-**homomorfizmus** $\xi \to \xi'$ je homomorfizmus $(\tilde{f}, id)$ v zmysle predchádzajúcej definície.
Teda vlastne B-homomorfizmus $\xi \to \xi'$ môžeme chápať ako hladké zobrazenie $\tilde{f} : E \to E'$ také, že diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

komutuje a $\tilde{f}|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to p'^{-1}(b)$ je lineárne zobrazenie.
Def: Nech $u : \xi \to \xi'$ je homomorfizmus hladkých vektorových fibrácií nad tou istou bázou. u je B-**izomorfizmus** ξ na ξ', ak existuje homomorfizmus $v : E' \to E$ také, že $v \circ u = id_{E'}$ a $u \circ v = id_E$.
Veta: C$^\infty$-zobrazenie $u : E \to E'$ je B-izomorfizmus, ak $u|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to {p'}^{-1}(b)$ je lineárny izomorfizmus.
Def: Hladká vektorová fibrácia nad B izomorfná so súčinovou fibráciou $(B \times R^n, pr_1, B)$ sa tiež nazýva **triviálna fibrácia.**
Def: **Rez** hladkej vektorovej fibrácie (E, p, B) je hladké zobrazenie $s : B \to E$ také, že $p \circ s = id_B$.
Veta: n-rozmerná hladká vektorová fibrácia (E, p, B) (E-súvislý) je triviálna $\Leftrightarrow$ existuje n rezov fibrácie $s_1, \ldots, s_n : B \to E$ takých, že $s_1(b), \ldots, s_n(b) \in p^{-1}(b)$ sú lineárne nezávislé pre všetky $b \in B$. (Takéto rezy voláme lineárne nezávislé.)
Def: Rez hladkej vektorovej fibrácie (TM, Π, M), kde M je C$^\infty$-varieta sa nazýva **vektorové pole** na variete M.
Def: Ak na C$^\infty$-variete dimenzie d existuje d vektorových polí, ktorých hodnoty v každom $x \in M$ sú lineárne nezávislé, hovoríme, že M je **paralelizovateľná** varieta.

Ekvivalentne - jej dotyková fibrácia (TM, Π, M) je triviálna.
V ďalšom budeme uvažovať len súvislé variety.
Def: **Vnorenie** C^∞-variety M do C^∞-variety N je C^∞-zobrazenie $f : M \to N$, pre ktoré $df_x : M_x \to N_{f(x)}$ je injekcia pre každé $x \in M$.
Def: Nech existuje hladké vnorenie $f : M \to N$, ktoré je injektívne. Hovoríme, že (M, f) je **podvarieta** variety N (tiež M sa realizuje ako podvarieta N pomocou f.)
Def: Injektívne vnorenie $f : M \to N$ sa nazýva **vloženie** M do N, ak $f : M \to f(M)$ je homeomorfizmus.
Veta: (o inverznom zobrazení - euklidovská verzia) Nech $f : U \to R^d$ je hladké zobrazenie, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otvorená. Ak existuje $r_0 \in U$ také, že Jacobiho matica $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(r_0)) \in M_{d,d}(R)$ je regulárna, tak potom existuje otvorené okolie $V \ni r_0$, $V \subset U$, že $f|_V : V \to f(V)$ je difeomorfizmus, pričom $f(V)$ je otvorená podmnožina v R^d.
Veta: (o inverznom zobrazení) Nech $f : M \to N$ je C^∞-zobrazenie a nech existuje $p \in M$ také, že $df_p : M_p \to N_{f(p)}$ je lineárny izomorfizmus. Potom existuje otvorené okolie $V \ni p$ také, že $f(V) \subset N$ je otvorená podmnožina a $f|_V : V \to f(V)$ je difeomorfizmus.
Def: Nech M^d je C^∞-varieta a nech $y_1, \dots, y_k$ sú reálne funkcie definované a hladké v nejakom okolí bodu $p \in M$. Hovoríme, že $y_1, \dots, y_k$ sú **nezávislé v bode** p ak $dy_1(p), \dots, dy_k(p)$ chápané ako prvky z M_p^* sú lineárne nezávislé.
Dôsledok 1: Nech $y_1, \dots, y_d$ sú funkcie nezávislé v bode $p \in M$, kde M^d je d-rozmerná C^∞-varieta. Potom $y_1, \dots, y_d$ tvoria lokálny súradnicový systém na nejakom okolí bodu p.
Dôsledok 2: Nech $p \in M^d$, M je C^∞-varieta a nech reálne funkcie $y_1, \dots, y_k$, $k \le d$ sú nezávislé v p. Potom funkcie $y_1, \dots, y_k$ sa dajú doplniť $d-k$ hladkými funkciami tak, že dostaneme lokálny súradnicový systém okolo bodu p.
Dôsledok 3: Nech $f : M^c \to N^d$ je C^∞-zobrazenie a nech $p \in M$ je bod taký, že $df_p : M_p \to N_{f(p)}$ je surjektívny (teda $c \ge d$). Ak $y_1, \dots, y_d$ sú lokálne súradnicové funkcie v okolí bodu $f(p)$, tak $y_1 \circ f, \dots, y_d \circ f$ sa dajú $(c-d)$ hladkými funkciami definovanými a hladkými na nejakom okolí bodu p doplniť tak, že dostanem lokálny súradnicový systém v bode p.
Dôsledok 4: Nech $p \in M^d$, M je C^∞-varieta. Ak $y_1, \dots, y_k (k \ge d)$ sú funkcie definované a hladké na nejakom okolí bodu p, pričom $[dy_1|_p, \dots, dy_k|_p] = M_p^*$, tak vhodná d-prvková podmnožina množiny $y_1, \dots, y_k$ určuje lokálny súradnicový systém okolo bodu p.
Dôsledok 5: Nech $f : M^c \to N^d$ je C^∞-zobrazenie C^∞-variet. Nech $p \in M$ je bod taký, že diferenciál $df_p : M_p \to N_{f(p)}$ je injekcia. (Teda $c \le d$.) Potom ak $y_1, \dots, y_d$ určuje lokálny súradnicový systém v bode $f(p)$, tak vhodná podmnožina $y_1 \circ f, \dots, y_d \circ f$ určuje lokálny súradnicový systém v p. Navyše existuje otvorené okolie $U \ni p$, že $f|_U : U \to f(U)$ je injekcia.
Def: Nech $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_{M^d}$. Nech $a = (a_1, \dots, a_d) \in \varphi(U)$, nech $0 \le c \le d$. Označme $S_c = \{q \in U : X_i(q) = a_i \ pre \ i = c+1, \dots, d\}$.
Na S_c máme globálny súradnicový systém $(X_1|_S, \dots, X_c|_S)$, teda S_c je C^∞-varieta dimenzie c.
S_c sa nazýva **c-rozmerný zrez** lokálneho súradnicového systému (U, φ).
Tvrdenie: Ak S je c-rozmerný zrez lokálneho súradnicového systému $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$, tak $(S, incl)$ je c-rozmerná podvarieta v M.
Veta: Nech $f : M^c \to N^d$ je C^∞-vnorenie. Potom pre ľubovoľný $p \in M$ existuje otvorené okolie $U \ni p$ a lokálny súradnicový systém (V, φ) okolo $f(p)$ také, že $f(U)$ je c-rozmerným zrezom lokálneho súradnicového systému (V, φ).
Veta: (o vzore bodu) Nech $f : M^c \to N^d$ je C^∞-zobrazenie a nech $n \in N$ je taký bod, že $P := f^{-1}(n) \neq \emptyset$, pričom nech $df|_x : M_x \to N_n$ je surjekcia pre $\forall x \in P$.
Potom na P existuje štruktúra hladkej variety taká, že $(P, incl)$ je hladká podvarieta v M, pričom $dim(P) = c - d$.
Veta: (o vzore podvariety) Nech $f : M^b \to N^d$ je C^∞-zobrazenie C^∞-variet.
Nech (A^c, g) je c-rozmerná podvarieta variety N.
Nech $P = f^{-1}(g(A)) \neq \emptyset$.
Nech pre $\forall m \in P$ je $N_{f(m)} = df_m(M_m) + dg_{g^{-1}(f(m))}(A_{g^{-1}(f(m))})$.
Potom na P existuje práve jedna štruktúra hladkej variety, pričom $dim(M) - dim(P) = dim(N) - dim(A)$, t.j. $codim_M(P) = codim_N(A)$.
Def: Nech $f : M^b \to N^d$ je C^∞-zobrazenie a (A^c, g) je C^∞-podvarieta v N. Ak pre dáke $m \in f^{-1}(g(A))$ platí: $N_{f(m)} = df_m(M_m) + dg_{g^{-1}(f(m))}(A_{g^{-1}(f(m))})$, tak hovoríme, že f je **transverzálne k** A **v** m, $f \pitchfork_m A$. Ak $f \pitchfork_m A$ pre všetky $m \in f^{-1}(g(A))$, tak hovoríme, že f je **transverzálne k** A, $f \pitchfork A$.
Veta: (o vzore podvariety) Nech $f : M^b \to N^d$ je C^∞-zobrazenie, nech (A^c, g) je c-rozmerná hladká

podvarieta variety N a nech $f \pitchfork A$. Potom ak $P = f^{-1}(g(A)) \neq \emptyset$, tak $f^{-1}(g(A))$ je hladká podvarieta v N, pričom $codim_M(P) = codim_N(A)$.
Def: Nech (M^b, i) je podvarieta v N; nech (A^c, i) je podvarieta v N. To, že $i \pitchfork A$, znamená, že $\forall x \in A \cap M : N_x = M_x + A_x$. Vtedy hovoríme, že M a A sú v **generickej** všeobecnej polohe, $M \pitchfork A$.
Veta: (Slabá Whitneyho veta o vnorení) Pre každú kompaktnú hladkú varietu M^d existuje $q \in N$ také, že M sa dá vložiť do $\mathbb{R}^q$.
Dá sa dokázať, že kompaktná varieta M^d sa vkladá do $\mathbb{R}^{2d+1}$ a vnára do $\mathbb{R}^{2d}$, pričom každé hladké zobrazenie $f : M^d \to \mathbb{R}^{2d+1}(\mathbb{R}^{2d})$ sa dá „aproximovať“ vložením (vnorením). Bez vlastnosti aproximácie: $\mathbb{R}^{2d}$, $\mathbb{R}^{2d-1}$.
Def: Nech $f : M^d \to N^d$ je C$^\infty$-zobrazenie C$^\infty$-variet. Potom bod $x \in M$ je **regulárny bod**, ak df_x je lineárny izomorfizmus. (Hovoríme, že df_x je regulárny.)
$y \in N$ je **regulárna hodnota** zobrazenia f, ak f^{-1} pozostáva iba z regulárnych bodov zobrazenia f.
$x \in M$ je **kritický bod** zobrazenia f, ak df_x nie je lineárny izomorfizmus (hodnosť Jacobiho matice je $\neq d$.)
$x \in M$ je **kritická hodnota** zobrazenia f, ak $f^{-1}(y)$ obsahuje aspoň 1 kritický bod zobrazenia f.
Veta: Nech $f : M^d \to N^d$ je hladké zobrazenia a M je kompaktná. Potom ak $y \in N$ je regulárna hodnota zobrazenia f, tak buď $f^{-1}(y) = \emptyset$ alebo f^{-1} má iba konečný počet bodov.
Veta: Ak $f : M^d \to N^d$ je hladké zobrazenie a M je kompaktná množina, tak funkcia $|\cdot| : RH(f) \to Z$; $|\cdot|(y) = |f^{-1}(y)|$ je lokálne konštantná. (Pre každý bod existuje okolie, v ktorom je konštantná.)
Veta: (Fundamentálna veta algebry) Nech $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $n \geq 1, a_0 \neq 0$ je komplexný polynóm. Potom existuje $z_0 \in C : P(z_0) = 0$.

Otázky zo skúšky:
1. Definícia diferenciálu + reťazcové pravidlo
2. Dotykový vektor ku krivke + veta o nich
3. Definícia difeomorfizmu + dokázať vetu o inverznom zobrazení medzi varietami (bola sformulovaná v zadaní)
4.$M_p \cong (F_p/F_p^2)^*$
$dim M_p = dim M$

Doplňujúca ústna otázka:
1. vektorové pole
2. Difeomorfizmus - definícia. Prečo difeomorfizmus zachováva dimenzie?
3. S^n ako C$^\infty$-varieta.