Ordinálne čísla a transfinitná indukcia

Cieľom tohoto textu je podať stručný úvod o ordináloch a transfinitnej indukcii – na takej úrovni, aby čitateľ bol schopný transfinitnú indukciu bez problémov používať.

1 Dobre usporiadané množiny a indukcia

1.1 Dobre usporiadané množiny

Začnime tým, že si povieme, čo rozumieme pod pojmom dobre usporiadanej množiny a prečo sú takéto množiny užitočné.

Definícia 1.1.1. Nech $(A, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina. Hovoríme, že $(A, \leq)$ je *dobre usporiadaná množina*, resp. že $\leq$ je *dobré usporiadanie* na množine A, ak každá neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok v usporiadaní $\leq$.

Priamo z definície sa dá ukázať, že každá podmnožina dobre usporiadanej množiny je opäť dobre usporiadaná.

Ako prvý príklad dobre usporiadanej množiny môžeme spomenúť množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ prirodzených čísel s obvyklým usporiadaním, alebo jej ľubovoľnú podmnožinu. (Špeciálne tak dostaneme n-prvkovú dobre usporiadanú množinu pre každé prirodzené číslo n.)

Ako príklad množiny, ktorá nie je dobre usporiadaná, môžeme uviesť $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Ako si ukážeme v nasledujúcej vete, dobre usporiadané množiny sú presne množiny pre ktoré funguje indukcia.

Definícia 1.1.2. Ak $(A, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina, tak symbolom A_a budeme označovať množinu všetkých prvkov menších než a.

$$A_a = \{x \in A; x < a\}$$

Veta 1.1.3 (Indukcia v dobre usporiadanej množine)**.** *Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. Nech podmnožina $B \subseteq A$ má nasledujúcu vlastnosť:*

$$(\forall a \in A) A_a \subseteq B \Rightarrow a \in B. \tag{1}$$ {EQIND}

Potom $B = A$.

Dôkaz je opäť pomerne jednoduchý – stačí použiť definíciu. Skúsme si rozmyslieť, o čom vlastne hovorí táto veta. Nech B je množina prvkov z A určených nejakou vlastnosťou. Potom podmienka z vety vlastne hovorí: „Ak túto vlastnosť majú všetky prvky menšie ako a, tak ju má aj a.“ A veta 1.1.3 hovorí, že v takomto prípade uvedenú vlastnosť majú všetky prvky z A.

Predsa len je tu istá odlišnosť oproti indukcii tak ako ju poznáme na prirodzených číslach. Tam obvykle ukazujeme, že $0 \in A$ a ak $n \in A$, tak aj nasledujúci prvok $n+1$ patrí do A. Toto sú jediné dva prípady, ktoré môžu v $(\mathbb{N}, \leq)$ nastať (každé číslo je buď 0 alebo nasledovník), čiže takto sa naozaj dá overiť podmienka (1) sformulovaná vo vete 1.1.3.

V prípade ľubovoľnej dobre usporiadanej množiny to môže byť o trochu komplikovanejšie. Tam totiž aj iné prvky ako najmenší prvok množiny A môžu mať tú vlastnosť, že nie sú nasledovníkmi.[1] Preto sa v praxi často v dôkaze transfinitnou indukciou rozlišujú tri prípady:

[1] *Nasledovníkom* prvku a voláme prvok b taký, že $a \leq b$, ale neexistuje prvok c, pre ktorý by platilo $a < c < b$. T.j. b nasleduje tesne po a.

najmenší prvok, nasledovník nejakého prvku a prvok, ktorý nie je nasledovníkom (limitný prvok). Vo všetkých troch prípadoch nám ide iba o overenie podmienky (1), obvykle sa overuje táto podmienka trochu inak v závislosti od toho, ktorý z uvedených prípadov nastane. Neskôr to uvidíme na príkladoch použitia transfinitnej indukcie. Zatiaľ by sme si mohli ukázať aspoň jeden príklad dobre usporiadanej množiny, ktoré obsahuje nenulového nenasledovníka. Takým príkladom je množina $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$, opäť s obvyklým usporiadaním. Prvok ∞ nie je nasledovníkom žiadneho prvku.

Skúsme sformulovať niektoré jednoduché pozorovania o dobre usporiadaných množinách, ktoré sa nám neskôr budú hodiť.

Lema 1.1.4. *Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina.*

(i) Ak a nie je najväčší prvok a, tak tento prvok má nasledovníka.

(ii) Ak podmnožina $B \subseteq A$ je zhora ohraničená, tak v A existuje prvok $b = \sup B$.

(iii) Pre každý prvok $a \in A$ nastane práve jedna z týchto možností:

- *$a = \min A$, t.j. a je najmenší prvok množiny A;*
- *a je nasledovníkom nejakého prvku $b \in A$;*
- *$a \neq \min A$ a platí $a = \sup\{b \in A; b < a\}$, teda a je suprémom množiny všetkých prvkov pod ním.*

Pod suprémom nejakej množiny rozumieme (ako obvykle) jej najmenšie horné ohraničenie. V tretej možnosti sme vylúčili prípad $a = \min A$, pretože najmenší prvok množiny A môžeme chápať ako suprémum prázdnej množiny.

Dôkaz. (i) Stačí zobrať $\min\{b \in A; b > a\}$. Ak a nie je maximum A, tak je uvedená množina neprázdna.

(ii) Množina horných ohraničení je neprázdna, zoberme jej najmenší prvok.

(iii) Je zrejmé, že nemôže nastať viacero z uvedených prípadov súčasne.

Predpokladajme teda, že a nie je najmenší prvok ani nasledovník a označme $B = \{b \in A; b < a\}$. Táto množina je zhora ohraničená prvkom a. Keby platilo $b := \sup B < a$, tak by suprémum množiny B bolo prvkom B, čo znamená, že $b = \max B$. To by ale znamenalo, že a je nasledovníkom b. □

Skúsme sa teda po týchto prípravných veciach pozrieť na nejaký dôkaz s použitím indukcie.

Tvrdenie 1.1.5. *Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina a $f \colon A \to A$ je injektívne monotónne zobrazenie*[2]*. Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$.*

Dôkaz pomocou indukcie. Stačí overiť podmienku (1), t.j. ukázať, že ak $b \leq f(b)$ platí pre všetky prvky b menšie ako a, tak platí aj pre a.

Ak a je minimálny prvok množiny A, tak musí platiť $a \leq f(a)$.

Ak a je nasledovník prvku b a $b \leq f(b)$, tak $f(a) > f(b)$, čiže $f(a)$ musí byť aspoň také, ako nasledovník prvku a.

Zostáva možnosť, že $a = \sup B$, kde $B = \{b \in A; b < a\}$ a pre každé $b \in B$ platí $b \leq f(b)$. Z monotónnosti máme $f(a) > f(b) \geq b$ pre všetky $b \in B$, teda $f(a)$ je horné ohraničenie množiny B. Z toho vyplýva $a = \sup B \leq f(a)$. □

V skutočnosti je tento dôkaz veľmi neprirodzený – uvedené tvrdenie môžeme dokázať oveľa jednoduchšie.

[2] t.j. pre ľubovoľné x, y platí $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že tvrdenie neplatí, čo znamená, že množina $B := \{a \in A; a > f(a)\}$ je neprázdna. Potom existuje jej najmenší prvok $b = \min B$.

Zrejme platí $b > f(b)$. Z monotónnosti máme $f(b) \geq f(f(b))$, keď navyše využijeme injektívnosť, tak vidíme, že $f(b) > f(f(b))$.

Zistili sme, že $f(b) \in B$, súčasne však platí $f(b) < b$, čo je spor s predpokladom, že b je najmenší prvok množiny B. □

Napriek tomu sme si ukázali aj dôkaz indukciou z dvoch dôvodov. Na začiatok sme chceli začať s dôkazom niečoho jednoduchého. A o chvíľu budeme na tomto ilustrovať, že keď zavedieme vhodnú terminológiu a označenie, tak sa tento dôkaz dá zapísať oveľa zrozumiteľnejšie.

1.2 Ordinály

Mohlo by sa zdať, že keď už máme k dispozícii vetu 1.1.3, mohli by sme sa pustiť do dokazovania rôznych tvrdení s využitím tejto vety. Čiže by mohlo nasledovať zopár tvrdení a ich dôkazy, ktoré by spočívali v tom, že by sme uviedli aké dobré usporiadanie používame a potom overili podmienku (1). V podstate by sa naozaj dalo takto dokazovať rôzne tvrdenia. My to ale napriek tomu budeme robiť trochu inak – najprv zavedieme ordinálne čísla, ktoré by nám mohli pomôcť dôkazy využívajúce indukciu na dobre usporiadaných množinách spraviť prehľadnejšími a zrozumiteľnejšími.

Situácia je do istej miery podobná ako s kardinalitami. Aj tvrdenia o kardinalite by sme mohli zapisovať tak, že namiesto $|A| = |B|$ by sme všade písali, že existuje bijekcia z A do B, podobne $|A| \leq |B|$ by sme prepísali ako existenciu injekcie. Takýto zápis by bol pomerne ťažkopádny. Napríklad Cantorovu vetu by sme namiesto stručného zápisu $A < |\mathcal{P}(A)|$ sformulovali takto: Existuje injekcia z A do $\mathcal{P}(A)$ a súčasne medzi týmito množinami neexistuje bijekcia.

Čiže teraz by sme sa chceli pokúsiť niečo podobné spraviť pre dobre usporiadané množiny. T.j. každej dobre usporiadanej množine $(A, \leq)$ by sme chceli priradiť niečo, čo budeme volať *ordinálny typ* alebo *ordinálne číslo* tejto množiny. Bez ohľadu na to, ako presne definujeme ordinálne čísla, dôležitá je pre nás iba táto vlastnosť:

- Ordinálne čísla dobre usporiadaných množín $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sa rovnajú, práve vtedy, keď keď existuje izomorfizmus (=monotónna bijekcia) medzi $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$.

V dôkazoch rôznych vlastností ordinálov budeme používať vlastne iba túto vlastnosť. (Podobne ako to bolo pri kardinálnych číslach, len tam úlohu izomorfizmu čiastočne usporiadaných množín hrala bijekcia.) Napríklad z tejto vlastnosti okamžite vidíme, že rovnosť ordinálnych čísel je reflexívna, symetrická a tranzitívna – čiže má tie vlastnosti, ktoré by sme od rovnosti očakávali.

Ordinálny typ množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ budeme označovať ω a ordinálny typ konečnej n-prvkovej usporiadanej množiny budeme označovať číslom n.

Podobne ako pri kardináloch, aj pre ordinály by asi bolo užitočné zaviesť nejakú zmysluplnú definíciu nerovnosti medzi ordinálnymi číslami.

Definícia 1.2.1. Ak $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina a $B \subseteq A$, tak B je *počiatočný úsek* množiny A, ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí

$$b \in B \wedge a \leq b \Rightarrow a \in B.$$

Ľahko sa dá ukázať, že počiatočné úseky množiny A sú presne množina A samotná a podmnožiny tvaru A_a.

Nerovnosť ordinálnych čísel môžeme zaviesť tak, že sa pozrieme na to, či jedna usporiadaná množina je izomorfná s počiatočným úsekom druhej.

Definícia 1.2.2. Ak α je ordinálny typ dobre usporiadanej množiny $(A, \leq)$ a β je ordinálny typ dobre usporiadanej množiny $(B, \leq)$, tak hovoríme, že $\alpha \leq \beta$ práve vtedy, keď existuje injektívne monotónne zobrazenie $f\colon A \to B$ také, že $f[A]$ je počiatočný úsek množiny $(B, \leq)$.

Dokonca sa dá ukázať, že $\alpha \leq \beta$ práve vtedy, keď A je izomorfné s nejakou podmnožinou $(B, \leq)$, nie nutne s počiatočným úsekom. Definícia pomocou počiatočných úsekov je však z viacerých dôvodov výhodnejšia.

Môžeme si všimnúť, že pomocou tvrdenia 1.1.5 sa dá ľahko ukázať, že takéto vnorenie existuje jediné:

Tvrdenie 1.2.3. *Nech $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ sú dobre usporiadané množiny. Ak $f, g\colon A \to B$ sú izomorfizmy medzi množinou A a nejakým počiatočným úsekom množiny B, tak $f = g$.*

Dôkaz. Nech by platilo $f(a) < g(a)$ pre nejaké $a \in A$. Označme $B' = \{b \in B; b \leq g(a)\}$. Potom máme zobrazenie[3] $h = f \circ g^{-1}\colon B' \to B'$, ktoré je monotónne a platí preň $h(g(a)) < g(a)$, čo je v spore s tvrdením 1.1.5. □

Ľahko vidno, že takto definovaná nerovnosť je reflexívna a tranzitívna. Nie je na prvý pohľad jasné, či ide o lineárne usporiadanie. Tento fakt vyplýva z nasledujúcej vety (ktorú tu nebudeme dokazovať).

Veta 1.2.4 (Základná veta o dobre usporiadaných množinách)**.** *Ak $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sú dobre usporiadané množiny, tak buď $(A, \leq)$ je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom množiny B alebo $(B, \leq)$ je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom množiny A.*

S použitím tvrdenia 1.1.5 (alebo tvrdenia 1.2.3) a vety 1.2.4 už vieme ukázať, že pre ľubovoľné ordinály α, β, γ platia všetky obvyklé podmienky z definície lineárneho usporiadania

$$\alpha \leq \alpha$$
$$\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$$
$$\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$$
$$\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$$

Okrem toho, že vieme ordinály porovnávať, budú pre nás dôležité ešte dva fakty:
- Každý ordinál má nasledovníka.
- Pre každú množinu ordinálov existuje ordinál, ktorý je suprémom (najmenším horným ohraničením) tejto množiny.

Pozrime sa najprv na existenciu nasledovníka. Nech α je ordinálny typ dobre usporiadanej množiny $(A, \leq)$. Vytvorme lineárne usporiadanú množinu $A \cup \{\infty\}$ (kde $\infty \notin A$ je nejaký nový prvok), pričom na nej zavedieme usporiadanie $\preceq$, ktoré rozširuje pôvodné usporiadanie a pre každý prvok $a \in A$ platí $a \preceq \infty$. Čiže sme vlastne pridali nový prvok, ktorý je najväčší prvok vo výslednej množine. Potom $(A \cup \{\infty\}, \preceq)$ je opäť dobre usporiadaná množina a jej ordinálny typ voláme *nasledovník* ordinálu α. Označujeme ho $S(\alpha)$ alebo $\alpha + 1$.

Napríklad ordinálny typ množiny $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ s obvyklým usporiadaním je $S(\omega) = \omega + 1$.

Tvrdenie 1.2.5. *Ak $\{\alpha_i; i \in I\}$ je ľubovoľná množina ordinálov, tak existuje ordinál $\alpha = \sup\{\alpha_i; i \in I\}$.*

Dôkaz. Máme dobre usporiadané množiny $(A_i, \leq_i)$, medzi ktorými sú (jedným alebo druhým smerom) vnorenia na počiatočné úseky. Z tvrdenia 1.2.3 vyplýva, že tieto vnorenia sú navzájom kompatibilné. Vďaka tomu môžeme všetky množiny $(A_i, \leq_i)$ stotožniť s počiatočnými úsekmi jedinej dobre usporiadanej množiny $(A, \leq)$. Potom za α môžeme zobrať ordinálny typ množiny $\bigcup_{i \in I} A_i$. □

[3]Ak by sme mali byť úplne presní, zobrazenie B' by sme mali definovať pomocou zúžení $g|_B$ a $f|_{g[B]}$, zvolili sme však stručnejší zápis.

Poznámka 1.2.6. Pokiaľ by argument o tom, prečo môžeme všetky A_i vnoriť do tej istej množiny, nebol jasný, môžeme sa pozrieť na konštrukciu, ktorá sa nazýva *induktívna limita* alebo tiež *priama limita*. (Hoci tým trochu odbočíme od hlavnej témy.)

Prepodokladajme, že máme nahor usmernenú množinu $(I, \leq)$, množiny A_i pre $i \in I$ (bez ujmy na všeobecnosti nech sú navzájom disjunktné) a pre ľubovoľné $i \leq j$ z I máme zobrazenia $f_{ji} \colon A_i \to A_j$. Ďalej predpokladajme, že tieto zobrazenia spĺňajú podmienku

$$i \leq j \leq k \qquad \Rightarrow f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}.$$

Ak definujeme na $\bigcup_{i\in I} A_i$ reláciu $\sim$ tak, že pre $a \in A_i$, $b \in B_j$ položíme

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad (\exists k \in I) f_{ki}(a) = f_{kj}(b).$$

Dostaneme tak reláciu ekvivalencie. Nech B je rozklad $\bigcup_{i\in I} A_i$ podľa tejto relácie ekvivalencie.

Potom pre každé $i \in I$ máme zobrazenie $f_i \colon A_i \to b$, ktoré prvku A_i priradí jeho triedu ekvivalencie. V prípade, že všetky f_{ji} sú injektívne, je aj zobrazenie f_i injektívne. (Predpoklad, že všetky zobrazenia sú injektívne, robí túto konštrukciu o čosi jednoduchšou a názornejšou. V našom prípade, keď ide o reťazec množín, čiže usporiadanie indexovej množiny I je lineárne, je táto konštrukcia ešte o kúsok jednoduchšia.)

Definícia 1.2.7. Ordinál, ktorý nie je nasledovníkom žiadneho ordinálu, nazývame *limitný ordinál.*

Príkladom limitného ordinálu je ω.

Z tvrdenia 1.2.5 môžeme dostať dva zaujímavé dôsledky.

Dôsledok 1.2.8. *Každá množina ordinálov je dobre usporiadaná.*

Dôkaz. Množina ordinálov $\{\alpha_i; i \in I\}$ je podmnožina dobre usporiadanej množiny $\alpha = \sup\{\alpha_i; i \in I\}$. □

Dôsledok 1.2.9. *Neexistuje množina všetkých ordinálnych čísel.*

Dôkaz. Ak by existovala, jej suprémum α. Potom jeho nasledovník $\alpha + 1$ by bol ordinálne číslo, ktoré je väčšie ako každé ordinálne číslo; teda by preň platilo $\alpha + 1 > \alpha + 1$. □

1.3 Transfinitná indukcia

Princíp transfinitnej indukcie môžeme teraz preformulovať trochu inak – namiesto toho, aby sme dokazovali tvrdenie pre nejakú dobre usporiadanú množinu, budeme ho dokazovať pre ordinál, ktorý jej zodpovedá.

Veta 1.3.1. *Nech $\varphi(x)$ je formula teórie množín taká, že ak platí $\varphi(\beta)$ pre všetky ordinály menšie ako $\varphi(\alpha)$, tak platí aj $\varphi(\alpha)$.*

Potom je formula $\varphi(\alpha)$ pravdivá pre každý ordinál α.

Ako sme už spomínali v praxi často budeme rozlišovať prípady $\alpha = 0$, α je nasledovník (čiže $\alpha = \beta + 1$ pre nejaké β) a α je limitný ordinál. Vidíme, že sme získali aspoň jednu drobnú výhodu pri označení – minimálny prvok je vždy označený 0, nasledovník prvku β je $\beta + 1$.

Napríklad tvrdenie 1.1.5 môžeme teraz preformulovať a dokázať takto: [4]

Tvrdenie 1.3.2. *Nech λ je ordinálne číslo a A je množina ordinálnych čísel menších ako λ. Nech $f \colon A \to A$ je monotónna injekcia; t.j. $\beta < \gamma \Rightarrow f(\beta) < f(\gamma)$. Potom pre každé $\alpha \in A$ platí $f(\alpha) \geq \alpha$.*

[4] Každá množina A má nejaký ordinálny typ, preto sa dá vnoriť ako počiatočný úsek do nejakého ordinálu. Z toho vyplýva, že je izomorfná s nejakým dolným úsekom triedy všetkých ordinálov. Čiže formulácia, ktorú tu uvedieme, je skutočne ekvivalentná s pôvodnou.

Dôkaz. 1° Určite platí $0 \leq f(\alpha)$, pretože 0 je najmenší ordinál.

2° Nech $\alpha = \beta + 1$ a tvrdenie platí pre ordinál β. Pretože $\alpha > \beta$, máme $f(\alpha) > f(\beta) \geq \beta$, a teda aj

$$f(\alpha) \geq \beta + 1.$$

3° Nech α je limitný ordinál a tvrdenie platí pre všetky menšie ordinály $\beta < \alpha$, t.j.

$$(\forall \beta < \alpha) f(\beta) \geq \beta.$$

Z toho vyplýva, že

$$(\forall \beta < \alpha) f(\alpha) \geq \beta,$$

a teda

$$f(\alpha) \geq \sup_{\beta < \alpha} \beta = \alpha.$$

□

1.4 Definícia transfinitnou indukciou

Okrem toho, že transfinitná indukcia sa dá používať na dôkaz tvrdení, dajú sa pomocou nej aj definovať rôzne objekty. (Podobne ako pri obvyklej indukcii na prirodzených číslach sme používali i definíciu pomocou matematickej indukcie.)

Neformálne to môžeme povedať takto: Ak máme predpis, ktorý pre každý ordinál α a už definované $f(\beta)$ pre $\beta < \alpha$ jednoznačne určí nejakú množinu, tak túto množinu môžeme zobrať ako $f(\alpha)$. Dostaneme tak jednoznačne určenú množinu $f(\alpha)$ pre každý ordinál α.

Keby sme chceli toto tvrdenie zapísať formálnejšie, tak by sme to mohli zapísať napríklad takto:

Veta 1.4.1 (Veta o transfinitnej rekurzii)**.** *Pre danú funkciu G definovanú na triede všetkých množín existuje práve jedna funkcia F definovaná na triede všetkých ordinálov taká, že*

$$G(F|_{\{\beta;\beta<\alpha\}}) = F(\alpha).$$

Zápis, ktorý sme uviedli vo vete naozaj formalizuje to, čo si pod transfinitnou rekurziou predstavujeme – funkcia G tu vyjadruje priradenie, ktorým je určená hodnota $F(\alpha)$ pomocou predchádzajúcich hodnôt – čo sú presne hodnoty zúženia $F|_{\{\beta;\beta<\alpha\}}$.

Uvedená formulácia vety má jednu nevýhodu – pracujeme tam s triedovými funkciami, čiže definičný obor je trieda a nie množina. Dá sa tomu pomerne ľahko vyhnúť – vedeli by sme podobne sformulovať vetu, ktorá by určovala funkciu F nie na všetkých ordináloch, ale pre ordinály menšie ako nejaký daný ordinál. Toto pre praktické účely často stačí. Ak by sme predsalen potrebovali niečo definovať pre ľubovoľný ordinál, tak by sme použili túto formuláciu pre každý ordinál α.

Takýmto problémom sa tu však nebudeme venovať – chceme sa hlavne naučiť používať transfinitnú indukciu, čiže sa úplne uspokojíme aj s jej neformálnym popisom.

Ako ukážku použitia transfinitnej indukcie môžeme ukázať, ako sa pomocou axiómy výberu dá dokázať Zornova lema.

Dôkaz implikácie $AC \Rightarrow ZL$. Nepriamo. Nech $(P, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina, ktorá nemá maximálny prvok. To znamená, že pre každé $p \in P$ je

$$p\uparrow = \{q \in P; q > p\} \neq \emptyset.$$

Nech f je selektor[5] na množine $\mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$. Transfinitnou indukciou definujeme:
$p_0 = f(P)$;
$p_{\beta+1} = f(p_\beta \uparrow)$;
$p_\beta = f(\{q \in P; q \text{ je horné ohraničenie pre } \{p_\gamma; \gamma < \beta\}\})$, ak β je limitný ordinál a existuje aspoň jedno horné ohraničenie množiny $\{p_\gamma; \gamma < \beta\}$.

Tento proces sa musí raz zastaviť, inak by sme takto dostali bijekciu medzi podmnožinou množiny P a všetkými ordinálmi, čo je spor s dôsledkom 1.2.9.

Dostaneme tak, ordinál α pre ktorý

$$\{p_\gamma; \gamma < \alpha\}$$

je reťazec v $(P, \leq)$, ktorý nemá horné ohraničenie. (Že ide skutočne o reťazec vidno z toho, že máme $\beta < \gamma \Rightarrow p_\beta < p_\gamma$.) □

V predošlom dôkaze sme nepostupovali presne podľa schémy, ktorú sme uviedli – postupovali sme po nejaký ordinál, kde sa transfinitný proces zastavil. Dá sa to však pomerne ľahko opraviť – mohli by sme podobne postupovať pre všetky ordinály alebo nájsť nejaký horný odhad pre ordinál α, na ktorom sa nutne musíme zastaviť. Dôkaz by sme zmenili tak, že by sme na tých miestach, kde sa nedá pridať nový prvok (t.j. selektor f by v predpisoch uvedených vo vete vyberal z prázdnej množiny) zvolili prvok, ktorý už v doteraz skonštruovanom reťazci je.

1.5 Von Neumannova konštrukcia ordinálov

V praxi by sme zrejme vystačili s naivným chápaním ordinálov ako ordinálnych typov dobre usporiadaných množín. Je však užitočné vedieť, že sa pojem ordinálu dá zaviesť axiomaticky. T.j. dá sa zadefinovať, aké podmienky spĺňa množina, aby sme ju nazvali ordinálom a potom dokázať, že každá dobre usporiadaná množina je izomorfná s nejakým takto definovaný ordinálom. Najpoužívanejšia je veľmi elegantná konštrukcia pochádzajúca od von Neumanna.

Nechceme sa venovať tejto konštrukcii detailne. Oplatí sa o nej povedať aspoň niečo prinajmenšom z dvoch dôvodov. Jeden dôvod je, že sa táto konštrukcia a jej vlastnosti bežne vyskytujú v literatúre – čiže pri čítaní dôkazu využívajúceho transfinitnú indukciu v nejakej knihe alebo článku môžete naraziť na to, že autor tieto vlastnosti používa, takže je dobre ich poznať, inak by bolo ťažké takémuto dôkazu porozumieť. Ďalšia výhoda je to, že nám to umožní niektoré veci zapísať stručnejšie a prehľadnejšie.

Takže spomeňme niektoré takéto vlastnosti.

Pre ordinály (z von Neumannovej konštrukcie) platí

$$\alpha < \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \in \beta \tag{2}$$ {EQIN}

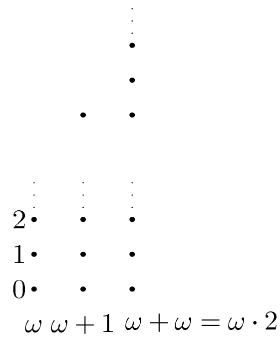
$$\alpha \leq \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \subseteq \beta \tag{3}$$

Môžeme si všimnúť, že prvá vlastnosť, t.j. ekvivalencia $a < b$ a $a \in b$ nám hovorí, že ordinál ako prvky obsahuje presne všetky menšie ordinály, čiže každý ordinál je presne množina všetkých ordinálov od neho menších,

$$\beta = \{\alpha; \alpha < \beta\}.$$

Na základe tohoto faktu vieme popísať, ako vyzerajú aspoň niektoré malé ordinály a získať základnú predstavu o von Neumannovej konštrukcii. Najmenší ordinál je množina $\emptyset$, ktorú označíme 0. Ako bude vyzerať nasledovník tohoto ordinálu? Podľa (2) by to mala byť

[5] T.j. zobrazenie, ktoré každej neprázdnej množina z daného systému priradí nejaký jej prvok. Existenciu takého zobrazenia zaručuje axióma výberu.



Obr. 1: Ordinály ω, $\omega+1$ a $\omega+\omega$.

množina, ktorá obsahuje všetky menšie ordinály – v tomto prípade je to jediný ordinál 0. Podobne dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \\
3 &= \{0,1,2\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Takto vieme popísať všetky konečné ordinály. Ako prvý nekonečný ordinál nasleduje $\omega = \{0,1,2,3,\dots\}$.

Ďalej z ekvivalencie $\alpha<\beta$ a $\alpha\in\beta$ vidíme aj to, že pre každý ordinál je relácia $\in$ jeho čiastočným usporiadaním. (Pod reláciou $\in$ na množine β tu rozumieme množinu usporiadaných dvojíc $\{(\alpha,\alpha')\in\beta\times\beta;\alpha\in\alpha'\}$.)

Tiež môžeme zistiť, ako vyzerá nasledovník daného ordinálu. Ordinál $S(\alpha)$ má obsahovať všetky menšie ordinály – to sú α a prvky α. Teda vidíme, že $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$.

Takisto by malo byť jasné, že platí $\sup_{i\in I}\alpha_i=\bigcup_{i\in I}\alpha_i$.

Pomocou tejto konštrukcie sa dajú zadefinovať i kardinálne čísla – kardinál budeme chápať ako najmenší ordinál danej kardinality.

Aby sme získali o niečo lepšiu predstavu o ordináloch, poďme sa pozrieť, aké ďalšie ordinály by sme vedeli dostať. Zatiaľ máme konečné ordinály $1,2,3,\dots$ a ich suprémum sme označili ω.

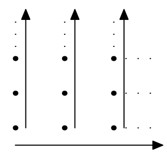
Máme aj nasledovník tohoto ordinálu, t.j. $\omega+1$. Ďalej by sme mohli pridávať nasledovníkov $\omega+2,\omega+3,\dots$. Ordinál, ktorý dostaneme ako suprémum všetkých týchto ordinálov je prirodzené označiť $\omega+\omega$ alebo tiež $\omega\cdot 2$.

Podobne by sme mohli definovať $\omega\cdot 3,\omega\cdot 4,\dots$. Suprémum týchto ordinálov označíme $\omega\cdot\omega=\omega^2$.

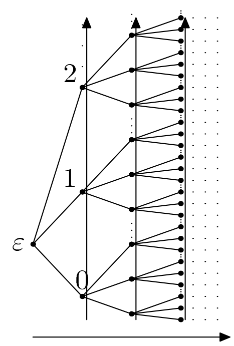
Ako už isto očakávate, rovnako môžeme postupovať ďalej a po ordináloch $\omega^2,\omega^3,\omega^4,\dots$ pridať ich suprémum ω^ω.

Ani tu sa nemusíme zastaviť, môžeme ďalej pokračovať ordinálmi $\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega},\omega^{\omega^{\omega^\omega}},\dots$. Ich suprémum označíme ε_0. Tento ordinál je najmenší ordinál, pre ktorí platí $\omega^x=x$.

Hoci ordinál ε_0 je skutočne veľký, ľahko si uvedomíme, že všetky doteraz vytvorené ordinály sú spočítateľné. Určite musia existovať aj nespočítateľné ordinály. Najmenší nespočítateľný ordinál označíme ω_1. (Niekedy sa v literatúre môžete stretnúť aj s označením Ω.)



Obr. 2: Ordinál $\omega.\omega = \omega^2$. Šípky na obrázku majú znázorňovať, ako robíme lexikografické usporiadanie; najprv porovnávame pozíciu podľa dolnej šípky, ak sú na rovnakej úrovni, ako druhé kritérium máme zvislé šípky.



Obr. 3: Jedno z možných grafických znázornení ordinálu ω^ω

Podobným spôsobom, ako sme to robili pre niektoré malé ordinály, by sme vedeli zaviesť sčitovanie, násobenie i umocňovanie ordinálov všeobecne. Hoci ordinálna aritmetika je celkom pekná a zaujímavá téma, tu sa jej nebudeme venovať. Niektoré zo spomenutých ordinálov sú znázornené na obrázkoch 1, 2 a 3.

Ešte tu na jednom mieste zopakujme užitočné fakty o ordináloch:

- Pre ordinály platí $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$; $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.
- Každý ordinál je dobre usporiadaný reláciou $\in$, ordinálny typ dobre usporiadanej množiny $(\alpha, \in)$ je α.
- Ordinál je množina všetkých ordinálov od neho menších, $\alpha = \{\beta; \beta < \alpha\}$.
- Ordinálny nasledovník ordinálu α je $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.
- Suprémum množiny ordinálov môžeme dostať ako $\sup_{i\in I} \alpha_i = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$.
- Kardinál je najmenší ordinál danej kardinality. Špeciálne, každý kardinál a chápeme ako množinu kardinality a.

Napríklad si môžeme všimnúť, že vo vete 1.4.1 o transfinitnej rekurzii by sme už teraz mohli použiť stručnejší zápis $G(F|_\alpha)$ namiesto $G(F|_{\{\beta;\beta<\alpha\}})$. (Aby sme uviedli aspoň jednu ukážku toho, že uvedené konvencie nám niekedy pomôžu zjednodušiť označenie.) Takisto v dôkaze tvrdenia 1.2.5 by sme mohli priamo použiť zjednotenie a nemuseli by sme prechádzať k novej množine. V tvrdení 1.3.2 by sme mohli použiť priamo λ namiesto množiny ordinálov menších ako λ.

2 Aplikácie transfinitnej indukcie

2.1 Pre nekonečné kardinály platí $a^2 = a$

Pre niektoré kardinály vieme toto tvrdenie dokázať ľahko, napríklad vieme, že $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Pomocou transfinitnej indukcie vieme ukázať platnosť tejto rovnosti pre každý nekonečný kardinál.

Veta 2.1.1. *Pre každý kardinál $a \geq \aleph_0$ platí $a.a = a$.*

Dôkaz. Vieme, že toto tvrdenie platí pre najmenší nekonečný kardinál pre $a = \aleph_0$. Ukážeme, že ak toto tvrdenie platí pre každý nekonečný kardinál $b < a$, tak platí aj pre a.

Nech teda $a > \aleph_0$. Majme dobré usporiadanie $\leq$ na a, také, že všetky počiatočné úseky tvaru $\{x \in a; x < b\}$ pre $b \in a$ majú kardinalitu menšiu ako a. Pomocou tohoto usporiadania[6] zadefinujeme usporiadanie $\leq^*$ na množine $a \times a$, o ktorom potom ukážeme, že je dobrým usporiadaním.

Definujme $\leq^*$ takto: Nech $m_1 = \max\{a_1, b_1\}$ a $m_2 = \max\{a_2, b_2\}$. Potom

$$(a_1, b_1) <^* (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1 < m_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 < a_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2) \end{cases}$$

Nie je ťažké overiť, že ide o lineárne usporiadanie. (Prvky množiny a sme vlastne umiestnili do akýchsi štvorcov a usporiadali najprv podľa toho, na hranici ktorého štvorca ležia a ako sekundárne kritérium sme použili lexikografické usporiadanie.) Je to aj dobré usporiadanie – pre každú podmnožinu $a \times a$ môžeme vybrať najmenšie m, ktoré sa vyskytuje ako maximum nejakej dvojice prvkov tejto podmnožiny. Keď sa už pozeráme iba na prvky s rovnakým maximom, tie sú usporiadané lexikograficky.

Navyše, každý dolný úsek $a \times a_{(a_1,b_1)} = \{(x, y) \in a \times a; (x, y) <^* (a_1, b_1)\}$ má kardinalitu menšiu ako a. (Ak $m_1 = \max\{a_1, b_1\}$, tak kardinalitu tohoto dolného úseku zhora môžeme odhadnúť $|a_{m_1}|.|a_{m_1}|$. Pretože $|a_{m_1}| < a$ a predpokladáme, že dokazované tvrdenie platí pre všetky kardinály menšie ako a, dostávame $|a_{m_1}|.|a_{m_1}| = |a_{m_1}|$.)

Potom pre každý počiatočný úsek $(a \times a, \leq^*)$ existuje bijekcia na počiatočný úsek dobre usporiadanej množiny $(a, \leq)$. (Vieme, že pre 2 dobre usporiadané existuje buď zobrazenie jednej na počiatočný úsek druhej alebo obrátene. Množinu $(a, \leq)$ však nemožno vnoriť do $(a \times a, \leq^*)$ ako počiatočný úsek, lebo potom by tento počiatočný úsek musel mať kardinalitu a). Navyše, všetky tieto vnorenia na počiatočné úseky sú kompatibilné (pozri tvrdenie 1.2.3).

Vďaka tomu ako zjednotenie týchto zobrazení (inak povedané – ako zobrazenie, ktorého hodnota bude spoločná hodnota všetkých vnorení) dostaneme vnorenie $(a \times a, \leq^*)$ na počiatočný úsek $(a, \leq)$. Tým sme našli injekciu z $a \times a$ do a, preto platí

$$a.a \leq a.$$

Opačná nerovnosť je zrejmá, čím dostávame rovnosť $a.a = a$.

Poznamenajme ešte, že argumentovaním pomocou kardinality sme mohli dokonca ukázať, že uvedené vnorenie je v skutočnosti priamo bijekcia. □

[6] Odkiaľ vieme, že usporiadanie $\leq$ s uvedeným vlastnosťami existuje? Ak kardinály chápeme ako ordinály, tak je to priamo usporiadanie ordinálu a. Môžeme to dostať aj inak: Vezmeme si ľubovoľné dobré usporiadanie množiny A, ktorá má kardinalitu a – nejaké dobré usporiadanie A existuje podľa (WO). V tomto usporiadaní vezmeme najmenší prvok b taký, že $A_b = \{x \in A; x < b\}$ má kardinalitu a. Ak taký prvok neexistuje, tak už pôvodné usporiadanie množiny A má požadovanú vlastnosť. Ak taký prvok existuje, tak pomocou bijekcie medzi A_b a A môžeme preniesť toto usporiadanie na celú množinu A.

V predchádzajúcom dôkaze sme využívali, že na kardinále a máme nejaké dobré usporiadanie. (Dohodli sme sa, že kardinály chápeme ako niektoré špeciálne ordinály.) Rovnaký dôkaz by sme mohli urobiť pre ľubovoľnú množinu A – zobrali by sme ľubovoľné dobre usporiadanie množiny A a postupovali by sme presne rovnako ako v predošlom dôkaze. Dostaneme tak platnosť

$$|A \times A| = |A|.$$

Využívame tu WO, a teda vlastne AC. Tarski dokonca ukázal, že z platnosti $|A \times A| = |A|$ pre ľubovoľnú množinu vyplýva AC.

Dôsledok 2.1.2. *Ak a, b sú nekonečné kardinály, tak*

$$a + b = ab = \max\{a, b\}.$$

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \leq b$. Potom

$$b \leq a + b \leq b + b = 2b \leq a.b \leq b.b = b.$$

□

2.2 Steinitzova veta

Dôkaz Steinitzovej vety tu uvádzame približne v rovnakej podobe ako v [CL, Theorem 2.3.3].

Veta 2.2.1 (Steinitz). *Steinitzova veta: Pre každé pole existuje algebraicky uzavreté nadpole, ktoré ho obsahuje.*

Najprv pripomeňme pár vecí z algebry. Pre každý polynóm $f(x) \in F[x]$ existuje rozkladové pole tohoto polynómu – je to také nadpole poľa F, v ktorom sa dá polynóm $f(x)$ rozložiť na súčin konštanty a koreňových činiteľov.[7] Pozri napríklad [KGGS, Kapitola 8.3], [CL, Section 2.2], [S].

Dôkaz. Transfinitnou indukciou o chvíľu ukážeme, že pre dané pole F existuje algebraické rozšírenie[8] K, v ktorom sa každý polynóm $f(x) \in F[x]$ dá rozložiť na súčin koreňových činiteľov. Ukážme najprv však, že takéto pole už nutne musí byť algebraicky uzavreté.

Uvažujme ľubovoľný ireducibilný polynóm $p(x) \in K[x]$. Nech koeficienty polynómy $p(x)$ sú $a_0, \dots, a_n \in K$. Potom p je polynómom už nad menším poľom $L := F(a_0, \dots, a_n) \subseteq K$. V nadpoli $L[x]/(p(x))$ má polynóm $p(x)$ koreň. Pole L je algebraickým rozšírením poľa F (každý z prvkov $a_0, \dots, a_n$ je algebraický nad F) a v $L[x]/(p(x))$ existuje koreň α polynómu $p(x)$. Tento koreň je teda algebraický nad L, čiže je aj algebraický na F. Existuje teda minimálny polynóm $q(x)$ tohoto koreňa nad poľom F. Tento minimálny polynóm je v $L[x]$ je deliteľný polynómom $p(x)$, ktorý je minimálny polynóm toho istého koreňa nad L. Máme teda $q(x) = p(x).r(x)$. Táto rovnosť platí aj v $K[x]$ (K je nadpole L), ale v K sa navyše polynóm $q(x)$ dá rozložiť na súčin koreňových činiteľov. Z toho vyplýva, že aj $p(x)$ sa dá rozložiť na súčin koreňových činiteľov.

Zostáva teda dokázať, že sa dá zostrojiť pole K s uvedenými vlastnosťami. Toto pole skonštruujeme transfinitnou rekurziou.

[7] Navyše sa v definícii rozkladového poľa ešte vyskytuje podmienka, že je to v istom zmysle najmenšie pole s touto vlastnosťou, t.j. je generované množinou $F \cup \{u_1, \dots, u_n\}$, kde $u_1, \dots, u_n$ sú korene $f(x)$ v rozkladovom poli. Túto druhú vlastnosť však potrebovať nebudeme. Pripomeňme tiež, pre ireducibilný polynóm $f(x) \in F[x]$ je $F[x]/(f(x))$ nadpole F, v ktorom má $f(x)$ aspoň jeden koreň. Existencia rozkladového poľa sa dokázala induktívne pomocou tejto konštrukcie.

[8] t.j. každý z prvkov K je algebraický nad F

Nech $\{f_\beta(x), \beta < \gamma\}$ sú všetky ireducibilné polynómy nad F oindexované ordinálmi menšími ako γ. (Využili sme fakt, že množinu ireducibilných polynómov možno dobre usporiadať.) Pre každé $\alpha \leq \gamma$ zostrojíme algebraické rozšírenie K_α poľa F, v ktorom je každý polynóm $f_\beta(x)$ pre $\beta < \alpha$ rozložiteľný na súčin koreňových činiteľov.

1° Pre $\alpha = 0$ zoberieme priamo pole K.

2° Ak máme zostrojené pole K_α, tak $K_{\alpha+1}$ bude rozkladové pole polynómu f_α nad poľom K_α. Rozkladové pole je algebraické rozšírenie K_α, pretože K_α je algebraické rozšírenie F je aj K_α algebraickým rozšírením F.

3° Ak α je limitný ordinál, tak by sme K_α chceli zadefinovať ako pole, ktoré bude obsahovať K_β pre všetky $\beta < \alpha$ – čosi ako zjednotenie týchto polí. Pretože všetky polia sú také, že polia oindexované nižšími ordinálmi sú vnorené ako podpolia v tých poliach, ktoré majú vyššie indexy, môžeme priamo predpokladať, že sú to polia na podmnožinách tej istej množiny a potom skutočne stačí zobrať priamo zjednotenie týchto polí. □

2.3 Patologické podmnožiny v $\mathbb{R}^2$

Nasledujúce tvrdenie a jeho dôkaz sme prevzali z [Ci, Theorem 6.1.1].

Tvrdenie 2.3.1. *Existuje podmnožina $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ taká, že všetky x-ové rezy $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ sú jednoprvkové a všetky y-ové rezy $A^y = \{x \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ sú husté v $\mathbb{R}$.*

Takáto množina je grafom silno darbouxovskej funkcie. Funkcia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa volá *silno darbouxovská,* ak pre ľubovoľné reálne čísla $a < b$ nadobúda f na intervale (a, b) všetky reálne hodnoty.

Slabšia vlastnosť je *darbouxovská funkcia* – ak nadobúda všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$. Z analýzy viete, že každá spojitá funkcia je darbouxovská. Príklad silno darbouxovskej funkcie je súčasne príklad darbouxovskej funkcie, ktorá nie je spojitá.

Dôkaz. V dôkaze budeme netradične používať označenie $[a, b]$ pre dvojice reálnych čísel – z toho dôvodu, že tu budeme často pracovať s otvorenými intervalmi na reálnej osi a nechceme, aby sa tieto 2 označenia plietli.

Transfinitnou rekurziou budeme definovať množinu B s podobnými vlastnosťami s tým rozdielom, že x-ové rezy B_x sú najviac jednoprvkové.

Najprv si poriadne uvedomme, že znamená požiadavka na y-vé rezy. Vlastne chceme, aby pre každý interval (a, b) a pre každé $y \in \mathbb{R}$ platilo

$$A \cap (a, b) \times \{y\} \neq \emptyset.$$

Množina všetkých takýchto vodorovných úsečiek v rovine $\{(a, b) \times \{y\}; y, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ má kardinalitu $\mathfrak{c}$. Môžeme ich teda dobre usporiadať pomocou ordinálu, ktorý zodpovedá kardinálu $\mathfrak{c}$. (Inak povedané, dá sa dobre usporiadať tak, že vlastné počiatočné úseky budú mať kardinalitu menšiu ako $\mathfrak{c}$.)

Majme teda nejaké takéto usporiadanie $\{U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times \{y_\alpha\}; \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Transfinitnou rekurziou pomocou neho zostrojíme $B = \{(x_\alpha, y_\alpha); \alpha < \mathfrak{c}\}$. (V tomto prípade nebude potrebné rozdeľovať indukciu podľa typu ordinálu.)

Predpokladajme, že už máme zadefinované x_β pre všetky $\beta < \alpha$. Prvok y_α už máme zadefinovaný usporiadaním úsečiek U_α. Množina $\{x_\beta; \beta < \alpha\}$ má kardinalitu menšiu ako $\mathfrak{c}$, teda množina $(a_\alpha, b_\alpha) \setminus \{x_\beta; \beta < \alpha\}$ je neprázdna. Za x_α zvolíme nejaký jej prvok.

Takto postupne zostrojíme množinu B, ktorá má neprázdny prienik s každou úsečkou U_α, teda spĺňa podmienku pre y-ové rezy. Navyše voľba x_α v indukčnom kroku zabezpečí, že žiadne x sa nevyskytne dvakrát, čiže y-ové rezy B sú najviac jednoprvkové.

Množinu A zostrojíme tak, že pre x-ové súradnice, ktoré sa v B nevyskytli, zvolíme y-ovú súradnicu ľubovoľne. Napríklad ak ju zvolíme ako nulu, tak $A = B \cup \{(x, 0); x \in \mathbb{R}, B_x = \emptyset\}$. $\square$

Podobným spôsobom môžete napríklad ukázať aj to, že existuje množina bodov v rovine, ktorá pretína každú priamku práve dvakrát; pozri napríklad [Ci, Theorem 6.1.2], [KT, Problem 12.7].

2.4 Mengerova veta – konvexné priestory

Definícia 2.4.1. Metrický priestor (X, d) nazveme *konvexný* (alebo *konvexný v Mengerovom zmysle*), ak pre ľubovoľné x, y také, že $x \neq y$ existuje $z \neq x, y$ také, že

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y). \tag{4}$$ {EQMENG}

Pre uzavreté podmnožiny $\mathbb{R}^n$ s obvyklou euklidovskou metrikou sa tento pojem zhoduje s obvyklým pojmom konvexnosti. Bez uzavretosti to neplatí – napríklad $\mathbb{Q}$ ako podpriestor $\mathbb{R}$. (To je súčasne kontrapríklad ukazujúci, že v nasledujúcej vete sa nedá vynechať predpoklad o úplnosti.)

Veta 2.4.2 (Menger)**.** *Ak (X, d) je úplný konvexný metrický priestor a $x \neq y$ sú nejaké body v X, tak pre ľubovoľné $t \in (0, 1)$ existuje bod $w \in x$ taký, že $d(x, w) = td(x, y)$ a $d(w, y) = (1 - t)d(x, y)$.*

Základná idea dôkazu je, že sa budeme snažiť s bodom z, ktorého existenciu máme zaručenú z definície, blížiť k bodu požadovanej vzdialenosti. Na to nám však nemusí stačiť ω krokov – preto použijeme transfinitnú indukciu. Pre porovnanie si môžete pozrieť dôkaz využívajúci Zornovu lemu v [Co].

Dôkaz. Transfinitnou indukciou budeme definovať t_α a x_α s vlastnosťami

$$d(x, x_\alpha) = t_\alpha d(x, y) \qquad \text{a} \qquad (x_\alpha, y) = (1 - t_\alpha)d(x, y) \tag{5}$$ {EQTALPHA}

až dovtedy, kým nedostaneme ordinál α taký, že $t_\alpha = t$.

Navyše tieto ordinály budú spĺňať podmienku, že $\alpha < \beta$ platí:
ak $t_\alpha > t$, tak $t_\alpha > t_\beta$;
ak $t_\alpha < t$, tak $t_\alpha < t_\beta$.

V okamihu, keď nájdeme x_α také, že $t_\alpha = t$, celý proces ukončíme.

1° Pre $\alpha = 0$ môžeme zvoliť $x_0 = x$, čo znamená $t_0 = 0$.

2° Nech $\alpha = \beta + 1$ a $t_\beta \neq t$. Ak $t_\beta > t$, tak x_α bude bod, ktorý získame použitím podmienky (4) pre x a x_β. Ak $t_\beta < t$, tak použijeme body x_β a y. Použitím trojuholníkovej nerovnosti môžeme overiť, že opäť platí $d(x, y) = d(x, x_\alpha) + d(x_\alpha, y)$ a hodnota t v prvom prípade klesla a v druhom vzrástla. [9]

3° Nech α je limitný ordinál a pre každé $\beta < \alpha$ sme už našli x_β, pričom príslušné t_β je rôzne od t. Jedna z množín $A = \{\beta; t_\beta < t\}$ a $B = \{\beta; t_\beta > t\}$ musí byť nekonečná, nech je to napríklad množina A. Ukážeme, že sa dá nájsť bod x_α tak, aby platilo $t_\alpha = \sup\{t_\beta; \beta \in A\}$ a aby boli splnené i ostatné podmienky. (Ide o ohraničenú podmnožinu intervalu $[0, 1]$, takže uvedené suprémum existuje.)

---

[9] Napríklad v prvom prípade máme

$$d(x,y) = d(x,x_\beta) + d(x_\beta,y) = d(x,x_\alpha) + d(x_\alpha,x_\beta) + d(x_\beta,y) \leq d(x,x_\beta) + d(x_\beta,y) \leq d(x,y).$$

V každej z uvedených nerovností musí potom nastať rovnosť. Takisto je zrejmé, že v tomto prípade $d(x, x_\alpha) < d(x, x_\beta)$.

Priamo z definície supréma je jasné, že sa dá nájsť postupnosť $(\beta_n)_{n<\omega}$ prvkov z A taká, že t_{β_n} konverguje k t. Potom ale platí $d(x_{\beta_n}, x_{\beta_m}) = |t_{\beta_n} - t_{\beta_m}| d(x,y)$, čiže táto postupnosť je cauchyovská.[10] Teda má limitu a túto limitu zvolíme za x_α. Zo spojitosti funkcií $d(x,\cdot)$ a $d(\cdot,y)$ na X vyplýva, že skutočne platí (5).

Uvedená konštrukcia musí niekedy skončiť – inak by sme získali v intervale $[0,1]$ viac bodov než je jeho kardinalita.[11] $\square$

Literatúra

[Ci] Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. London Mathematical Society Student Texts 39.

[Co] Keith Conrad. Zorn's lemma. `http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/`.

[CL] Antoine Chambert-Loir. *A Field Guide to Algebra.* Springer, New York, 2005. Undergraduate Texts in Mathematics.

[KGGS] Tibor Katriňák, Martin Gavalec, Eva Gedeonová, and Jaroslav Smítal. *Algebra a teoretická aritmetika 1.* UK, Bratislava, 2002.

[KT] Péter Komjáth and Vilmos Totik. *Problems and Theorems in Classical Set Theory.* Springer, 2006. Problem Books in Mathematics.

[S] Martin Sleziak. 1-INF-155 Algebra 2. Poznámky k prednáške, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/`.

[10] V podstate rovnakú úvahu sme mohli urobiť priamo pre cauchyovskú *sieť* $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$, uviedli sme ale takéto zdôvodnenie, aby bol dôkaz prístupný i človeku, ktorý nie je oboznámený s úplnými sieťami v metrických priestoroch.

[11] Dá sa ukázať, že ostro monotónna transfinitná postupnosť bodov v $[0,1]$ nemôže mať nespočítateľnú dĺžku, pozri napríklad [KT, Problem 4.38]; pomocou tohoto faktu sa dá zdôvodniť, že táto konštrukcia skončí skôr než v ω_1-vom kroku.