

10 Kombinatorika

Spernerova veta

Veta 1. Maximálny antirefazec pozostávajúci z podmnožín množiny $N := \{1, 2, \dots, n\}$ má $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ prvkov.

Dôkaz. Existencia - zoberme všetky $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -prvkové podmnožiny.

Treba ešte ukázať, že neexistuje väčší. Na to stačí zostrojiť $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ refazcov, ktoré budú obsahovať všetky podmnožiny N . Ak by totiž existoval antirefazec s viac prvkami, musel by obsahovať dva prvky z niektorého z týchto refazcov, nemohol by to teda byť antirefazec.

Ideme teraz zostrojiť takýto systém refazcov. Začneme tým, že do každého refazca dáme jednu $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ -prvkovú množinu, čím vyčerpáme všetky $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ -prvkové podmnožiny. Teraz budeme pridávať menšie množiny. Prepokladajme, že už dosiaľ vytvorené refazce obsahujú všetky $(k + 1)$ -prvkové množiny. ($k \leq \lfloor n/2 \rfloor$) Keď pre každú k -prvkovú množinu vyberiem jednu jej $(k + 1)$ -prvkovú nadmnožinu (pričom ich vyberám tak, aby boli navzájom rôzne), môžeme ju pridať do každého refazca, ktorý obsahuje túto nadmnožinu. Takto „minieme“ všetky k -prvkové podmnožiny a a v každom refazci bude nejaká k -prvková množina. Je preto treba len zodpovedať na otázku, či skutočne môžeme ku každej k -prvkovej množine vybrať $(k + 1)$ -prvkovú množinu tak, aby boli navzájom rôzne. Keďže vlastne hľadáme systém rozličných reprezentantov, stačí overiť podmienku z Hallovej vety.

Majme teda $j \leq \binom{n}{k}$ k -prvkových podmnožín N . Chceme zistiť počet l ich $(k + 1)$ -prvkových nadmnožín. Tieto množiny spolu vytvárajú bipartitný graf (podgraf grafu bo-olovskej algebry $P(N)$), v ktorom vrcholy prislúchajúce k -prvkovým množinám majú stupeň $n - k$ (lebo do každej môžeme pridať ľubovoľný z $n - k$ prvkov, ktoré neobsahuje, teda každá má $n - k$ $(k + 1)$ -prvkových nadmnožín) a $(k + 1)$ -prvkové vrcholy majú stupeň najviac $k + 1$ (z podobných dôvodov). Počet hrán grafu môžeme určiť ako počet hrán ktoré vychádzajú z k -prvkových vrcholov alebo ako počet hrán, ktoré vychádzajú z $(k + 1)$ -prvkových. Ich porovnaním dostaneme $j(n - k) \leq l(k + 1)$. Súčasne je $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, čiže $n \geq 2k + 1$, $n - k \geq k + 1$. Potom musí platiť $j \leq l$. Overili sme podmienku Hallovej vety, preto existuje systém rozličných reprezentantov.

Takto (indukciou) sme vytvorili refazce ktoré obsahujú všetky množiny s najviac $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ prvkami. Symetricky ich môžeme doplniť o množiny s väčšou mohutnosťou. $\square$

Dôkaz (z [LW]). Každý maximálny refazec $\mathcal{C}$ obsahuje množiny mohutnosti $0, 1, \dots, n$, pričom každá je podmnožinou nasledujúcej. Pre jednoprvkové máme n možností, pre druhý prvok $n - 1 \dots$ Existuje teda $n!$ maximálnych refazcov. Podobne možno ukázať, že maximálnych refazcov, ktoré obsahujú danú k -prvkovú podmnožinu N je $k!(n - k)!$.

Nech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ je antirefazec. Počítajme počet usporiadaných dvojíc (A, C) takých, že $A \in \mathcal{A}$, C je maximálny refazec a $A \in C$. Pretože C môže obsahovať najviac 1 prvok antirefazca, je ich najviac $n!$. Ak α_k označíme počet množín $A \in \mathcal{A}$ takých, že $|A| = k$, tak je tento počet $\sum_{k=0}^n \alpha_k k!(n - k)!$. Preto

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k k!(n - k)! \leq n! \text{ alebo, ekvivalentne } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Pretože $\binom{n}{k}$ je maximálne pre $k = \lfloor n/2 \rfloor$ a $\sum_{k=0}^n \alpha_k = m$, máme $m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Rovnosť platí, ak vezmeme ako antirefazec všetky $\lfloor n/2 \rfloor$ -prvkové podmnožiny. $\square$

Literatúra

[LW] J.H.van Lint, R.M.Wilson: A Course in Combinatorics.