

Verzia: 25. júna 2002

Zatiaľ som nepísal poznámky z diferenciálnej a algebraickej topológie, ale na stránke sú poznámky z týchto predmetov, ktoré som používal pri príprave na skúšku.

1 Topológia

Topologické priestory, axiómy oddeliteľnosti (regulárne, úplne regulárne, normálne priestory). Spojité funkcie. Základné topologické konštrukcie (topologický súčin a súčet, faktorový priestor). Súvislé, lokálne kompaktné a kompaktné priestory. Konvergencia v topologických priestoroch (pomocou filtrov a sietí). Metrizovateľné priestory, metrizácia topologických priestorov.

1.1 Topologické priestory

Definícia 1. Nech X je množina. Systém $\mathcal{T}$ podmnožín množiny X taký, že

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (ii) ak $U, V \in \mathcal{T}$, tak aj $U \cap V \in \mathcal{T}$,
- (iii) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre každé $i \in I$, tak aj $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

sa nazýva *topológia* na množine X . Dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor*.

Množiny patriace do $\mathcal{T}$ voláme *otvorené*, ich doplnky sú *uzavreté* množiny.

Príklad 1. Triviálnymi príkladmi sú diskrétny (každá množina je otvorená) a indiskrétny topologický priestor (otvorené sú len $\emptyset$ a X).

Každý metrický priestor určuje topológiu. (Topológiu danú metrikou d značíme $\mathcal{T}_d$.)

Kofinitná topológia = otvorené množiny sú doplnky konečných množín.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_z)$, kde $\mathcal{T}_z = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); (\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)(x - \varepsilon, x) \subseteq U\}$.

Sierpiňského topologický priestor: $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$

Topológiu možno zadať aj tak, že zadáme množinu uzavretých množín.

Definícia 2. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$. $\overline{A} = \bigcap \{F : A \subseteq F, F \text{ je uzavretá v } X\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A v X .

Tvrdenie 1.

- (i) $A \subseteq \overline{A}$.
- (ii) $\overline{A}$ je uzavretá množina.
- (iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- (iv) A je uzavretá $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.
- (v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (vi) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Topológiu možno zadať aj tak, že zadáme operátor uzáveru. (Musí spĺňať podmienky (i), (iii), (v), (vi) z predchádzajúceho tvrdenia.)

Definícia 3. Podmnožina A topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *hustá*, ak $\overline{A} = X$.

Priestor sa nazýva *separabilný*, ak v ňom existuje spočítateľná hustá podmnožina.

Pre $A \subseteq X$ sa $A^\circ = \bigcup\{U \in \mathcal{T}; U \subseteq A\}$ nazýva vnútro množiny A . Platí $X^\circ = X$, $A^\circ \subseteq A$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. Naopak, ak je daný operátor $\text{nt}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ spĺňajúci uvedené vlastnosti, možno pomocou neho definovať topológiu na X tak, aby $\text{int } A = A^\circ$.

Definícia 4. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$. Okolím bodu A nazývame ľubovoľnú podmnožinu $U \subseteq X$ takú, že $a \in U$ a existuje $V \in \mathcal{T}$ taká, že $a \in V \subseteq U$.

Veta 1. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$, $a \in X$. Potom $a \in \overline{A} \Leftrightarrow$ pre každé okolie V bodu a $V \cap A \neq \emptyset$.

Definícia 5. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$. Potom systém $\mathcal{B}(a)$ okolí bodu a sa nazýva *bázou okolí* (bázou systému okolí) bodu a , ak pre každé okolie V bodu a existuje $U \in \mathcal{B}(a)$ také, že $U \subseteq V$.

Definícia 6. Hovoríme, že $(X, \mathcal{T})$ vyhovuje 1. *axióme spočítateľnosti*, ak pre každý bod $a \in X$ existuje spočítateľná báza okolí.

Definícia 7. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *bázou topológie* $\mathcal{T}$, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

$(X, \mathcal{T})$ vyhovuje 2. *axióme spočítateľnosti*, ak existuje spočítateľná báza topológie.

Veta 2. Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je bázou topológie $\mathcal{T}$ vtedy a len vtedy, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V \subseteq U$.

Veta 3. Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie. Potom platí

$$(i) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$$

$$(ii) \text{ Ak } V, W \in \mathcal{B}, \text{ tak pre každý bod } x \in V \cap W \text{ existuje množina } U \in \mathcal{B} \text{ taká, že } x \in U \subseteq V \cap W.$$

Obrátene, ak nejaký systém $\mathcal{B}$ spĺňa tieto podmienky, je bázou nejakej topológie.

Tvrdenie 2. Ak priestor X má spočítateľnú bázu topológie, tak vyhovuje prvej axióme spočítateľnosti.

Nech $\mathcal{B}$ je báza topologického priestoru X . Potom $A \subseteq X$ je hustá práve vtedy, keď $A \cap U \neq \emptyset$ pre všetky $U \in \mathcal{B}$.

Definícia 8. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *subbázou* topológie $\mathcal{T}$, ak $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{V \in \mathcal{P}(X); (\exists W_1, \dots, W_k \in \mathcal{S}) V = \bigcap_{i=1}^k W_i\}$ je bázou topológie $\mathcal{T}$.

$\mathcal{S}$ je subbáza nejakej topológie na X práve vtedy, keď $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

1.2 Spojité funkcie

Definícia 9. Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva *spojité*, ak vzor $f^{-1}(U)$ každej otvorenej množiny v Y je otvorená množina v X .

Zloženie spojitých zobrazení je spojité. Zúženie spojitého zobrazenia na podpriestor je spojité. Ak A je podpriestor X , tak vloženie A do X je spojité zobrazenie. Konštantné zobrazenie je spojité.

Ekvivalentné podmienky ku spojitosti: Vzor uzavretej množiny je uzavretá. Vzor bázovej množiny je otvorená. Pre každé $A \subseteq X$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Definícia 10. Bijekcia $f: X \rightarrow Y$ je *homeomorfizmus*, ak f aj f^{-1} sú spojité.

Definícia 11. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva *otvorené (uzavreté)*, ak pre každú otvorenú (uzavretú) množinu $U \subseteq X$ je $f[U]$ otvorená (uzavretá) v Y .

Definícia 12. Spojité zobrazenie $m: X \rightarrow Y$ sa nazýva *vnorenie*, ak $m: X \rightarrow m[X]$ je homeomorfizmus.

1.3 Základné topologické konštrukcie

Definícia 13. Nech $(X, \mathcal{T})$ je *topologický priestor* a $A \subseteq X$. Potom topologický priestor na množine A s topológiou $\mathcal{T}_A = \{U \cap A; U \in \mathcal{T}\}$ (tzv. *relatívna topológia*) je *topologický podpriestor* priestoru $(X, \mathcal{T})$.

Tvrdenie 3. Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ je *topologický priestor*, Y je množina a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Potom $\mathcal{T}_f = \{V \in \mathcal{P}(Y); f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ je *topológia na Y* . $\mathcal{T}_f$ sa nazýva *faktorová topológia*. Platí:

- (i) $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ je *spojité*.
- (ii) Ak $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ je *spojité*, tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_f$.
- (iii) Ak $g: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ je zobrazenie a $g \circ f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ je *spojité*, tak g je *spojité*.

Definícia 14. Nech $(X, \mathcal{T})$ je *topologický priestor*, E je relácia ekvivalencie na X , X/E je rozklad X na triedy ekvivalencie a $p: X \rightarrow X/E$, $p(x) = E(x)$. Potom $(X/E, \mathcal{T}_p)$ sa nazýva *faktorovým priestorom* priestoru $(X, \mathcal{T})$, označujeme $(X, \mathcal{T})/E$.

Spojité zobrazenie $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ sa nazýva *faktorové*, ak je surjektívne a pre každé $V \in \mathcal{P}(Y)$ platí $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow V \in \mathcal{T}_Y$. (Podmnožina Y je otvorená práve vtedy, keď jej vzor v zobrazení f je otvorená množina v X .)

Tvrdenie 4. (i) Ak $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *faktorové zobrazenie*, tak $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$.

- (ii) Ak $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *faktorové zobrazenie* a E_f je relácia ekvivalencie určená zobrazením f (t.j. $(x, y) \in E_f \Leftrightarrow f(x) = f(y)$), tak $\bar{f}: (X, \mathcal{T}_X)/E_f \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, $\bar{f}(E_f(x)) = f(x)$, je *homeomorfizmus*.

Tvrdenie 5. Ak *spojité zobrazenie* $f: X \rightarrow Y$ je *surjektívne a otvorené (uzavreté)*, tak je *faktorové*.

Definícia 15. Nech $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém topologických priestorov (I je množina.) Nech $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\mathcal{B} = \{W \in \mathcal{P}(X); \text{existujú } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in I \text{ a } U_i \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \text{ pre } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tak, že } W = \bigcap_{i=1}^k p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)\}$. Nech $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{B}$ je topológia na X určená bázou $\mathcal{B}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *topologickým súčinom* topologických priestorov $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Veta 4 (Vlastnosti topologického súčinu). (i) *Projekcie p_α sú spojité.*

- (ii) Ak $\mathcal{T}'$ je topológia na $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ taká, že pre každé $\alpha \in I$ je $p_\alpha: (\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \mathcal{T}') \rightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je *spojité*, tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. (T.j. $\mathcal{T}$ je najhrubšia taká topológia, pre ktorú sú všetky p_α spojité.)

Tvrdenie 6. Ak pre každé $\alpha \in I$ je X_α T_i -priestor ($i = \{0, 1, 2\}$), tak aj $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je T_i -priestor.

Tvrdenie 7. Ak f je zobrazenie topologického priestoru Y do topologického súčinu $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, tak f je spojité práve vtedy, keď $p_\alpha \circ f$ je spojité pre všetky $\alpha \in I$.

Dôsledok 1. Nech X_α , $\alpha \in I \neq \emptyset$, je systém topologických priestorov a pre každé $\alpha \in I$ je $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ je spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ také, že $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ pre každé $\alpha \in I$.

Dôsledok 2. Nech X_α , Y_α , $\alpha \in I \neq \emptyset$, sú systémy topologických priestorov a pre každé $\alpha \in I$ je $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ také, že $f_\alpha \circ p_\alpha = p'_\alpha \circ f$. Označujeme ho $f =: \prod_{\alpha \in I} f_\alpha$.

Definícia 16. Nech I je neprázdna množina a $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém topologických priestorov. Nech $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ a $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X); U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\}) \text{ je otvorená v } X_\alpha \times \{\alpha\} \text{ pre každé } \alpha \in I\}$. Používa sa označenie $(X, \mathcal{T}) = \sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *topologický súčet* priestorov X_α .

1.4 Axiómy oddeliteľnosti

Definícia 17. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

- (i) X sa nazýva T_0 -priestor, ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existuje otvorená množina U taká, že $a \in U$, $b \notin U$ alebo otvorená množina V taká, že $b \in V$, $a \notin V$.
- (ii) X sa nazýva T_1 -priestor, ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existujú otvorené množiny U , V také, že $a \in U$, $b \notin U$, $a \notin V$, $b \in V$.
- (iii) X sa nazýva T_2 -priestor (*hausdorffovský priestor*), ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existujú otvorené množiny U , V také, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Tvrdenie 8. X je T_1 -priestor práve vtedy, keď všetky jednobodové množiny sú v X uzavreté.

Tvrdenie 9. Nech $(X, \mathcal{T})$ je T_i -priestor ($i = 0, 1, 2$) a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je podpriestor $(X, \mathcal{T})$. Potom aj $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je T_i -priestor.

Definícia 18. Priestor X sa nazýva *regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a pre každé $c \in X \setminus A$ existujú otvorené množiny U , V v X tak, že $c \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Regulárny T_1 -priestor sa nazýva T_3 -priestor.

Priestor X sa nazýva *úplne regulárny*, ak pre každú uzavretú množinu A v X a $c \in X \setminus A$ existuje spojité zobrazenie $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$, $f(c) = 1$. Úplne regulárny T_1 -priestor sa nazýva $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Priestor X sa nazýva *normálny*, ak pre každé uzavreté disjunktné podmnožiny A , B v X existujú otvorené množiny U , V v X tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Normálny T_1 -priestor je T_4 -priestor.

Tvrdenie 10. Nech X je priestor a pre každé $c \in X$ $\mathcal{B}_c$ je báza okolí c , ktorej prvky sú otvorené. Potom X je regulárny $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každé $U \in \mathcal{B}_c$ existuje $V \in \mathcal{B}_c$ také, že $\overline{V} \subseteq U$.

Tvrdenie 11. Každý T_3 -priestor je T_2 -priestor. Ak X je úplne regulárny ($T_{3\frac{1}{2}}$) priestor, tak X je regulárny (T_3) priestor. Každý T_4 -priestor je T_3 -priestor.

Veta 5 (Urysohnova lema). Ak X je normálny priestor, A , B sú uzavreté disjunktné podmnožiny v X , tak existuje spojité zobrazenie $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$.

Veta 6. Každý T_4 -priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Tvrdenie 12. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie v X . Potom X je úplne regulárny $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každé $U \in \mathcal{S}$ také, že $c \in U$ existuje spojité zobrazenie $f: X \rightarrow [0, 1]$ tak, že $f(c) = 1$ a $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$.

Veta 7. Každý podpriestor/topologický súčin regulárnych/úplne regulárnych/ $T_3/T_{3\frac{1}{2}}$ priestorov je regulárny/...

Veta 8. Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor práve vtedy, keď existuje množina A tak, že X je homeomorfný nejakému podpriestoru $[0, 1]^A$ (tzv. Tichonovova kocka).

Regulárny priestor, ktorý nie je T_2 : dvojprvkový indiskrétny.

Normálny, ktorý nie je úplne regulárny: Sierpińského priestor.

Priestor P_2 na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ je daný bázou okolí:

$\mathcal{B}(A) = \{O_\varepsilon(A), \varepsilon > 0\}$, $O_\varepsilon(A) = \{(x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$ pre $A = [a, b]$, $b \neq 0$

$\mathcal{B}(A) = \{P_\varepsilon(A), \varepsilon > 0\}$, $P_\varepsilon(A) = \{(x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\} \cup \{A\}$ pre $A = [a, 0]$

P_2 je príklad T_2 -priestoru, ktorý nie je regulárny.

P_3 : ako P_2 , len báza okolí bodu $(a, 0)$ je $\mathcal{B}(c, 0) = \{T_\varepsilon(c, 0), \varepsilon > 0\}$, $T_\varepsilon(c, 0) = O_\varepsilon((c, \varepsilon)) \cup \{(c, 0)\}$

P_3 je úplne regulárny priestor, ktorý nie je normálny.

1.5 Súvislosť

Definícia 19. Topologický priestor X je *súvislý*, ak jediné obojaké (t.j. otvorené aj uzavreté) množiny v X sú $\emptyset$ a X . *Súvislá množina* je množina, ktorá ako topologický podpriestor tvorí súvislý priestor. (Ekvivalentná definícia súvislého topologického priestoru: nedá sa napísať ako zjednotenie svojich dvoch neprázdnych disjunktných otvorených podmnožín.)

Tvrdenie 13. Ak $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ a A je súvislá množina, tak aj B je súvislá.

Definícia 20. *Komponent súvislosti* priestoru X je súvislá podmnožina X , ktorá je maximálna (vzhľadom na inklúziu).

$C_a = \bigcup \{A \in \mathcal{P}(X); A \text{ je súvislá a } a \in A\}$ - komponent súvislosti bodu a .

Tvrdenie 14. *Komponenty súvislosti tvoria rozklad topologického priestoru.*

Tvrdenie 15. *Spojité zobrazenie súvislého topologického priestoru je súvislé.*

Súvislosť sa nezachováva pre topologické súčty a podpriestory. Prenáša sa na topologický súčin, spojité zobrazenie a faktorový priestor (lebo to je tiež spojité zobrazenie).

Definícia 21. Topologický priestor X sa nazýva *lineárne súvislý*, ak ľubovoľné jeho dva body možno spojiť cestou. (T.j. pre každé $a, b \in X$ existuje spojité zobrazenie $f: [0, 1] \rightarrow X$ také, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.)

Každý lineárne súvislý priestor je súvislý. Priestor $\overline{X}$, kde $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x \in \mathbb{R}\}$, je príklad priestoru, ktorý je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

Definícia 22. Priestor sa nazýva *lokálne súvislý*, ak pre každý bod $a \in X$ existuje báza okolí, ktoré sú všetky súvislé množiny v X .

Nie každý súvislý priestor je lokálne súvislý a nie každý lokálne súvislý priestor je súvislý.

1.6 Kompaktné priestory

Definícia 23. Priestor X sa nazýva *lindelöffovský*, ak z každého otvoreného pokrytia X sa dá vybrať spočítateľné podpokrytie.

Priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak z ľubovoľného otvoreného pokrytia X možno vybrať konečné podpokrytie X . Podmnožina A priestoru X sa nazýva *kompaktná*, ak podpriestor určený A je kompaktný priestor.

Tvrdenie 16. Ak X je regulárny, lindelöffovský, tak X je normálny.

Tvrdenie 17. Ak A je uzavretá podmnožina kompaktného priestoru, tak A je kompaktná.

Ak A je kompaktná podmnožina T_2 -priestoru, tak A je uzavretá.

Tvrdenie 18. Ak X je T_2 -priestor, A, B sú kompaktné podmnožiny v X , $A \cap B = \emptyset$, tak existujú otvorené množiny U, V v X , pre ktoré $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Dôsledok 3. Ak X je kompaktný T_2 -priestor, tak je normálny (T_4).

Každý podpriestor kompaktného T_2 -priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Tvrdenie 19. Ak $f: X \rightarrow Y$ je spojitý a surjektívne a X je kompaktný, tak aj Y je kompaktný.

Definícia 24. Systém $\mathcal{S} \neq \emptyset$ podmnožín množiny X sa nazýva *centrovaný*, ak pre ľubovoľný neprázdny konečný podsystem $\mathcal{S}'$ systému $\mathcal{S}$ platí $\bigcap_{F \in \mathcal{S}'} F \neq \emptyset$.

Tvrdenie 20. Nech X je topologický priestor. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(i) X je kompaktný.

(ii) Pre ľubovoľný centrovaný systém $\mathcal{S}$ uzavretých podmnožín X platí, že $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$.

(iii) Pre ľubovoľný centrovaný systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} \overline{S} \neq \emptyset$.

Veta 9 (Tichonovova). Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém kompaktných priestorov, tak ich topologický súčin $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je kompaktný priestor.

Veta 10. Topologický priestor X je kompaktný priestor $\Leftrightarrow X$ je homeomorfný s uzavretým podpriestorom priestoru $[0, 1]^A$ pre vhodné A .

Definícia 25. Priestor X sa nazýva *lokálne kompaktný*, ak pre každé $a \in X$ existuje báza okolí, ktoré sú všetky kompaktné.

Tvrdenie 21. T_2 -priestor X je lokálne kompaktný práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ existuje kompaktné okolie a .

Každý kompaktný T_2 -priestor je lokálne kompaktný.

Ak Y je uzavretý (otvorený) podpriestor lokálne kompaktného priestoru X , tak Y je lokálne kompaktný.

$\mathbb{R}$ je lokálne kompaktný, ale nie je kompaktný.

Kompaktifikácie

Definícia 26. Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. Usporiadanú dvojicu (e, Y) nazveme kompaktifikáciou priestoru X , ak platí:

- (i) Y je kompaktný T_2 -priestor,
- (ii) $e: X \hookrightarrow Y$ je vnorenie,
- (iii) $\overline{e[X]} = Y$, t.j. $e[X]$ je hustá v Y .

Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor. Kompaktifikácia $(b_X, \beta X)$ sa nazýva *Stone-Čechova kompaktifikácia* priestoru X , ak pre každé spojité zobrazenie $f: X \rightarrow [0, 1]$ existuje práve jedno spojité zobrazenie $\bar{f}: \beta X \rightarrow [0, 1]$ tak, že $f = \bar{f} \circ b_X$, t.j. komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{b_X} & \beta X \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & [0, 1] \end{array}$$

Tvrdenie 22. Pre každý $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor existuje Stone-Čechova kompaktifikácia.

Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor a $(b_X, \beta X)$ je jeho Stone-Čechova kompaktifikácia. Potom pre ľubovoľný kompaktný T_2 -priestor K a spojité zobrazenie $f: X \rightarrow K$ existuje práve jedno spojité zobrazenie $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$ také, že $\bar{f} \circ b_X = f$.

Tvrdenie 23. Nech $(X, \mathcal{T})$ je lokálne kompaktný T_2 -priestor, a $a \notin X$. Nech $X^* = X \cup \{a\}$, $\mathcal{T}^* = \{U \in \mathcal{P}(X^*), a \in U, X - U \text{ je kompaktná v } (X, \mathcal{T})\} \cup \mathcal{T}$. Potom $(X^*, \mathcal{T}^*)$ je kompaktný T_2 -priestor, $(X, \mathcal{T})$ je otvorený podpriestor. Ak $(X, \mathcal{T})$ nie je kompaktný, tak X je hustá v $(X^*, \mathcal{T}^*)$. Teda je to kompaktifikácia priestoru $(X, \mathcal{T})$ – tzv. jednobodová (Alexandrovova) kompaktifikácia.

1.7 Konvergencia v topologických priestoroch

Konvergencia pomocou filtrov

Definícia 27. Neprázdny systém $\mathcal{F}$ podmnožín množiny X sa nazýva *filter*, ak platí

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- (ii) Ak $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tak $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
- (iii) Ak $F \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq G \subseteq X$, tak $G \in \mathcal{F}$.

Filter $\mathcal{U}$ sa nazýva *ultrafilter* na X , ak pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na X platí: Ak $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, tak $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Nech $\mathcal{F}$ je filter na X . Potom systém $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ sa nazýva *báza filtra* $\mathcal{F}$, ak platí: Pre každé $F \in \mathcal{F}$ existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq F$.

Tvrdenie 24. Ak $\mathcal{H}$ je báza nejakého filtra $\mathcal{F}$ na X , tak platí

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{H}$
- (ii) Ak $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, tak existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq H_1 \cap H_2$.

Systém $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva báza filtra, ak platí (i) a (ii). Filter určený bázou $\mathcal{H}$ je $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{U \subseteq \mathcal{P}(X); (\exists H \in \mathcal{H}) H \subseteq U\}$.

Definícia 28. Nech X je topologický priestor, $\mathcal{F}$ je filter na X , $\mathcal{B}$ je báza filtra na X a $c \in X$.

- (i) Hovoríme, že filter $\mathcal{F}$ konverguje k c v X , ak $\mathcal{F}$ obsahuje všetky okolia bodu c .
- (ii) Hovoríme, že báza filtra $\mathcal{B}$ konverguje k c v X , ak $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ konverguje k c , t.j. pre každé okolie U bodu c existuje prvok $B \in \mathcal{B}$ tak, že $B \subseteq U$.
- (iii) Bod c sa nazýva hromadným bodom filtra $\mathcal{F}$, ak pre každé okolie U bodu c a každý $F \in \mathcal{F}$ $U \cap F \neq \emptyset$. (T.j. $c \in \overline{F}$ pre všetky $F \in \mathcal{F}$).
- (iv) Podobne sa definuje hromadný bod bázy filtra ako hromadný bod $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Tvrdenie 25. Nech X je topologický priestor.

- (i) Ak $\mathcal{F} \rightarrow c$ v X , $\mathcal{G}$ je filter a $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, tak $\mathcal{G} \rightarrow c$.
- (ii) Filter $\mathcal{F}_{\{c\}}$ generovaný bázou filtra $\{c\}$ konverguje k c .
- (iii) Ak $\mathcal{F} \rightarrow c$, tak c je hromadný bod $\mathcal{F}$.
- (iv) Ak c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$, tak existuje filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ tak, že $\mathcal{G} \rightarrow c$.

Tvrdenie 26. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom platí:

- (i) $c \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje báza filtra $\mathcal{F}$ na A tak, že $\mathcal{F} \rightarrow c$ v X .
- (ii) A je uzavretá $\Leftrightarrow$ pre každú bázu filtra $\mathcal{F}$ na A platí $\lim \mathcal{F} \subseteq A$.
- (iii) X je T_2 -priestor $\Leftrightarrow$ každý filter (báza filtra) má najviac jednu limitu.
- (iv) Ak $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X a c je hromadný bod $\mathcal{F}$, tak $\mathcal{F} \rightarrow c$.

Konvergencia pomocou sietí

Definícia 29. Usporiadaná dvojica $(A, \leq)$ sa nazýva usmernená množina, ak $A \neq \emptyset$ je neprázdna množina, $\leq$ je kváziusporiadanie na A (t.j. relácia $\leq$ je reflexívna a tranzitívna) a pre ľubovoľné $a, b \in A$ existuje $c \in A$ tak, že $a \leq c$ aj $b \leq c$.

Definícia 30. Nech Σ je usmernená množina, X je topologický priestor. Potom zobrazenie $s: \Sigma \rightarrow X$, $s(\sigma) = x_\sigma$ sa nazýva sieťou v priestore X . Označuje sa $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$.

Definícia 31. Hovoríme, že bod $c \in X$ je hromadný bod siete $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, ak pre každé okolie U bodu c a každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \geq \sigma$ tak, že $x_{\sigma'} \in U$. Bod c sa nazýva limitou siete $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, ak pre každé okolie U bodu c existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre každé $\sigma \geq \sigma_0$ $x_\sigma \in U$. Označenie: $c \in \lim S$, $\lim S = c$, $S \rightarrow c$.

Tvrdenie 27. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom $c \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v A tak, že $S \rightarrow c$.

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každú sieť $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v X , ktorá konverguje k c , platí $(f(x_\sigma), \sigma \in \Sigma) = f \circ S \rightarrow f(c)$.

Definícia 32. Nech $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, $S' = (y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sú siete v X . Potom S' sa nazýva podsieť (zjemnenie) siete S , ak existuje zobrazenie $\varphi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ také, že

(i) pre každé $\sigma_0 \in \Sigma$ existuje $\sigma'_0 \in \Sigma'$ tak, že pre $\sigma' \geq \sigma'_0$ platí $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$,

(ii) pre každé $\sigma' \in \Sigma'$ $y_{\sigma'} = x_{\varphi(\sigma')}$

Tvrdenie 28. Ak sieť $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma) \rightarrow c$ v X a $S' = (x_{\varphi(\sigma')}, \sigma' \in \Sigma')$ je podsieť siete S , tak aj $S' \rightarrow c$.

Ak c je hromadný bod siete $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, tak existuje podsieť $S' = (x_{\varphi(\sigma')}, \sigma' \in \Sigma')$ siete S tak, že $S' \rightarrow c$.

Súvis medzi sieťami a filtrami

Tvrdenie 29. Nech $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X . Položme $\mathcal{F}_S = \{A \in \mathcal{P}(X); (\exists \sigma_0 \in \Sigma)(\forall \sigma \geq \sigma_0)x_\sigma \in A\}$. Potom $\mathcal{F}_S$ je filter v X a $S \rightarrow c \Leftrightarrow \mathcal{F}_S \rightarrow c$.

Nech $\mathcal{F}$ je filter v X , $\Sigma = (\{(x, A); A \in \mathcal{F}; x \in A\}, \leq)$, $(x, A) \leq (y, B) \Leftrightarrow B \subseteq A$. Potom $S_{\mathcal{F}} = (y_{(x, A)}, (x, A) \in \Sigma)$, kde definujeme $y_{(x, A)} = x$, je sieť v X a pre každé $c \in X$ platí $\mathcal{F} \rightarrow c \Leftrightarrow S_{\mathcal{F}} \rightarrow c$.

1.8 Metrizácia topologických priestorov

Definícia 33. Priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *metrizovateľný*, ak existuje metrika d na X tak, že $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Tvrdenie 30. Ak d je metrika na X , tak $d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ je metrika na X a $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Tvrdenie 31. Podpriestor metrizovateľného priestoru je metrizovateľný. Topologický súčet metrizovateľných priestorov je metrizovateľný.

Faktorový priestor metrizovateľného nemusí byť metrizovateľný: $p: \mathbb{R} \rightarrow \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ - faktorizáciou dostaneme indiskrétny priestor.

Tvrdenie 32. Ak $((X_n, \mathcal{T}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ je systém metrizovateľných priestorov, tak $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{T}_n)$ je metrizovateľný priestor.

Dôsledok 4. Priestor $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ je metrizovateľný.

Veta 11 (Urysohn). Ak X je regulárny T_1 -priestor so spočítateľnou bázou topológie, tak X je metrizovateľný.

Definícia 34. Zobrazenie $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *pseudometrika*, ak spĺňa rovnaké vlastnosti ako má metrika s výnimkou tej, že môže platiť $d(x, y) = 0$ aj pre $x \neq y$.

Tvrdenie 33. Ak (X, d) je (pseudo)metrický priestor, tak zobrazenie $d: (X, \mathcal{T}_d) \times (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité.

Definícia 35. Pre $A \neq \emptyset$ definujeme $d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$. Ak $B \neq \emptyset$, tak $d(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}$.

Tvrdenie 34. Nech d je pseudometrika na X , $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $d: (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie a $\emptyset \neq A \subseteq X$. Potom zobrazenie $f_A: (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_A = d(x, A)$ je spojité.

Definícia 36. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín X . Potom $\mathcal{S}$ sa nazýva *lokálne konečný* (diskrétny), ak pre každé $a \in X$ existuje otvorené okolie U_a bodu a tak, že $\{S \in \mathcal{S}, S \cap U_a \neq \emptyset\}$ je konečná (jednoprvková alebo prázdna – $\text{card}\{S \in \mathcal{S}, S \cap U_a \neq \emptyset\} \leq 1$). $\mathcal{S}$ sa nazýva *σ -lokálne konečný* (σ -diskrétny), ak je zjednotením spočítateľného systému lokálne konečných (diskrétnych) systémov.

Definícia 37. Nech $\mathcal{U}$ je pokrytie priestoru X . Potom pokrytie $\mathcal{V}$ sa nazýva zjemnením $\mathcal{U}$, ak pre každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $V \subseteq U$. Označujeme $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

Veta 12. Ak (X, d) je metrický priestor, tak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru (X, T_d) existuje σ -diskrétné otvorené pokrytie také, že $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

Veta 13. Ak (X, d) je metrický priestor, tak (X, T_d) má σ -diskrétnu bázu.

Veta 14. Nech X je metrizovateľný (metrický) priestor. Potom sú ekvivalentné

- (i) X má spočítateľnú bázu,
- (ii) X je separabilný,
- (iii) X je lindelöffovský.

Dôsledok 5. Každý kompaktný metrizovateľný priestor má spočítateľnú bázu.

Dôsledok 6. X je kompaktný, metrizovateľný $\Leftrightarrow X$ je homeomorfný s uzavretým podpriestorom priestoru $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Veta 15. Nech $\mathcal{S}$ je lokálne konečný systém podmnožín priestoru X . Potom platí

- (i) $\overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \overline{S}$
- (ii) Ak pre každé $S \in \mathcal{S}$ je S uzavretá v X , tak aj $\bigcup \mathcal{S}$ je uzavretá v X .

Veta 16. Ak X je regulárny a má σ -lokálne konečnú bázu $\mathcal{B}$, tak X je normálny.

Dôsledok 7. Každý metrizovateľný priestor je normálny.

Veta 17. Nech X je T_0 -priestor a $(\rho_i, i \in \mathbb{N})$ je systém pseudometrick na X , ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- (i) $\forall i \in \mathbb{N} \forall x, y \in X \rho_i(x, y) \leq 1$
- (ii) $\forall i \in \mathbb{N} \rho_i: (X, T) \times (X, T) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.
- (iii) Pre každú uzavretú množinu A a každé $x \notin A$ existuje $i \in \mathbb{N}$ $\rho_i(x, A) > 0$.

Potom zobrazenie $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x, y)$ je metrika na X a $T_d = T$.

Veta 18. Nech X je regulárny T_1 -priestor. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) X je metrizovateľný.
- (ii) X má σ -diskrétnu bázu. (Bing)
- (iii) X má σ -lokálne konečnú bázu. (Nagata)

2 Topológia II

Takto vyzerala otázka týkajúca sa topológie na malej analýze.
Topologické priestory. Otvorené a uzavreté množiny, okolia, husté množiny a pod. Spojité zobrazenia, homeomorfné zobrazenia, otvorené a uzavreté zobrazenia. Spojitý obraz kompaktných a súvislých množín.

Definícia 1. Systém podmnožín množiny X $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na X , ak

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (ii) $A_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,
- (iii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

Dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor* ak $\mathcal{T}$ je topológia na X .

Príklady topologických priestorov:

$(X, \{\emptyset, X\})$ - indiskrétny topologický priestor

$(X, \mathcal{P}(X))$ - diskretný topologický priestor

$(X, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ je konečná}\}$ - kofinitná topológia

Každý metrický priestor určuje topológiu.

Definícia 2. Množiny patriace do $\mathcal{T}$ nazývame *otvorené* a ich doplnky *uzavreté* množiny.

Tvrdenie 1.

- (i) $\emptyset$ a X sú uzavreté,
- (ii) prienik ľubovoľného systému uzavretých množín je uzavretá množina,
- (iii) zjednotenie konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina.

Definícia 3. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$. $\overline{A} = \cap \{F : A \subseteq F, F \text{ je uzavretá v } X\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A v X .

Tvrdenie 2.

- (i) A je uzavretá $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,
- (ii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
- (iii) $A \subseteq \overline{A}$,
- (iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
- (v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definícia 4. Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $Y \subseteq X$, tak $\mathcal{T}^* = \{G \cap Y : G \in \mathcal{T}\}$ je topológia na Y a nazýva sa *relatívnou topológiou* indukovanou na Y topológiou $\mathcal{T}$. $(Y, \mathcal{T}^*)$ sa nazýva *topologický podpriestor* priestoru X .

Definícia 5. Nech X je topologický priestor a $x \in V \subseteq X$. V sa nazýva *okolie* bodu x , ak existuje otvorená množina U taká, že $x \in U \subseteq V$.

Veta 1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ každé okolie bodu x má neprázdny prienik s A (pretína množinu A).

2.1 Typy bodov a množín v topologických priestoroch

Definícia 6. Bod p topologického priestoru X sa nazýva *izolovaný bod* priestoru X , ak množina $\{p\}$ je otvorená v X . Bod $p \in A \subseteq X$ je *izolovaný bod* množiny A , ak je izolovaný v topologickom podpriestore A priestoru X .

Definícia 7. Bod $p \in X$ je *hromadný bod* množiny $A \subseteq X$, ak ľubovoľné okolie bodu p obsahuje bod množiny A rôzny od p . Množina všetkých hromadných bodov množiny A sa označuje $D(A)$ a nazýva sa *derivácia množiny* A .

Tvrdenie 3. Nech X je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom platí:

- (i) $\overline{A} = A \cup D(A)$,
- (ii) množina A je uzavretá práve vtedy, keď $D(A) \subseteq A$ (A obsahuje všetky svoje hromadné body.)

Definícia 8. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$. Potom množina $\text{Int } A = \cup \{G : G \subseteq A, G \in \mathcal{T}\}$ sa nazýva *vnútro* množiny A a množina $H(A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ *hranica* množiny A . Prvky množiny $\text{Int } A$ nazývame *vnútorné body* a prvky množiny $H(A)$ nazývame *hraničné body* množiny A .

Tvrdenie 4. (i) A je otvorená $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$,

(ii) $A \subseteq \text{Int } A \cup H(A)$,

(iii) ak A je uzavretá, tak $A = \text{Int } A \cup H(A)$.

(iv) $\text{Int } A = X \setminus \overline{X \setminus A}$

(v) $\overline{A} = \text{Int } A \cup H(A)$

Definícia 9. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *hustá* (v X), ak $\overline{A} = X$.

Tvrdenie 5. Množina $A \subseteq X$ je hustá v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina G otvorená v X má neprázdny prienik s množinou A .

Definícia 10. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *perfektná*, ak $A = D(A)$.

Veta 2. Množina $A \subseteq X$ je perfektná práve vtedy, keď A je uzavretá a nemá izolované body.

Definícia 11. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *riedka* (v priestore X), ak $\text{Int } \overline{A} = \emptyset$.

Veta 3. Množina $A \subseteq X$ je riedka v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina $G \subseteq X$ obsahuje takú neprázdnu otvorenú podmnožinu $H \subseteq G$, že $H \cap A = \emptyset$.

2.2 Báza topológie, báza okolí

Definícia 12. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém množín $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *báza topológie* $\mathcal{T}$, ak každá množina $z \in \mathcal{T}$ je zjednotením množín $z \in \mathcal{B}$.

Tvrdenie 6. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bola báza nejakej topológie na X sú:

- (i) $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = X$,

(ii) ak $A, B \in \mathcal{B}$ a $p \in A \cap B$, tak existuje taká množina $V \in \mathcal{B}$, že $p \in V \subseteq A \cap B$.

Definícia 13. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *priestor so spočítateľnou bázou*, ak existuje spočítateľná báza $\mathcal{B}$ pre topológiu $\mathcal{T}$. Hovoríme potom, že X spĺňa *druhú axiómu spočítateľnosti*.

Definícia 14. Topologický priestor X sa nazýva *separabilný*, ak v X existuje hustá spočítateľná podmnožina.

Tvrdenie 7. Ak X je priestor so spočítateľnou bázou, tak X je separabilný.

Pre metrické priestory platí aj obrátená implikácia.

Definícia 15. Hovoríme, že systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ je *subbáza* topológie $\mathcal{T}$, ak systém pozostávajúci zo všetkých konečných prienikov množín z $\mathcal{S}$ tvorí bázu topológie $\mathcal{T}$.

Definícia 16. Nech X je topologický priestor a $p \in X$. Množina $\mathcal{B}$ okolí bodu p sa nazýva *báza okolí* bodu p , ak $p \in B$ pre všetky $B \in \mathcal{B}$ a pre každé okolie V bodu p existuje množina $B \in \mathcal{B}$ taká, že $B \subseteq V$.

Definícia 17. Ak $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ sú topologické priestory, tak $(\prod X_i, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T}$ je určená subbázou $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$ (p_i označujeme projekcie z karteziánskeho súčinu $\prod X_i$ na množinu X_i) sa nazýva *topologický súčin* topologických priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. (Teda báza topológie topologického súčinu obsahuje množiny tvaru $\prod_{i \in I} V_i$, pričom $V_i \in \mathcal{T}_i$ pre všetky $i \in I$ a $V = X_i$ pre všetky $i \in I$ až na konečný počet.)

2.3 Zobrazenia topologických priestorov

Definícia 18. Nech $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{S})$ sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je

- (i) *spojité*, ak pre každú otvorenú množinu $U \subseteq Y$ je jej vzor $f^{-1}(U)$ otvorená v X ,
- (ii) *homeomorfizmus*, ak f je bijekcia a f aj f^{-1} sú spojité,
- (iii) *uzavreté*, ak obraz každej uzavretej množiny je uzavretá,
- (iv) *otvorené*, ak obraz každej otvorenej množiny je otvorená.

Tvrdenie 8. Nech X a Y sú topologické priestory, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) f je spojité,
- (ii) vzor každej uzavretej množiny v zobrazení f je uzavretá množina,
- (iii) pre každú podmnožinu $A \subseteq X$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Tvrdenie 9. Ak X a Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je bijekcia, tak sú ekvivalentné podmienky:

- (i) f je homeomorfizmus,
- (ii) f je spojité a otvorené,
- (iii) f je spojité a uzavreté.

2.4 Súvislý topologický priestor

Definícia 19. Topologický priestor X sa nazýva *súvislý*, ak nie je zjednotením svojich dvoch neprázdnych uzavretých disjunktných podmnožín.

Veta 4. Ak $f: (X, T) \rightarrow (Y, S)$ je spojité, surjektívne a (X, T) je súvislý, tak aj (Y, S) je súvislý. (Spojité obraz súvislého topologického priestoru je súvislý.)

2.5 Kompaktný topologický priestor

Definícia 20. Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak každé jeho otvorené pokrytie obsahuje konečné podpokrytie.

Definícia 21. Hovoríme, že systém množín je *centrovaný*, ak každý jeho konečný podsystém má neprázdny prienik.

Tvrdenie 10. Topologický priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín má neprázdny prienik.

Tvrdenie 11. Uzavretá podmnožina kompaktného topologického priestoru je kompaktná.

Tvrdenie 12. Kompaktný podpriestor hausdorffovského priestoru je uzavretý.

Veta 5. Spojitý obraz kompaktného topologického priestoru je kompaktný.

Veta 6 (Tichonovova). Ak X_γ , $\gamma \in \Gamma$ sú kompaktné topologické priestory, tak ich topologický súčin $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ je kompaktný.

3 Diferenciálna topológia

Diferencovateľné variety a funkcie. Dotyková varieta. Vloženie kompaktných variet do $\mathbb{R}^n$. Veta o lokálnej inverzii. Vektorové fibrácie. Veta o transversalite.

4 Algebraická topológia

Homotopia a homotopické zobrazenia, fundamentálna grupa. Fundamentálna grupa kružnice. Geometrické a reťazové komplexy. Singulárne a simplicialne homológie.

4.1 Homotópia

Definícia 1. Nech $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité zobrazenia. Hovoríme, že f je *homotopné* s g ($f \simeq g$, f sa dá homotopicky zdeformovať na g), ak existuje spojité zobrazenie $H: X \times I \rightarrow Y$ také, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ pre každé $x \in X$.

H je *homotópia* od f ku g .

Vlastne: $\forall t \in I$ H definuje spojité zobrazenie $h_t: X \rightarrow Y$; $h_t(x) = H(x, t)$.

To, že H je spojité znamená to, že systém zobrazení $\{h_t\}_{t \in I}$ je spojitý.

To, že H je homotópia od f ku g znamená, že $h_0 = f$ a $h_1 = g$.

Definícia 2. Ak $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité zobrazenia, také, že pre dáku podmnožinu $A \subset X$ máme $f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A$, hovoríme, že f a g sú *homotopné rel A* , ak existuje homotópia $H: X \times I \rightarrow Y$ taká, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ a $H(a, t) = f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A, t \in I$.

H = homotópia rel A od f ku g .

Označujeme $f \simeq g(\text{rel } A)$.

Tvrdenie 1. Na triede spojitých zobrazení z X do Y (pre dané X, Y) je relácia $\simeq$ reláciou ekvivalencie.

Definícia 3. Triedy ekvivalencie $\simeq$ sa nazývajú *homotopické triedy* zobrazení z X do Y .

Veta 1. Spojité zobrazenie $f: S^n \rightarrow X$ sa dá rozšíriť na spojité zobrazenie $F: D^{n+1} \rightarrow X \Leftrightarrow f$ je homotopné s konštantným zobrazením; $f \simeq \text{const}$.

Definícia 4. Zobrazenie, ktoré je homotopné s konštantným zobrazením sa tiež nazýva *nulohomotopné* (alebo homotopné s nulou).

Veta 2. Nech $f, g: X \rightarrow Y$, nech $A \subset X$ a $f|_A = g|_A$. Nech $h: Y \rightarrow Z$ je ľubovoľné spojité zobrazenie. Ak $f \simeq g(\text{rel} A)$, tak aj $h \circ f \simeq h \circ g(\text{rel} A)$.

Nech $f, g: X \rightarrow Y$, nech $A \subset X$ a $f|_A = g|_A$. Ak $k: W \rightarrow X$ a $f \simeq g(\text{rel} A)$, tak $f \circ k \simeq g \circ k(\text{rel } k^{-1}(A))$

Definícia 5. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva *homotopická ekvivalencia*, ak existuje spojité zobrazenie $g: Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. (g sa tiež zvykne volať ľavé homotopicky inverzné zobrazenie ku f a naopak, f a g sú navzájom homotopicky inverzné.)

Priestory X, Y sú *homotopicky ekvivalentné* (=majú ten istý homotopický typ), ak existuje homotopická ekvivalencia $f: X \rightarrow Y$. Budeme označovať $X \sim Y$ (v literatúre aj $X \cong Y$).

Platí: Topologicky ekvivalentné topologické priestory sú homotopicky ekvivalentné (homeomorfizmus je homotopická ekvivalencia).

Tvrdenie 2. Relácia homotopической ekvivalencie je relácia ekvivalencie na triede topologických priestorov.

$$\mathbb{R}^n \sim \{x\}$$

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \sim S^{n-1}$$

Definícia 6. Ak A je topologický podpriestor X a $i: A \hookrightarrow X$ a $r: X \rightarrow A$ je (spojité) také, že $r \circ i = \text{id}_A$ (t.j. $r|_A \equiv \text{id}_A$), tak r sa nazýva *retrakcia* (stiahnutie) priestoru X na podpriestor A . (A je *retrakt* X .)

Ak $r: X \rightarrow A$ je retrakcia taká, že $i \circ r \simeq \text{id}_X$, tak r sa nazýva *deformačná retrakcia*. (A je *deformačný retrakt* priestoru X .)

Ak $i \circ r \simeq \text{id}_X(\text{rel} A)$, tak r je *silná deformačná retrakcia*.

Definícia 7. Priestor X sa nazýva *kontraktibilný* (stiahnuteľný), ak pre dáke $x \in X$ platí, že $\{x\}$ je deformačným retraktom priestoru X .

Tvrdenie 3. Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow X$ je homotopicky ekvivalentný s jednobodovým priestorom.

Tvrdenie 4. Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow \text{id}_X \simeq \text{const}$.

Tvrdenie 5. Nech $f: X \rightarrow S^n$, $n \geq 1$ je spojité zobrazenie také, že $f(X) \neq S^n$. Potom $f \simeq \text{const}$.

Tvrdenie 6. $CX = X \times I / X \times \{1\}$ je kontraktibilný.

4.2 Fundamentálna grupa topologického priestoru

Definícia 8. $\Omega(X, x_0)$ = množina všetkých ciest v X , ktoré začínajú aj končia v x_0 . Prvky z $\Omega(X, x_0)$ sa nazývajú *slučky*.

Veta 3. *Nech $c, d: I \rightarrow X$ sú cesty také, že $c(1) = d(0)$ a nech $c', d': I \rightarrow X$ sú cesty také, že $c'(1) = d'(0)$. Ak $c \simeq c'(\text{rel}\{0, 1\})$ a $d \simeq d'(\text{rel}\{0, 1\})$, tak $c * d \simeq c' * d'(\text{rel}\{0, 1\})$.*

Okrem toho: $c^- \simeq c'^- \text{rel}\{0, 1\}$

Dôsledok 1. *Na množine homotopických tried $\text{rel}\{0, 1\}$ slučiek priestoru X v bode x_0 predpis $[c] \cdot [d] = [c * d]$ dobre definuje binárnu operáciu.*

Lema 1. *Nech $c: I \rightarrow X$ je cesta. Nech $\alpha: I \rightarrow I$ je spojité zobrazenie také, že $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Potom $c \circ \alpha \simeq c(\text{rel}\{0, 1\})$.*

Definícia 9. Nech $c, d: I \rightarrow X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0, 1)$. Potom definujeme novú cestu $c *_q d$.

$$c *_q d(t) = \begin{cases} c(\frac{t}{q}) & t \in [0, q] \\ d(\frac{t-q}{1-q}) & t \in [q, 1] \end{cases}$$

Veta 4. *Nech $c, d: I \rightarrow X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0, 1)$. Potom $(c *_q d) \circ \alpha = c * d$ pre vhodné $\alpha: I \rightarrow I$; $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Čiže $c *_q d \simeq c * d(\text{rel}\{0, 1\})$.*

Veta 5. *Nech c, d, f sú také cesty v X , že sa dajú skladať. Potom: $(c * d) * f \simeq c * (d * f)(\text{rel}\{0, 1\})$.*

Dôsledok 2. *Operácia $\cdot$ na množine homotopických tried $\text{rel}\{0, 1\}$ slučiek v $x_0 \in X$ definovaná pomocou spájania ciest je asociatívna.*

$([c] \cdot [d]) \cdot [f] = [c] \cdot ([d] \cdot [f])$ pre ľubovoľné $c, d, f \in \Omega(X, x_0)$.

Veta 6. *Nech $c: I \rightarrow X$ je cesta v X a nech $c(0)$ resp. $c(1)$ sú konštantné cesty v $c(0)$ resp. $c(1)$. Potom*

$$c(0) * c \simeq c \text{ rel}\{0, 1\},$$

$$c * c(1) \simeq c \text{ rel}\{0, 1\}.$$

Dôsledok 3. *Konštantná slučka v $x_0 \in X$ je neutrálnym prvkom operácie $\cdot$ na množine homotopických tried $\text{rel}\{0, 1\}$ slučiek v $x_0 \in X$.*

Veta 7. *Pre ľubovoľnú cestu $c: I \rightarrow X$.*

$$c * c^- \simeq c(0) \text{ rel}\{0, 1\}$$

$$c^- * c \simeq c(1) \text{ rel}\{0, 1\}$$

Dôsledok 4. *Pre $c \in \Omega(X, x_0)$ máme, že $[c^-] = [c]^{-1}$.*

Veta 8. *Nech X je topologický priestor, pevne zvolíme $x_0 \in X$. Ak na množine homotopických tried $\text{rel}\{0, 1\}$ slučiek priestoru X v bode x_0 definujeme operáciu $\cdot$ predpisom $[c] \cdot [d] = [c * d]$, tak dostaneme z tejto množiny grupu; označme ju $\pi(X, x_0)$.*

Definícia 10. Grupa $\pi(X, x_0)$ sa nazýva *fundamentálna grupa* priestoru X v bode x_0 (s referenčným (bázovým) bodom x_0).

4.3 Závislosť $\pi(X, x_0)$ od x_0

Definícia 11. Ak $r: I \rightarrow X$ je cesta v X , $r(0) = x_1$, $r(1) = x_0$, definujeme $\alpha_r: \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_1)$, $\alpha_r(c) = r * c * r^-$. Toto zobrazenie indukuje zobrazenie fundamentálnych grúp:

$$\alpha_r: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_1)$$

$$\alpha_r[c] = [r * c * r^-]$$

Tvrdenie 7. $\alpha_r: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_1)$

1. je homomorfizmus grúp

2. je izomorfizmus grúp

3. α_r závisí od homotopickej triedy $\text{rel}\{0, 1\}$ cesty r .

4. Ak $s: I \rightarrow X$ je cesta z x_1 do x_0 , tak α_r a α_s sa líšia o vnútorný automorfizmus grupy $\pi(X, x_1)$ (Teda ak $\pi(X, x_1)$ je komutatívna, tak máme $\alpha_r = \alpha_s$, t.j. izomorfizmus $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$ nezávisí od výberu cesty z x_0 do x_1 (ak taká cesta existuje).)

Dôsledok 5. Ak priestor X je lineárne súvislý, tak pre ľubovoľné $x_0, x_1 \in X$ máme $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$. (vo všeobecnosti tento izomorfizmus nie je kanonický - závisí od homotopickej triedy $\text{rel}\{0, 1\}$) Potom $\pi(X, x_0)$ označujeme $\pi(X)$.

Lema 2. Nech $c, d: I \rightarrow X$ sú uzavreté cesty a nech $H: I \times I \rightarrow X$ je homotópia od c ku d taká, že $H(0, s) = c(s)$ a $H(1, s) = d(s)$ $\forall s \in I$ (=t.j. cez uzavreté cesty). Nech $h: I \rightarrow X$ je cesta definovaná ako $h(s) = H(0, s)$ pre $s \in I$. Potom $\alpha_h([d]) = [c]$.

Definícia 12. Pre spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$, definujeme $\pi(f): \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, f(x_0))$, $\pi(f)([c]) = [f \circ c]$.

Tvrdenie 8. $\pi(f): \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, f(x_0))$ je homomorfizmus grúp. Ak $g: Y \rightarrow Z$ je spojité, tak $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$. T.j. ak diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

$\pi(X, x_0) \xrightarrow{\pi(f)} \pi(Y, f(x_0))$. Okrem toho $\pi(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi(X, x_0)}$.

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\pi(f)} & \pi(Y, f(x_0)) \\ & \searrow \pi(g \circ f) & \downarrow \pi(g) \\ & & \pi(Z, gf(x_0)) \end{array}$$

Veta 9. Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ sú spojité zobrazenia, nech $x_0 \in X$. Nech $f \simeq g$ a $H: X \times I \rightarrow Y$ je homotópia od f ku g . Definujme cestu $h: I \rightarrow Y$, $h(s) = H(x_0, s)$. (cesta z $f(x_0)$ do $g(x_0)$) Potom $\alpha_h \circ \pi(g) = \pi(f)$ a α_h je izomorfizmus.

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\pi(g)} & \pi(Y, g(x_0)) \\ & \searrow \pi(f) & \downarrow \alpha_h \cong \\ & & \pi(Y, f(x_0)) \end{array}$$

Dôsledok 6. $\pi(g)$ je izomorfizmus $\Leftrightarrow \pi(f)$ je izomorfizmus.

Veta 10. Nech X, Y majú ten istý homotopický typ. Potom ich fundamentálne grupy sú izomorfné.

Dôsledok 7. Fundamentálna grupa ľubovoľného kontraktibilného priestoru je triviálna.

Tvrdenie 9. Nech X, Y sú topologické priestory, nech $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Potom $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.

4.4 Fundamentálna grupa kružnice

Veta 11. $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Lema 3. Označme $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \Phi(t) = e^{2\pi it}$. Nech $c: I \rightarrow S^1$ je ľubovoľná slučka v bode $1 \in S^1$. Potom existuje jediná cesta $\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že: $\tilde{c}(0) = 0$ a $\Phi \circ \tilde{c} = c$. ($\tilde{c}$ sa nazýva zdvih cesty c do $\mathbb{R}$.)

Tvrdenie 10. V situácii z predchádzajúcej lemy je $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$.

Veta 12. Nech $c, d \in \Omega(S^1, 1)$ sú homotopné $\text{rel}\{0, 1\}$. Nech $H: I \times I \rightarrow S^1$ je homotópia $\text{rel}\{0, 1\}$ od c ku d . Potom existuje jediná homotópia $\text{rel}\{0, 1\}$ $\tilde{H}: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ od $\tilde{c}$ ku $\tilde{d}$ taká, že $\Phi \circ \tilde{H} = H$.

Dôsledok 8. Ak $[c] = [d] \in \pi(S^1, 1)$, tak $\tilde{c} \simeq \tilde{d}(\text{rel}\{0, 1\})$, a preto $\tilde{c}(1) = \tilde{d}(1)$. Teda predpis $[c] \mapsto \tilde{c}(1)$ dobre definuje zobrazenie $\chi: \pi(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Tvrdenie 11. χ je izomorfizmus grúp.

Tvrdenie 12. S^1 nie je retraktom gule D^2 .

Tvrdenie 13. Torus T má fundamentálnu grupu $\pi(T) \cong \mathbb{Z}^2$.

4.5 Reťazcové komplexy

Definícia 13. Postupnosť $G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je *exaktná* v G , ak $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$.

Postupnosť $\dots G_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} G_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \dots$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je *exaktná*, ak každá postupnosť $G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_{n+2}$ je exaktná v G_{n+1} . ($\forall n \in \mathbb{Z}$).

Exaktná postupnosť $0 \rightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \rightarrow 0$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi sa nazýva *krátka exaktná postupnosť*.

Definícia 14. Δ_q = q -rozmerný štandardný simplex = konvexný obal koncových bodov bázových vektorov $e_0, \dots, e_q$ v $\mathbb{R}^{q+1} = \{(t_0, \dots, t_q); t_i \geq 0, \sum_{i=0}^q t_i = 1\}$.

Body $e_0, \dots, e_q$ sa volajú vrcholy Δ_q .

Množina $\{(t_0, \dots, t_q) \in \Delta_q; t_i = 0\}$ pre dáke i sa nazýva i -ta stena simplexu Δ_q , leží oproti vrcholu e_i .

Definujeme zobrazenie $d_q^i: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$ $d_q^i(t_0, \dots, t_{q-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{q-1})$ pre každé $i = 0, \dots, q$. (tzv. stenové zobrazenie)

Lema 4. $i, j \in \{0, 1, \dots, q\}$ také, že $j < i$ máme $d_q^i \circ d_{q-1}^j = d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}$.

Definícia 15. Singulárny q -rozmerný simplex topologického priestoru X je spojité zobrazenie $f: \Delta_q \rightarrow X$.

$S_q(X) :=$ voľná abelovská grupa generovaná množinou všetkých q -simplexov priestoru X pre $q \geq 0$ a $S_q(X) := 0$ pre $q < 0$.

Definujeme homomorfizmus $\partial_q^i: S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$, $\partial_q^i(f) = f \circ d_q^i$ pre $i = 0, \dots, q$.

Definujeme hraničný operátor: $\partial_q: S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$, $\partial_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_q^i$, ak $q \geq 0$, inak $\partial_q = 0$.

Veta 13. $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$ pre všetky $q \in \mathbb{Z}$.

Definícia 16. Prvky z $S_q(X)$ sa volajú q -rozmerné *singulárne reťazce* priestoru X .

Definícia 17. Postupnosť $S(X) = (S_q(X), \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ sa nazýva *singulárny reťazcový komplex* topologického priestoru X .

Pre spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ definujeme $S_q(f): S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$, $S_q(f)(T) = f \circ T$ pre $q \geq 0$, pre $q < 0$ je $S_q(f)$ nulové zobrazenie.

Veta 14. Ak $f: X \rightarrow Y$ je spojité, tak diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & S_{q-2}(X) & \longrightarrow \\ & \downarrow S_q(f) & & \downarrow S_{q-1}(f) & & \downarrow S_{q-2}(f) & \\ \longrightarrow & S_q(Y) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & S_{q-2}(Y) & \longrightarrow \end{array}$$

komutuje, t.j. $\forall q \in \mathbb{Z}$ máme $S_{q-1}(f) \circ \partial_q = \partial_q \circ S_q(f)$.

Tvrdenie 14. Ak $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú spojité, tak $S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f)$ a $S_q(id_X) = id_{S_q(X)}$.

Definícia 18. Reťazcový komplex je postupnosť $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$, kde K_q sú abelovské grupy a $\partial_q: K_q \rightarrow K_{q-1}$ je homomorfizmus grúp (pre všetky $q \in \mathbb{Z}$) taký, že $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Ak $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ sú dva reťazcové komplexy, tak *homomorfizmom reťazcových komplexov* z K do L rozumieme postupnosť $f = (f_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ homomorfizmov $f_q: K_q \rightarrow L_q$ takých, že $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Stručne hovoríme o homomorfizme reťazcových komplexov $f: K \rightarrow L$. (∂_q sa aj tu volá *hraničný operátor*).

Tvrdenie 15. Je jasné, že ak $f: K \rightarrow L$, $g: L \rightarrow M$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak aj $g \circ f: K \rightarrow M$ je homomorfizmus reťazcových komplexov, $id_K: K \rightarrow K$ je tiež homomorfizmus reťazcových komplexov.

Definícia 19. $\mathcal{K}$ =kategória všetkých reťazcových komplexov a homomorfizmov medzi nimi.

Definícia 20. Reťazcový komplex E taký, že $E_0 = \mathbb{Z}$ a $E_q = 0$ pre $q \neq 0$ sa nazýva *augmentačný komplex*.

Definícia 21. Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex. Potom označme $Z_q(K) := \text{Ker}(\partial_q)$, $B_q(K) := \text{Im}(\partial_{q+1})$.

Tvrdenie 16. $B_q(K)$ je podgrupa grupy $Z_q(K)$.

Definícia 22. $Z_q(K)$ =grupa q -cyklov reťazcového komplexu K . $B_q(K)$ =grupa q -hraníc reťazcového komplexu K .

Definícia 23. Ak $K = (K_q, \partial_q)$ je reťazcový komplex, tak faktorová grupa $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ sa nazýva q -ta grupa *homológií* (q -ta homologická grupa) komplexu K . Jej prvky označujeme $[c] \in H_q(K)$.

Definícia 24. Relácia ekvivalencie na grupe $Z_q(K)$ určená podgrupou $B_q(K)$ sa nazýva *homológia*.

$c, d \in Z_q(K) : c \simeq d \Leftrightarrow c - d \in B_q(K) \Leftrightarrow c - d = \partial_{q+1}(a)$ pre dáke $a \in K_{q+1}$. Hovorí sa vtedy, že c a d sú homologické.

Tvrdenie 17. Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ sú reťazcové komplexy, nech $f: K \rightarrow L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov. Potom:

$$f_q(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$$

$$f_q(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$$

Veta 15. Ak $f: K \rightarrow L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov, tak predpis $[c] \mapsto [f_q(c)]$ dobre definuje homomorfizmus grúp $H_q(f): H_q(K) \rightarrow H_q(L)$.

Definícia 25. Homomorfizmus $H_q(f): H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ z predchádzajúcej vety sa nazýva homomorfizmus homologickej grúp indukovaný homomorfizmom reťazcových komplexov $f: K \rightarrow L$.

Tvrdenie 18. Ak $f: K \rightarrow L$, $g: L \rightarrow M$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak pre každé $q \in \mathbb{Z}$ máme:

$$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$$

$$H_q(id_K) = id_{H_q(K)}$$

Máme teda kovariantný funktor $H: \mathcal{K} \rightarrow \text{GradAb}$.

4.6 Singulárne homologickej grupy topologických priestorov

Definícia 26. Nech X je topologický priestor. Potom q -ta singulárna grupa homológií priestoru X sa definuje ako $H_q(X) := H_q(S(X))$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$. Ak $f: X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie, tak máme homomorfizmus singulárnych reťazcových komplexov $S(f): S(X) \rightarrow S(Y)$; definujeme homomorfizmus singulárnych grúp homológií ako $H_q(f) := H_q(S(f)): H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$. $H_q(f)$ sa nazýva homomorfizmus singulárnych grúp homológií indukovaný spojitým zobrazením $f: X \rightarrow Y$.

Samozrejme $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$, $H_q(id_X) = id_{H_q(X)}$, teda $H_q: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ a $H: \text{Top} \rightarrow \text{GradAb}$.

Tvrdenie 19. Ak P je jednobodový priestor, tak

$$H_q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ ak } q = 0 \\ 0 & , \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

Veta 16. Nech X je lineárne súvislý priestor. Potom $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Dôsledok 9. Nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém komponentov lineárnej súvislosti priestoru X . Potom $H_q(X) \cong \prod_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha)$.

Dôsledok 10. $H_0(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$

Dôsledok 11. X je lineárne súvislý $\Leftrightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Tu by mal byť prehľad nejakej literatúry z topológie (všeobecnej, diferenciálnej, algebraickej).

Literatúra

[1] R.Engelking: *General Topology*

[2] M.Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov* (www...)

- [3] K.P.Hart: *Set Theoretic Methods in General Topology* (www.cs.vu.nl/~kphart)
- [4] A.Hatcher: *Algebraic Topology* (www...)
- [5] A.McCluskey, B.McMaster: *Topology Course Lecture Notes* (Toto možno nájsť na Topology Atlase, kde je tiež veľa ďalších vecí z topológie: www.at.yorku.ca)
- [6] J.Nagata: *Modern General Topology*
- [7] E.H.Spanier: *Algebraic Topology*
- [8] O.Y.Viro, O.A.Ivanov, N.Y.Netsvetaev, V.M.Kharlamov: *Elementary Topology - A First Course. Textbook in Problems* (www.math.uu.se/~oleg)