

1 Reálne a komplexné čísla. Elementy topológie

1.1 Bairove kategórie množín

Definícia 1. Podmnožina A topologického priestoru X sa nazýva *množina prvej Bairovej kategórie* (v X), ak existujú také podmnožiny $A_n \subset X$ ($n = 1, 2, \dots$) riedke v X , že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ak množina $A \subset X$ nie je prvej Bairovej kategórie v X , tak sa nazýva *množinou druhej Bairovej kategórie*.

Množina $A \subset X$ je *reziduálna* v topologickom priestore X , ak A je druhej Bairovej kategórie v X a $X \setminus A$ je množina prvej Bairovej kategórie v X .

1.2 Bairova veta o úplných metrických priestoroch

Veta 1 (Bairova veta). Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $X \neq \emptyset$. Potom X je množina druhej Bairovej kategórie v X .

Veta 2 (Bairova veta o hustote). Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $X \neq \emptyset$. Nech $X_k \subset X$ ($k = 1, 2, \dots$) sú riedke množiny. Potom množina $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ je hustá v X .

2 Spojité funkcie

2.1 Zovšeobecnenie pojmu spojitost funkcie

Definícia 2. Nech X a Y sú topologické priestory. Nech $f: X \rightarrow Y$. Hovoríme, že f je *kvázispojité* v bode $x_0 \in X$, ak pre každé okolie $U(x_0)$ bodu x_0 v X a pre každé okolie $V(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ v Y existuje taká neprázdna otvorená množina $G \subset U(x_0)$, že $f[G] \subset V(f(x_0))$. [Na rozdiel od spojitosti nepožadujeme $x \in G$.]

Definícia 3. Nech X je topologický priestor a nech (Y, d) je metrický priestor. Nech $f: X \rightarrow Y$. Hovoríme, že funkcia je *spríbuznená* (cliquish, aparentée) v bode $x_0 \in X$ ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje a každé okolie $U(x_0)$ bodu x_0 v X existuje neprázdna otvorená množina $G \subset U(x_0)$, že pre každé dva body $x_1, x_2 \in G$ platí $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

spojitá $\Rightarrow$ kvázispojité $\Rightarrow$ spríbuznená

3 Priestory L_p

3.1 Hölderova a Minkowského nerovnosť

Lema 1. Nech a, b sú komplexné čísla, nech $p > 1, q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + |a|^q q$$

Hölderova nerovnosť: Ak $f \in \tilde{L}_p$ a $g \in \tilde{L}_q$, tak $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

4 Diferencovateľnosť funkcií

4.1 Absolútne spojité funkcie

Definícia 4. Nech f je reálne funkcia definovaná na $\langle a, b \rangle$. Hovoríme, že f je *absolútne spojitá*, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre ľubovoľný konečný systém navzájom neprekrývajúcich sa intervalov $\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_k, y_k \rangle$, pre ktorý $\sum_{i=1}^k |y_i - x_i| < \delta$, platí

$$\sum_{i=1}^k |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

absolútne spojitá $\Rightarrow$ rovnomerne spojitá

Veta 3. Funkcia F definovaná na $\langle a, b \rangle$ je absolútne spojitá vtedy a len vtedy, ak existuje taká integrovateľná funkcia f , že $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. Potom $F'(x) = f(x)$ skoro všade a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

5 Aplikácie matematickej analýzy

Definícia 5. Číslo x sa nazýva g -adicky normálne, ak každá z čísl $0, 1, \dots, g-1$ vystupuje v jeho g -adickom rozvoji s frekvenciou $\frac{1}{g}$.

Reálne, číslo sa nazýva absolútne normálne, ak je g -adicky normálne pre každé $g = 2, 3, \dots$

Dôkaz nasledujúceho výsledku, ktorý pochádza od E. Borela, patrí medzi prvé aplikácie teórie miery v teórii čísel.

Veta 4. Skoro všetky reálne čísla sú normálne. Skoro všetky reálne čísla sú absolútne normálne. (V zmysle Lebesguovej miery.)

Veta 5. Množina všetkých g -adicky normálnych čísel je prvej Bairovej kategórie v $\mathbb{R}$.

Dôsledok 1. Množina všetkých absolútne normálnych čísel je prvej Bairovej kategórie v $\mathbb{R}$.