

Verzia: 22. februára 2004

Toto by mal byť prehľad viet, ktoré sa týkajú jednotlivých štátnicových otázok z malého bloku matematická analýza. Niekde je toho uvedeného viac, než treba, alebo viac než sa preberalo na prednáškach, inde zasa možno niečo podstatné chýba. To, že sa tieto poznámky líšia od toho, čo sme preberali na prednáškach súvisí s tým, že sa mi občas zdalo rozumnejšie opisovať to z kníh, než z prednášok. (Nie že by niektoré prednášky boli zlé, to len ja som si nerobil poriadne poznámky. :-)

Ak sa niekomu stane, že mu poškodí nesprávna odpoveď, ktorú sa naučil z tohto textu, vopred sa mu ospravedlňujem. Dúfam ale, že aspoň niekomu tieto poznámky pomôžu.

Poznámky sa momentálne nachádzajú na thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty. Sú tam uverejnené aj zdrojáky - takže v prípade, že sa sylaby zmenia máte možnosť si ich upraviť, nejaké časti vynechať alebo naopak pridať. Ak by ste našli v texte chyby, budem rád, keď mi o nich dáte vedieť na sleziak@fmph.uniba.sk a pri najbližšej aktualizácii tam už bude opravená verzia.

1 Spojitosť

Spojitosť funkcie jednej a viacerých premenných, spojitosť funkcie komplexnej premennej, spojitosť zobrazenia z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^k$. Základné vety o spojitých funkciách, Weierstrassove vety.

Spojitosť funkcie

Nech (X, d_1) , (Y, d_2) sú metrické priestory, $A \subset X$ a $f: A \rightarrow Y$ je funkcia.

Definícia 1. Hovoríme, že $f: X \rightarrow Y$ je *spojitá v bode* $x_0 \in A$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in A$ také, že $d_1(x, x_0) < \delta$ platí $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Tvrdenie 1. f je spojité v bode x_0 práve vtedy, keď $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Na základe ekvivalencie Cauchyho a Heineho definície limity funkcie potom dostaneme nasledovné tvrdenie:

Tvrdenie 2. f je spojité v bode x_0 práve vtedy, keď pre každú postupnosť takú, že $x_n \rightarrow x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Podmienka z predchádzajúceho tvrdenia sa niekedy tiež volá Heineho definícia spojitosti a pôvodná definícia Cauchyho definícia spojitosti.

Tvrdenie 3. Ak f, g sú spojité v bode x_0 , tak sú v x_0 spojité aj $c_1f + c_2g$ a fg . Ak navyše $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f(x)}{g(x)}$ je spojité v x_0 .

Definícia 2. Hovoríme, že $f: X \rightarrow Y$ je spojité na množine A ($A \subset X$), ak je spojité v každom bode množiny A .

Ako špeciálne prípady spojitosti zobrazení metrických priestorov dostaneme pojmy spojitosti pre priestory zo zadania, t.j. napríklad $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^k$, alebo $X = Y = \mathbb{C}$.

Základné vety o spojitých funkciách

Spojité funkcie na kompaktných množinách

Veta 1 (1.Weierstrassova veta). Ak A je kompaktný metrický (topologický) priestor, tak spojité funkcie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je na A ohraničená.

Veta 2 (2.Weierstrassova veta). Ak A je kompaktný metrický (topologický) priestor, tak spojitá funkcia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ nadobúda na A svoje maximum aj minimum.

Veta 3 (3.Weierstrassova, Cantorova). Spojitá funkcia na kompaktnom metrickom priestore je rovnomerne spojitá.

Monotónne a spojité funkcie na intervale

Definícia 3. Podmnožina $I \subset \mathbb{R}$ sa nazýva *interval*, ak platí:

- Existujú x_1, x_2 také, že $x_1 \neq x_2$ a $x_1, x_2 \in I$.
- Ak $x_1 < t < x_2$ a $x_1, x_2 \in I$, tak $t \in I$.

Nech I je interval.

Veta 4. Ak $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, tak $f(I)$ je jednoprvková množina alebo interval.

Tvrdenie 4. $x_0 \in I$ je bod nespojitosti neklesajúcej funkcie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ práve vtedy, keď

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$$

$x_0 \in I$ je bod nespojitosti nerastúcej funkcie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$.

Veta 5. Ak $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je nerastúca (neklesajúca) funkcia a $f(I)$ je interval alebo jednobodová množina, tak f je spojitá na I .

Veta 6. Ak $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je rastúca (klesajúca) spojitá funkcia, tak aj f^{-1} je rastúca (klesajúca) a spojitá.

...ako také odporné hmyzovité mravce.
Kubáček

2 Diferencovateľnosť

Diferencovateľnosť funkcie jednej a viacerých premenných, diferencovateľnosť zobrazenia z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^k$. Diferencovateľnosť a spojitosť. Taylorov vzorec, extrémny funkcií.

2.1 Diferencovateľnosť funkcie jednej premennej

Definícia 1. Nech $f: O(a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia. Hovoríme, že f má v bode a *deriváciu*, ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$.

Definícia 2. Majme $a \in O(a) \subset \mathbb{R}$, $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$. Hovoríme, že f je *diferencovateľná* v bode a , ak existujú $A \in \mathbb{R}$ a $\omega: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ a platí $f(x) = f(a) + A(x - a) + \omega(x)(x - a)$ pre všetky $x \in O(a)$. Lineárny výraz $A(x - a) =: df(x, a)$ nazveme *diferenciálom funkcie f v bode a* .

Veta 1. $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v $a \Leftrightarrow$ existuje konečná derivácia $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Definícia 3. Funkcia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je *diferencovateľná* na množine $M \subset \mathbb{R}$, ak je diferencovateľná v každom bode tejto množiny.

Definícia 4. Hovoríme, že funkcia f je n -krát diferencovateľná v bode a , ak má v bode a n -tú deriváciu.

Základné vety diferenciálneho počtu

Veta 2 (Darbouxova). Ak $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má tam deriváciu (v a sprava, v b zľava), tak f' nadobúda všetky hodnoty medzi $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$.

Veta 3 (Rolleova). Nech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1. je spojitá v $\langle a, b \rangle$,
2. má deriváciu (konečnú alebo nekonečnú) v (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Veta 4 (Lagrangeova). Nech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1. je spojitá v $\langle a, b \rangle$,
2. má deriváciu (konečnú alebo nekonečnú) v (a, b) .

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Veta 5 (Cauchyho - vo všeobecnejšej formulácii). Nech $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1. sú spojité v $\langle a, b \rangle$,
2. majú deriváciu (konečnú alebo nekonečnú) v (a, b) .

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Veta 6 (Cauchyho). Nech $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1. sú spojité v $\langle a, b \rangle$,
2. majú deriváciu (konečnú alebo nekonečnú) v (a, b) , (tu však musíme požadovať, aby v prípade, že obe funkcie majú v tom istom bode nekonečnú deriváciu bol „súčín“ týchto nekonečien opačného znamienka ako zlomok vystupujúci vo vete)
3. $f'^2(x) + g'^2(x) > 0$ pre všetky $x \in (a, b)$,
4. $g(b) \neq g(a)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Veta 7 (L'Hospitalove pravidlo). Nech $a \in \mathbb{R}^+$, $f, g: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité a

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (∞),
2. pre $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú $f'(x)$, $g'(x)$ a $g'(x) \neq 0$,
3. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'Hospitalove pravidlo možno použiť aj viacnásobne. Možno ho použiť tiež na výpočet limit typu $0 \cdot \infty$ ($f \cdot g = f/(1/g)$), $\infty - \infty$ ($f - g = (1/g - 1/f)/(1/(f \cdot g))$) a ∞^0 ($f^g = e^{g \cdot \ln f}$ a $g \cdot \ln f$ je typu $0 \cdot \infty$).

2.2 Diferencovateľnosť funkcií viac premenných

Definícia 5. Majme danú otvorenú množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$. f má v bode a v smere $v \in \mathbb{R}^n$ Gâteauxov diferenciál, ak existuje $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} =: Df(a, v)$.

Ak je Gâteauxov diferenciál v bode a lineárny (ako funkcia smeru v), tak ho nazývame deriváciou funkcie f v bode a a v smere v a funkcia sa nazýva G -diferencovateľná v a .

Definícia 6. Hovoríme, že f je Fréchetovsky diferencovateľná v a , ak existuje lineárne zobrazenie $l_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - l_a(x-a)|}{d(x, a)} = 0$. Označujeme $l_a(x-a) =: df(a, x-a)$.

Veta 8. *Nech $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in M \cap M'$, nech f je F-diferencovateľná v a . Potom*

$$(i) \text{ existuje G-derivácia } f \text{ v bode } a \text{ a platí } Df(a, \bar{n}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) n_i,$$

(ii) f je spojitá v bode a .

Veta 9 (Lagrangeova veta o strednej hodnote). *Nech $a \in O(a) \subset \mathbb{R}^m$, $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in O(a)$, f má parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom existujú $t_i \in (0, 1)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ $f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(x_i - a_i)$, kde $c_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t_i(x_i - a_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \in O(a)$.*

Dôsledok 1. *Ak $a \in \mathbb{R}^m$, $O(a) \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(O(a))$, tak f je F-diferencovateľná v a .*

Toto je tu pre prípad, že by niekto chcel rýpať a bol zvedavý, či niektorá z uvedených viet neplatí obrátene:

$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$ má G-diferenciál ale nie G-deriváciu v $(0,0)$, nie je spojitá v $(0,0)$, na každej priamke prechádzajúcej cez 0 je spojitá

$f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$ má parciálne derivácie v $\mathbb{R}^2$, nie je F-diferencovateľná v $(0,0)$, má derivácie vo všetkých smeroch, nie je G-diferencovateľná.

$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ je F-diferencovateľná v $(0,0)$ ale nemá spojitú parciálne derivácie

$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \frac{x_2}{x_1} & \text{pre } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x_2 = 0 \end{cases}$ je G-diferencovateľná v $(0,0)$ ale nie F-diferencovateľná. (aspoň podľa mňa)

$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pre } y \neq x^2 \\ x & \text{pre } y = x^2 \end{cases}$ je spojitá a G-diferencovateľná v 0, ale nie je tam F-diferencovateľná.

Diferenciály a derivácie vyšších rádov

Definícia 7. f je G-diferencovateľná v bode a v smere $n_1, \dots, n_k$, ak $f(\cdot, n_1, \dots, n_{k-1})$ je G-diferencovateľná v a v smere n_k .

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je $(k-1)$ -krát F-diferencovateľná v každom bode $x \in O(a) \cap A$ a $d^{k-1}f(x; n_1, \dots, n_{k-1})$ je jej $(k-1)$ -vý diferenciál v $x \in O(a) \cap A$ v smere $n_1, \dots, n_k$. Hovoríme, že f je k -krát F-diferencovateľná v a , ak $d^{k-1}f(\cdot; n_1, \dots, n_{k-1}): O(a) \cap A \rightarrow \mathbb{R}$ je F-diferencovateľná v a pre každé $n_1, \dots, n_{k-1}$.

$$D^k f(a; u_1, \dots, u_k) = D[D^{k-1}f(\cdot, u_1, \dots, u_{k-1})](a, u_k)$$

$$d^k f(a; u_1, \dots, u_k) = d[d^{k-1}f(\cdot, u_1, \dots, u_{k-1})](a, u_k)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{df(x, v) - df(a, v) - d^2 f(a; v; x - a)}{d(x, a)} = 0$$

Veta 10 (O zámennosti G-diferencovania). *Nech $O(a) \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ (smery), $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

- (i) existujú $Df(\cdot, u): O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $Df(\cdot, v): O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ a
(ii) $D^2 f(\cdot; u, v): O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $D^2 f(\cdot; v, u): O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ existujú a sú spojité v bode a .
Potom $D^2 f(a; u, v) = D^2 f(a; v, u)$.

2.3 Diferencovateľnosť funkcie z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$

TODO Definícia

Veta o implicitnej funkcii je tu v znení z [Ď] aj z [BR], takže si môžete vybrať.

Veta 11 (o implicitnej funkcii). *Nech $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$, $O(x_0)$, $O(y_0)$ sú ich okolia. Nech pre $i = 1, \dots, k$ zobrazenia $F_i: O(x_0) \times O(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajú nasledovné podmienky:*

- (i) sú spojité v bode (x_0, y_0) ;
(ii) $F_i(x_0, y_0) = 0$;
(iii) majú spojité parciálne derivácie $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ pre $i, j = 1, \dots, k$ v bode (x_0, y_0) ;
(iv) jakobián $\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(y_1, \dots, y_k)}(x_0, y_0) \neq 0$

Potom existujú čísla $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ tak, že

- (i) pre každé $x \in K(x_0, \delta) \subset O(x_0)$ existuje práve jedno $f(x) \in K(y_0, \varepsilon) \subset O(y_0)$, pričom $F_i(x, f(x)) = 0$; (K označuje viacrozmernú kocku)
(ii) $f(x_0) = y_0$;
(iii) zobrazenie $f: K(x_0, \delta) \rightarrow K(y_0, \varepsilon)$ je spojité v bode x_0 .

Ak naviac predpokladáme, že v okolí $O(x_0) \times O(y_0)$ existujú a sú spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_s}$, tak existujú a sú spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial x_s}$ na $K(x_0, \delta)$. (f_i sú zložky f .) Hodnoty týchto derivácií dostaneme ako riešenie sústavy (ktorú získame formálnym derivovaním a ktorú sa mi nechce opisovať).

Veta 12. *Nech X, Y, Z sú Banachove priestory, $U \subset X$, $V \subset Y$ sú otvorené, $F: U \times V \rightarrow Z$ je C^r , $0 < r \leq \infty$, $(x_0, y_0) \in U \times V$, $F(x_0, y_0) = 0$. Predpokladajme, že $D_y F(x_0, y_0)$ má spojité inverzný operátor. Potom existuje okolie $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ bodu (x_0, y_0) a funkcia $f \in C^r(U_1, V_1)$ taká, že $f(x_0) = y_0$ a že $F(x, y) = 0$ pre $(x, y) \in U_1 \times V_1$ platí práve vtedy, ak $y = f(x)$. Ďalej platí*

$$Df(x_0) = -[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} D_x F(x_0, y_0).$$

2.4 Taylorov vzorec

V jednorozmERE:

Veta 13.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Nech $f, g: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, f je n -krát diferencovateľná v $O(a)$ a v každom bode $x \in O(a)$ má $(n+1)$ -vú deriváciu. Nech g je v $O(a)$ spojitá a má pre $x \in O(a)$, $x \neq a$ deriváciu $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $\theta \in (0, 1)$ také, že pre $x \in O(a)$ platí

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^n}{n!} \frac{g(x) - g(a)}{g'(a + \theta(x-a))} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

Lagrangeov tvar zvyšku ($g(t) = (t - a)^{n+1}$):

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{(n + 1)!} (x - a)^{(n+1)}$$

Cauchyho tvar zvyšku ($g(t) = t$):

$$R_n = \frac{(1 - \theta)^n}{n!} (x - a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))$$

Veta 14. *Nech funkcia f má v bode a konečnú deriváciu n -tého rádu a nech $Q_n(x)$ je polynóm stupňa menšieho alebo rovného n , pričom $Q_n(x) \neq T_n(x)$, kde $T_n(x)$ je Taylorov polynóm f v bode a . Potom existuje okolie $O(a)$ bodu a také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ je $|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)|$.*

Táto veta hovorí, že $T_n(x)$ je lokálne najlepšia aproximácia f v okolí a pomocou polynómu n -tého stupňa.

Vo viacrozmere: (predpokladáme, že f je $(k + 1)$ -krát F-diferencovateľná)

$$T_k(f, a) = f(a) + df(a; x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a; x - a) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(a; x - a)$$

$$f(x) = T_k(f, a)(x) + \frac{1}{(k + 1)!} d^{k+1} f(a + \theta(x - a), x - a)$$

V*? Prečo nestačí G-diferencovateľnosť.

2.5 Extrémy funkcií

Extrémy funkcií jednej premennej

Veta 15. *Nech x_0 je bod lokálneho extrému funkcie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom buď $f'(x_0)$ neexistuje, alebo $f'(x_0) = 0$.*

Veta 16. *Nech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ a vo vnútornom bode $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Potom f má v bode x_0 lokálny extrém, ak $f''(x_0) < 0$ tak je to ostré lokálne maximum, ak $f''(x_0) > 0$ tak je to ostré lokálne minimum.*

Veta 17. *Nech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovuje vo vnútornom bode $x_0 \in I$ podmienkam:*

$$(i) \quad f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$(ii) \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Potom pri párnom n má f lokálny extrém v x_0 (maximum, ak $f^{(n)}(x_0) < 0$ a minimum, ak $f^{(n)}(x_0) > 0$) a pri nepárnom n funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém.

Lokálne extrémy funkcie viac premenných

Veta 18 (Eulerova nutná podmienka lokálneho extrému). *Nech $M \subset \mathbb{R}^m$ a platí:*

$$(i) \quad f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ má v bode } a \in M \text{ lokálny extrém, } a \in \text{Int } M$$

$$(ii) \quad \text{existuje } Df(a, u) \text{ v smere } u \in \mathbb{R}^m.$$

Potom $Df(a, u) = 0$.

Veta 19 (Lagrangeova postačujúca podmienka lokálneho extrém). *Nech $O(a) \subset \mathbb{R}^m$ a platí*

- (i) $a \in \mathbb{R}^m$ je stacionárny bod $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$, t.j. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ pre $i = 1, \dots, m$,
- (ii) f je 2-krát F -diferencovateľná v a a zobrazenie $x \mapsto d^2f(x, v)$ je spojité v a a definované v $O(a)$ pre všetky $v \in \mathbb{R}^m$.

Potom: Ak $d^2f(a, v) > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ (2.diferenciál je kladne definitný), tak f má v a lokálne minimum. Ak $d^2f(a, v) < 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ (2.diferenciál je záporne definitný), tak f má v a lokálne maximum. Ak existujú $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ tak že $d^2f(a, v_1) \cdot d^2f(a, v_2) < 0$ (2.diferenciál je indefinitný), tak a nie je bod lokálneho extrém.

Viazané extrém funkcie viac premenných

Veta 20 (Lagrangeove multiplikátory). *Nech je daný bod $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0k}) \in \mathbb{R}^k$, $O(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $O(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ a $f: O(x_0) \times O(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Nech sú dané väzby $g_i(x, y) = 0$, $g_i: O(x_0) \times O(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ a platí:*

- (i) f , g_i aj všetky ich parciálne derivácie 1. rádu v $O(x_0) \times O(y_0)$ sú spojité ($f, g_i \in C^1(O(x_0) \times O(y_0))$).
- (ii) $\frac{D(g_1, \dots, g_k)}{D(y_1, \dots, y_k)}(x_0, y_0) \neq 0$
- (iii) f má v bode (x_0, y_0) lokálny extrém vzhľadom na väzbu $M = \{(x, y) \in O(x_0) \times O(y_0); g_i(x, y) = 0 \text{ pre } i = 1, \dots, k\}$.

Potom existujú reálne čísla $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ určené jednoznačne také, že bod (x_0, y_0) je stacionárny bod Lagrangeovej funkcie $L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k: O(x_0) \times O(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

TODO ? Zovšeobecnenia z NADT a variačných metód ?

A teraz ideme tú vetu pochopiteľne dokázať.
Vencko

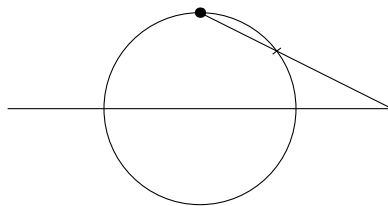
3 Komplexná analýza

Derivácia komplexnej funkcie, Cauchy-Riemannove rovnosti. Cauchyho integrálny vzorec, rozvoj analytickej funkcie do Taylorovho radu. Laurentov rad, klasifikácia izolovaných singulárnych bodov.

3.1 Topológia komplexnej roviny

Na množine $\mathbb{C}$ máme metriku $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, t.j. $C \cong \mathbb{R}^2$, je to separabilný lokálne kompaktný priestor.

Na množinu $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ môžeme preniesť metriku z gule pomocou stereografickej projekcie.



Získame tak separabilný kompaktný metrický priestor, niekedy sa nazýva uzavretá rovina. Na $\mathbb{C}$ sú obe metriky ekvivalentné.

Prstencové okolie: $\rho_\varepsilon(z) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \varepsilon\}$

$\rho_\varepsilon(\infty) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| > \frac{1}{\varepsilon}\}$

3.2 Derivácia funkcie komplexnej premennej, Cauchy-Riemannove rovnosti

Definícia 1. Nech f je definovaná v okolí bodu $z_0 \in D$. Deriváciou funkcie f v bode z_0 sa nazýva limita $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, ak táto limita existuje. f sa nazýva *diferencovateľná* v z_0 , ak existuje konečná derivácia $f'(z_0)$.

Tvrdenie 1.

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Tvrdenie 2. $F(z) = \varphi(f(z)) \Rightarrow F'(z_0) = \varphi'(f(z_0))f'(z_0)$.

Veta 1 (Cauchy-Riemannove vzorce). Nech f je komplexná funkcia, u a v sú jej reálna a imaginárna časť ($f = u + iv$). Potom f je diferencovateľná v z_0 práve vtedy, keď jej reálna a imaginárna časť sú diferencovateľné v $z_0 = (x_0, y_0)$ a $u'_x = v'_y|_{(x_0, y_0)}$, $u'_y = -v'_x|_{(x_0, y_0)}$.

Vtedy platí $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - iv'_y(x_0, y_0)$.

C-R vzorce v polárnych súradniciach: Označme $U(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $V(r, \varphi) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Potom $rU'_r = V'_\varphi$ a $rV'_r = -U'_\varphi$.

Definícia 2. f sa nazýva *regulárna (holomorfná)* v z_0 , ak je diferencovateľná v nejakom okolí bodu z_0 .

f sa nazýva *regulárna (holomorfná)* v oblasti D , ak je holomorfná v každom bode tejto oblasti.

Ak u, v sú reálna a imaginárna časť regulárnej funkcie f (v bode z_0 /v oblasti D), nazývame ich *harmonicky združenými* funkciami. Platí $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$, čiže u je harmonická. Podobne sa dá ukázať, že v je harmonická funkcia. Ak máme dané u, v sa dá určiť až na konštantu z CR vzorcov.

3.3 Cesty a krivky

Definícia 3. Cesta je ľubovoľné spojité zobrazenie $\gamma: \langle a, b \rangle \rightarrow \overline{C}$, $\gamma(0)$ je začiatok cesty, $\gamma(1)$ je koniec cesty. Cesta je *uzavretá*, ak $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definícia 4. Cesty $\gamma_1: \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a $\gamma_2: \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ sú ekvivalentné ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), ak existuje spojitá rastúca funkcia $\tau: \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \rightarrow \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ taká, že $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$.

Krivka je trieda ekvivalencie ciest vzhľadom na túto reláciu.

Jordanova krivka - taká, že γ je jednoznačné (prosté).

Uzavretá Jordanova krivka - γ je prosté s výnimkou krajných bodov.

Cesta γ je *spojite diferencovateľná cesta*, ak pre každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ existuje $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Spojite diferencovateľná cesta sa nazýva *hladká*, ak pre každé t je $\gamma'(t) \neq 0$.

Po častiach *hladká* - spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ sa dá rozdeliť na konečný počet intervalov tak, že na každom z nich je cesta hladká.

3.4 Integrál funkcie komplexnej premennej

Definícia 5. Ak γ je po častiach hladká cesta a $f \circ \gamma$ je spojitá, tak definujeme

$$\int_{\gamma} f dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Mohli by sme definovať $\int$ pomocou čiastočných súčtov pre ľubovoľné (rektifikovateľné ¹) krivky, z tejto definície sa dá pre hladké cesty odvodiť uvedený vzťah.

Tvrdenie 3. Ak $f = u + iv$, tak $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx)$.

3.5 Cauchyho integrálny vzorec

Veta 2 (Cauchyho integrálna veta). Ak f je holomorfná v oblasti D a γ_0, γ_1 sú homotopické cesty v D , potom $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$.

Dôsledok 1. $f \in H(D) \Rightarrow \int_{\gamma} f dz = 0$ pre každú krivku γ homotopickú 0 v D .

Definícia 6. Oblasť D sa nazýva jednoducho súvislá, ak ∂D je súvislá.

Dôsledok 2. Ak $f \in H(D)$ a D je jednoducho súvislá oblasť, tak $\oint_{\gamma} f dz = 0$.

Veta 3 (Cauchyho integrálny vzorec). Nech $f \in H(D)$ (f je holomorfná v oblasti D) a $\overline{G} \subset D$, ∂G pozostáva z konečného počtu spojitých kriviek a je orientovaná kladne. Potom pre každé $z_0 \in G$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

3.6 Taylorov rad

Veta 4 (Taylorova). Ak $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, tak v $U = \{z : |z - z_0| < R\} \subset D$ platí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, kde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $\gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$, $\rho < R$.

Veta 5 (Cauchyho nerovnosti). Nech $f \in H(D)$, $\overline{U} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$, $\gamma_r = \partial U$. Nech f je na γ_r ohraničená, $|f| \leq M$. Potom $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

¹Rektifikovateľná krivka je krivka, ktorá má konečnú dĺžku.

Veta 6 (Liouville). Ak f je holomorfná v $\mathbb{C}$ a je tam ohraničená, f je konštantná.

Veta 7. Ak $f \in H(D)$, tak má v D derivácie všetkých rádov a $f^{(n)} \in H(D)$.

Veta 8. $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Dôsledok 3. $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

Veta 9 (o holomorfnosti súčtu). $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je holomorfná v kruhu konvergenzie.

Veta 10. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) f je holomorfná v z_0 . (V^* ? Nemalo by tu byť, že v nejakom okolí z_0 ?)

(ii) $f \in C_{U(z_0)}$, $\int_{\partial \Delta} f dz = 0$ pre každý trojuholník taký, že $\overline{\Delta} \subset U$.

(iii) f sa dá rozložiť v nejakom okolí z_0 do Taylorovho radu.

Definícia 7. Nulovým bodom funkcie f nazývame $a \in \mathbb{C}$, $f(a) = 0$.

Veta 11. Ak a je nulový bod funkcie f , $f \in H(D)$, $f \not\equiv 0$ v žiadnom okolí bodu a , tak existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, $\varphi \in H(U)$ a $\varphi \neq 0$ v nejakom okolí bodu a (t.j. existuje také okolie V bodu a , že $\varphi(z) \neq 0$ pre $\forall y \in V$).

Veta 12 (o jednoznačnosti). Nech D je súvislá oblasť a $f_1, f_2 \in H(D)$, $f_1(z) = f_2(z)$ pre všetky $z \in E \subset D$ a E má v D hromadný bod. Potom $f_1 = f_2$ pre všetky $z \in D$.

Definícia 8. Rádom nulového bodu funkcie f nazývame rád najnižšej derivácie f , ktorej hodnota v bode a je nenulová.

Veta 13. Rád nulového bodu a funkcie f je maximálne n také, že $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ je po dodefinovaní v a holomorfnou funkciou.

3.7 Laurentove rady, klasifikácia izolovaných singulárnych bodov

Veta 14. Nech $f \in H(V)$, kde $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ je medzikružie. Potom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$ pre $n \in \mathbb{Z}$, kde γ je kružnica so stredom a a polomerom ρ , $r < \rho < R$.

Veta 15 (o jednoznačnosti rozvoja do Laurentovho radu). Ak f možno rozvinúť do Laurentovho radu, tak $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$.

Veta 16 (Cauchyho nerovnosti). $|c_n| < \frac{M}{\rho^n}$, ak $f(\xi) \leq M$ na γ_ρ .

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \dots$ regulárna časť Laurentovho radu
 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n \dots$ hlavná časť Laurentovho radu

Definícia 9. $a \in \mathbb{C}$ sa nazýva *izolovaný singulárny bod* funkcie f , ak f v bode a nie je regulárna a existuje prstencové okolie bodu a , v ktorom je holomorfná (regulárna).

Izolovaný singulárny bod sa nazýva *odstrániteľný*, ak existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$.

Izolovaný singulárny bod sa nazýva *pól*, ak $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Izolovaný singulárny bod sa nazýva *podstatný* inak (teda ak nie je odstrániteľný ani pól).

Veta 17. *Izolovaný singulárny bod* $a \in \mathbb{C}$ funkcie f je odstrániteľný $\Leftrightarrow$ Laurentov rozvoj f v $P(a)$ neobsahuje hlavnú časť $\Leftrightarrow |f| < M \in \mathbb{R}$ v nejakom $P(a)$.

Veta 18. *Izolovaný singulárny bod* $a \in \mathbb{C}$ funkcie f je pól $\Leftrightarrow$ Laurentov rozvoj f v $P(a)$ obsahuje (nenulový) konečný počet nenulových členov v hlavnej časti, t.j. $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $N \in \mathbb{N}$.

Veta 19. Bod a je pólom funkcie $f \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{f}$, $\varphi \not\equiv 0$ je holomorfná v nejakom okolí a a a je nulový bod φ .

Definícia 10. Násobnosť pólu = násobnosť a ako nulového bodu φ .

Veta 20 (Sochockij-Weierstrass). Ak a je podstatný singulárny bod, tak pre $\forall A \in \mathbb{C}$ existuje $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taká, že $z_n \rightarrow a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Definícia 11. Nech $a \in \mathbb{C}$, $f \in H(P(a))$. Rezíduom funkcie f v bode a nazývame $\text{res}_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f dz$, $\gamma_r \subset P(a)$.

Veta 21 (Cauchyho veta o rezíduách). Nech $f \in H(D)$ okrem izolovanej množiny singulárnych bodov, $\overline{G} \subset D$, ∂G neprechádza singulárnymi bodmi f . Potom $\int_{\partial G} f dz = 2\pi i \sum_{a_i \in G} \text{res}_{a_i}$ (súčet cez všetky singulárne body a_i ležiace v G).

Veta 22. $\text{res}_a f = C_{-1}$

Dôsledok 4. Ak a je odstrániteľný singulárny bod funkcie f , tak $\text{res}_a f = 0$.

Dôsledok 5. Ak a je jednoduchý pól, tak $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = C_{-1}$.

Ak a je pól násobnosti n , tak $C_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$.

Definícia 12.

$$\text{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f dz$$

$$\text{res}_{\infty} f = -C_{-1}$$

Veta 23. Ak f je holomorfná v $\mathbb{C}$ okrem konečného počtu singulárnych bodov, tak $\sum_{i=1}^k \text{res}_{a_i} f + \text{res}_{\infty} f = 0$.

Veta 24 (princíp maxima modulu). Ak $f(z) \not\equiv C$, $f \in H(D)$ (D je oblasť), tak $|f(z)|$ nenadobúda vo vnútri D maximum.

Definícia 13. Hovoríme, že funkcia f je *meromorfná* v oblasti D , ak nemá v D iné singulárne body ako póly a odstrániteľné singulárne body.

Veta 25 (princíp argumentu). *Nech f je meromorfná v D , G je oblasť, $\overline{G} \subset D$, ∂G neprechádza nulovými bodmi ani pólmi funkcie f . Potom $N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, kde N je počet nulových bodov a P je počet pólů funkcie f v oblasti G , pričom nulové body aj póly počítame vrátane násobnosti.*

No, je to očividné, že?
Valášek

4 Postupnosti a rady funkcií

Postupnosti a rady funkcií. Bodová a rovnomerná konvergencia, mocninové rady, polomer resp. kruh konvergencie, derivovanie a integrovanie funkcionálnych postupností a radov. Taylorov rad. Fourierov trigonometrický rad, postačujúce podmienky pre bodovú a rovnomernú konvergenciu.

4.1 Kritériá konvergencie pre číselné rady

Možno nezaškodí zopakovať si aj kritériá konvergencie pre číselné rady:

Veta 1 (1. porovnávacie kritérium). *Majme rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Veta 2 (2. porovnávacie kritérium). *Majme rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n, b_n > 0$. Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverguje pre } 0 < p \leq 1.$$

Veta 3 (Cauchy). *Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, označme $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potom*

(i) *ak $\alpha < 1$, rad konverguje,*

(ii) *ak $\alpha > 1$, rad diverguje,*

(iii) *existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $\alpha = 1$.*

Veta 4 (D'Alembert). *Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$.*

(i) *Ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tak rad konverguje.*

(ii) *Ak pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad diverguje.*

(iii) *Existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.*

Veta 5 (Raabe). *Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$.*

(i) Ak existuje $r > 1$ také, že pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r$, tak rad konverguje.

(ii) Ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, tak rad diverguje.

Veta 6 (integrálne kritérium). Nech $f: \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná, spojitá, nerastúca a $F(x)$ je k nej primitívna funkcia na $\langle 1, \infty \rangle$. Nech $f(n) = a_n$. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x)$ je konečná, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ak je rovná $+\infty$, tak tento rad diverguje.

4.2 Bodová a rovnomerná konvergencia

Nech X a Y sú metrické priestory a $f: M \subset X \rightarrow Y$ je zobrazenie.

Definícia 1. Hovoríme, že postupnosť $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (bodovo) konverguje na M k funkcii f , ak $\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in M$, alebo $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x)$.

Definícia 2. Hovoríme, že postupnosť $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ rovnomerne konverguje na M k funkcii f , ak $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in M d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ rovnomerne vzhľadom k M , alebo $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x)$.

Rovnomernú a bodovú konvergenciu funkcionálnych radov definujeme ako konvergenciu postupnosti čiastočných súčtov príslušného typu. (Okrem Diniho vety a suprémového kritéria sú tu všetky ostatné vety uvedené pre $\mathbb{R}$.)

Veta 7 (suprémové kritérium).

$$f_n(x) \xrightarrow{M} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} d(f_n(x), f(x)) = 0$$

Veta 8 (Cauchy-Bolzanov princíp).

(i) $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p, q > n_0 |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \xrightarrow{M} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall m \in \mathbb{N} |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$

Veta 9 (Weierstrass). Ak $|u_n(x)| \leq A_n$ a $\sum A_n \rightarrow$, tak $\sum u_n(x) \Rightarrow$.

Veta 10 (Diniho). Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť spojitých funkcií $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde M je kompaktná podmnožina metrického priestoru X a f_n bodovo konverguje k spojitkej funkcii f . Potom f_n konverguje rovnomerne k f .

Lema 1 (Abelova lema, Abelova parciálna sumácia). Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$) a nech $|b_1 + \dots + b_i| \leq B$ pre $i = 1, \dots, n$. Potom $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

Veta 11 (Dirichlet). Majme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x), x \in M$. Nech

- (i) $\forall x \in M$ postupnosť $\{a_n(x)\}$ je neklesajúca (nerastúca) a $a_n(x) \rightrightarrows$,
(ii) $\exists B > 0 \forall x \in M \forall n \in \mathbb{N} |B_n(x)| \leq B$, pričom $B_n(x) = |b_1(x) + \dots + b_n(x)|$ (tzv. rovnomerná ohraničenosť).

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{M}$.

Veta 12 (Abel). Majme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$, $x \in M$. Nech

- (i) $\forall x \in M$ postupnosť $\{a_n(x)\}$ je neklesajúca (nerastúca) a $\exists A > 0 \forall x \in M \forall n \in \mathbb{N} |a_n(x)| \leq A$,

- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \xrightarrow{M}$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{M}$.

Veta 13. Majme postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in M$, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M . Nech existuje konečná $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) =: A_n$ pre $n \in \mathbb{N}$ a nech $f_n(x) \xrightarrow{M}$. Potom existuje konečná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n =: A$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (t.j. $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$).

Veta 14. Majme postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in I$, kde I je interval, nech $f_n(x)$ sú spojité na I pre $n \in \mathbb{N}$ a $f_n(x) \xrightarrow{I} f(x)$. Potom $f(x)$ je na I spojitá.

Dôsledok 1. Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$, I je interval, nech $u_n(x)$ sú na I spojité pre $n \in \mathbb{N}$ a nech $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{I} s(x)$. Potom $s(x)$ je spojitá na I .

Veta 15. Majme postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \langle a, b \rangle$. Nech pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) \in R(\langle a, b \rangle)$ (f_n je riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b \rangle$) a nech $f_n(x) \xrightarrow{\langle a, b \rangle} f(x)$. Potom $f(x) \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Dôsledok 2. Platí to aj pre rady.

Veta 16. Majme postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \langle a, b \rangle$. Nech

- (i) existuje $x_0 \in \langle a, b \rangle$ také, že číselná postupnosť $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ konverguje,

- (ii) pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x)$ diferencovateľné na $\langle a, b \rangle$ a $f'_n(x) \xrightarrow{\langle a, b \rangle}$.

Potom $f_n(x) \xrightarrow{\langle a, b \rangle} f(x)$, pričom $f(x)$ je diferencovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Dôsledok 3. Pre rady.

4.3 Mocninové rady

Definícia 3. Mocninovým (potenčným) radom so stredom v bode $a \in \mathbb{R}$ nazývame rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ sú koeficienty potenčného radu.

Veta 17. Majme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

- (i) Nech existuje $x_0 \neq 0$, v ktorom tento rad konverguje. Potom absolútne konverguje pre $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.
- (ii) Nech existuje $x_1 \in \mathbb{R}$, v ktorom tento rad diverguje alebo relatívne konverguje. Potom diverguje pre všetky $x \in (-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$.

Veta 18. Majme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, nech existuje $x_0 \neq 0$, v ktorom tento rad konverguje. Potom existuje jediné R také, že $0 < R \leq \infty$ a pre $x \in (-R, R)$ daný rad konverguje a (v prípade $R < \infty$) pre $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ diverguje.

Definícia 4. Bod R , o existencii a jednoznačnosti ktorého hovorí predchádzajúca veta, sa nazýva *polomer konvergenzie* radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a interval $(-R, R)$ sa nazýva *interval konvergenzie*.

Veta 19 (Cauchy-Hadamard). Majme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, označme $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Potom

- (i) ak $0 < \lambda < \infty$, tak $R = \frac{1}{\lambda}$,
- (ii) ak $\lambda = 0$, tak $R = \infty$,
- (iii) ak $\lambda = \infty$, tak $R = 0$.

Veta 20. Nech $0 < R \leq \infty$ je polomer konvergenzie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, označme $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ pre $x \in (-R, R)$. Potom

- (i) pre každé $\langle a, b \rangle \subset (-R, R)$ rad na $\langle a, b \rangle$ rovnomerne konverguje,
- (ii) f je na $(-R, R)$ spojitá,
- (iii) f je na $(-R, R)$ diferencovateľná a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,
- (iv) pre každé $x \in (-R, R)$ $f \in R(\langle 0, x \rangle)$ a platí $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Veta 21 (Leja). Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ má polomer konvergenzie R , $0 < R < \infty$, nech v bode R (resp. $-R$) konverguje. Potom rovnomerne konverguje na $\langle 0, R \rangle$ (resp. $\langle -R, 0 \rangle$).

Definícia 5. Nech $f: O(a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$) je v bode a nekonečne diferencovateľná (teda existuje konečná derivácia v bode a ľubovoľného rádu). Taylorovým radom nazývame rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (1)$$

Veta 22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(x)$, $x \in I \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, a) = 0$.

Veta 23. Majme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n =: f(x)$, $x \in I$. Potom tento rad je Taylorovým radom f v bode a ($a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$).

Veta 24. Ak $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je rozvinuteľná do potenčného radu, tak jej rozvoj je jednoznačný.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1) \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \end{aligned}$$

4.4 Fourierove rady

$P_{\langle a, b \rangle}$ = priestor po častiach spojitých funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$

Na $P_{\langle a, b \rangle}$ definujeme skalárny súčin ako $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Tento skalárny súčin definuje metriku $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$, ktorá sa tiež niekedy nazýva stredná kvadratická odchýlka funkcií f a g . Ak postupnosť funkcií konverguje k nejakej funkcii podľa tejto metriky, tak hovoríme, že táto postupnosť konverguje v strede. Konvergencia v strede vyplýva z rovnomernej konvergenzie a z konvergenzie v strede zasa vyplýva, že uvedenú postupnosť možno integrovať člen po člene.

Definícia 6. Ak $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormálna postupnosť funkcií z $P_{\langle a, b \rangle}$ a $f \in P_{\langle a, b \rangle}$, tak čísla (f, φ_i) nazývame *Fourierove koeficienty* funkcie f a rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_i \varphi_i$, kde $c_i = (f, \varphi_i)$ sa nazýva *Fourierov rad* funkcie f podľa systému (φ_n) .

Definícia 7. Fourierov rad podľa ortonormálneho systému funkcií $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ sa nazýva *trigonometrický Fourierov rad*. Ak ho vyjadríme s pomocou kosínov a sínov (teda bez normovania), tak dostaneme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde koeficienty sú

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx,$$

pre $n = 1, 2, \dots$ a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x).$$

Veta 25. Zo všetkých súčtov $\delta_n = \sum_{k=1}^n d_k \varphi_k$ najmenšiu strednú kvadratickú odchýlku od f má n -tý čiastočný súčet s_n Fourierovho radu.

Dôsledok 4. Pre každý ortonormálny systém (φ_k) a každú funkciu $f \in P_{\langle a, b \rangle}$ platí

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

(c_k sú Fourierove koeficienty.)

Dôsledok 5. Ak trigonometrický rad konverguje v strede k nejakej funkcii, tak jeho koeficienty sú práve Fourierove koeficienty tejto funkcie.

Veta 26 (Besselova nerovnosť). Pre každý ortonormálny systém (φ_k) a každú funkciu f platí nerovnosť

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Dôsledok 6. Pre trigonometrický Fourierov rad má Besselova nerovnosť tvar

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f^2(x) dx$$

.

Dôsledok 7. Pre Fourierove koeficienty po častiach spojitej funkcie f platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Definícia 8. Ortonormálny systém (φ_k) sa nazýva *uzavretý*, ak Fourierov rad každej funkcie $f \in P_{\langle a, b \rangle}$ podľa tohto systému konverguje k nej v strede.

Veta 27 (Parsevalova rovnosť). Pre každú funkciu $f \in P_{\langle a, b \rangle}$ a každý uzavretý ortonormálny systém (φ_k) platí rovnosť

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2.$$

Definícia 9. Hovoríme, že ortonormálny systém je *úplný*, ak okrem nulovej funkcie neexistuje v $P_{\langle a, b \rangle}$ žiaden iný prvok ortogonálny ku všetkým prvkom systému.

Veta 28. Každý uzavretý ortonormálny systém je úplný.

Veta 29. Dve rôzne funkcie $f, g \in P_{\langle a, b \rangle}$ majú rôzne Fourierove rady podľa každého úplného (a tým skôr aj podľa každého uzavretého) ortonormálneho systému.

Veta 30 (O rovnomernej konvergencii). Ak v uzavretom ortonormálnom systéme Fourierov rad funkcie f rovnomerne konverguje na $\langle a, b \rangle$, tak jeho súčet sa rovná danej funkcii (až na konečný počet bodov).

Veta 31. Trigonometrický rad danej funkcie $f \in P_{\langle 0, 2\pi \rangle}$ má na každom intervale dĺžky 2π ten istý tvar. Ak f je párna funkcia, tak $b_n = 0$ (koeficienty pri sínusových členoch sú nulové), ak f je nepárna funkcia, tak $a_n = 0$ (koeficienty pri kosínusových členoch sú nulové). Trigonometrický rad párnej funkcie sa nazýva kosínusový rad, trigonometrický rad nepárnej funkcie sa nazýva sínusový rad.

Veta 32. Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ a má na $\langle -\pi, \pi \rangle$ po častiach spojitú deriváciu a platí $f(\pi) = f(-\pi)$, tak trigonometrický rad funkcie f konverguje rovnomerne na intervale $(-\infty, \infty)$.

Veta 33. Nech funkcia f a všetky jej derivácie až do rádu k (vrátane) sú spojité a spĺňajú podmienky $f(\pi) = f(-\pi)$, $f'(\pi) = f'(-\pi)$, $\dots$ $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi)$. Nech má funkcia na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ po častiach spojitú deriváciu $(k+1)$ -vého rádu. Potom možno trigonometrický rad funkcie f k -krát derivovať člen po člene.

Veta 34. Nech f je periodická funkcia s periódou 2π , ktorá je po častiach spojitá na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$. Potom n -tý čiastočný súčet jej Fourierovho radu možno vyjadriť v tvare

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

Dôsledok 8. Ak $f(x) \equiv 1$, tak aj $s_n(x) \equiv 1$, a teda

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz = 1$$

pre $n = 1, 2, \dots$

Veta 35 (O bodovej konvergencii Fourierovho radu). Ak sú funkcia f aj jej derivácia po častiach spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, tak Fourierov rad funkcie f bodovo konverguje k jej normalizovanému (spriemerovanému) periodickému predĺženiu v každom bode $x \in \mathbb{R}$.

Lema 2. Ak $g(x)$ je po častiach spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin ntdt = 0$$

a tiež

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos ntdt = 0.$$

Veta 36 (Diniho veta). Fourierov rad funkcie $f \in P_{\langle -\pi, \pi \rangle}$ konverguje v bode x k jej normalizovanému periodickému predĺženiu, tak existuje také číslo $\delta > 0$, že integrál

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(z)|}{z} dz$$

konverguje. ($\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2\tilde{f}(x)$, kde $\tilde{f}$ je normalizované periodické predĺženie f .)

Veta 37 (Fejérová veta). Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ a platí $f(-\pi) = f(\pi)$, tak postupnosť $\sigma_n(x, f)$, kde

$$\sigma_n(x, f) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}$$

rovnomerne konverguje na celom $\mathbb{R}$ k periodickému predĺženiu funkcie $f(x)$.

Veta 38 (Weierstrassova). Každú funkciu $f(x)$ spojitú na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ s vlastnosťou $f(-\pi) = f(\pi)$ možno na tomto intervale s ľubovoľnou presnosťou aproximovať trigonometrickými polynómami.

Veta 39. Trigonometrický systém funkcií je uzavretý. To znamená, že pre každú funkciu $f \in P_{\langle -\pi, \pi \rangle}$ a pre každé číslo $\varepsilon > 0$ stredná kvadratická odchýlka n -tého čiastočného súčtu jej Fourierovho radu podľa trigonometrického systému je pre všetky dostatočne veľké n menšia ako ε ($\|f - s_n\| < \varepsilon$).

Fourierove rady som písal podľa [BS].

Napísal som to veľmi zložito, pretože o tom nič neviem.

Laub

5 Riemannov integrál

Riemannov integrál jednej a viacerých premenných a jeho základné vlastnosti. Nutné a postačujúce podmienky integrovateľnosti, množiny integrovateľných funkcií. Metódy výpočtu (Fubiniho veta, veta o transformácii.)

5.1 Definícia Riemannovho integrálu v $\mathbb{R}$

O funkcii $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ predpokladáme, že je ohraničená.

Definícia 1. Delením intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumieme každú konečnú množinu bodov $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$.

Delenie D_1 sa nazýva zjemnením delenia D_0 , ak $D_0 \subset D_1$.

Označujeme $d_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Norma delenia D $n(D) := \max\{\Delta x_i : i = 1, \dots, n\}$.

Horným (dolným) R -integrálnym súčtom rozumieme číslo $U(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ ($L(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$), pričom $M_i = \sup_{x \in d_i} f(x)$ ($m_i = \inf_{x \in d_i} f(x)$).

R -integrálnym súčtom rozumieme číslo $S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$, kde $t_i \in d_i$ je ľubovoľný bod intervalu d_i .

Tvrdenie 1. Množiny $\{L(f, D)\}_D$ a $\{U(f, D)\}_D$ sú ohraničené.

Tvrdenie 2. Ak D_0 je zjemnením D_1 , tak $L(f, D_1) \leq L(f, D_0)$ a $U(f, D_1) \geq U(f, D_0)$.

Tvrdenie 3. Ak D_1, D_2 sú ľubovoľné delenia intervalu $\langle a, b \rangle$, tak $L(f, D_1) \leq U(f, D_2)$.

Definícia 2 (R-integrálu). Horným Riemannovým integrálom z funkcie f na $\langle a, b \rangle$ rozumieme infimum horných integrálnych súčtov $U(f, D)$, označujeme $\int_a^b f(x) dx$.

Dolným Riemannovým integrálom z funkcie f na $\langle a, b \rangle$ rozumieme suprénum dolných integrálnych súčtov $L(f, D)$, označujeme $\int_a^b f(x)dx$.

Hovoríme, že $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je *integrovateľná v Riemannovom zmysle* (má R-integrál), ak $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Ich spoločnú hodnotu nazývame Riemannovým integrálom a označujeme $\int_a^b f(x)dx$.

Triedu R-integrovateľných funkcií označujeme $R(\langle a, b \rangle)$.

Tvrdenie 4.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

Tvrdenie 5. Funkcia $f \in R\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D_0 U(f, D_0) - L(f, D_0) < \varepsilon$.

Triedy integrovateľných funkcií

Tvrdenie 6. Ak $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, tak $f \in R(\langle a, b \rangle)$.

Definícia 3. Hovoríme, že množina $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ má *Jordanovu mieru 0*, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $d_1 \dots d_i$ takých, že

- (i) $\sum_{i=1}^n |d_i| < \varepsilon$
- (ii) $\forall x \in M \exists j \in \{1, \dots, k\}$ tak, že x je vnútorný bod d_k .

Tvrdenie 7. Nech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ s výnimkou bodov množiny $M \subset \langle a, b \rangle$. Nech M má Jordanovu mieru 0. Potom $f \in R(\langle a, b \rangle)$.

Tvrdenie 8. Ak $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je na $\langle a, b \rangle$ monotónna, tak $f \in R\langle a, b \rangle$.

Platí to aj pre funkcie s ohraničenou variáciou, pretože tieto možno napísať ako rozdiel dvoch neklesajúcich funkcií.

Základné vlastnosti R-integrálu

Veta 1. Ak $f \in R\langle a, b \rangle$ a $c \in \mathbb{R}$, tak $cf \in R\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Veta 2. Ak $f, g \in R\langle a, b \rangle$, tak $f + g \in R\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Veta 3. Nech $f, g \in R\langle a, b \rangle$ a nech pre $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Veta 4. Nech $f \in R\langle a, b \rangle$ a $|f(x)| \leq M$ na $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

Veta 5 (Aditívna vlastnosť integrálu). Nech funkcia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená, majme $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Potom $f \in R\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f \in R\langle a, c \rangle \wedge f \in R\langle c, b \rangle$. Navyše platí: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Veta 6. Nech $f \in R\langle a, b \rangle$, označme $m := \inf_{\langle a, b \rangle} f$, $M := \sup_{\langle a, b \rangle} f$. Nech $\varphi: \langle m, M \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je tam spojitá. Potom $\varphi(f(x)) \in R\langle a, b \rangle$.

Vo všeobecnosti neplatí, že ak dve funkcie sú Riemannovsky integrovateľné, tak aj ich zloženie bude Riemannovsky integrovateľné. (Podľa poznámok z prednášky. Presnejšie povedané, podľa poznámky prednášajúceho poznačenej v poznámkach z príslušnej prednášky.)

Veta 7. Nech $f, g \in R\langle a, b \rangle$. Potom

(i) $f \cdot g \in R\langle a, b \rangle$,

(ii) ak navyše $\inf g > 0$ (pre $g > 0$), alebo $\sup g < 0$ (pre $g < 0$), tak $\frac{f}{g} \in R\langle a, b \rangle$,

(iii) $|f| \in R\langle a, b \rangle$ a platí $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Integrál ako limita integrálnych súčtov

Definícia 4. Hovoríme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou množiny integrálnych súčtov $\{S(f, D)\}_D$ pre normu delenia idúcu k 0, označujeme $A = \lim_{n(D) \rightarrow 0} S(f, D)$, ak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall D)$ platí $n(D) < \delta \Rightarrow |S(f, D) - A| < \varepsilon$.

Vencko poznamenal, že definíciu limity postupnosti aj tejto limity spája Mooreova-Smithova definícia limity.

Veta 8. Ak $f \in R\langle a, b \rangle$, tak existuje $\lim_{n(D) \rightarrow 0} S(f, D)$ a platí $\lim_{n(D) \rightarrow 0} S(f, D) = \int_a^b f(x) dx$.

Naopak, ak existuje $\lim_{n(D) \rightarrow 0} S(f, D)$, tak $f \in R\langle a, b \rangle$ a platí $\lim_{n(D) \rightarrow 0} S(f, D) = \int_a^b f(x) dx$.

Definícia 5. Hovoríme, že postupnosť delení D_k intervalu $\langle a, b \rangle$ je normálna, ak $\lim_{k \rightarrow \infty} n(D_k) = 0$.

Veta 9. Ak $f \in R\langle a, b \rangle$, tak pre všetky normálne postupnosti $(D_k)_{k=1}^\infty$ platí: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, D_k)$.

Veta 10. Majme $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (ohraničené). Nech pre $x \in \langle a, b \rangle \setminus M$ $f(x) = g(x)$, pričom M je množina s Jordanovou mierou 0. Potom

(i) buď súčasne $f \in R\langle a, b \rangle$ aj $g \in R\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$,

(ii) alebo súčasne $f \notin R\langle a, b \rangle$ aj $g \notin R\langle a, b \rangle$.

Integrál ako funkcia hornej hranice

Veta 11. *Nech $f \in R\langle a, b \rangle$. Pre $x \in \langle a, b \rangle$ označme $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Potom*

(i) *F je na $\langle a, b \rangle$ spojitá,*

(ii) *navyše, ak je f v bode x_0 spojitá, tak F je v x_0 diferencovateľná a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Veta 12 (Leibnitz-Newtonov vzorec). *Nech $f \in R\langle a, b \rangle$, nech F je na $\langle a, b \rangle$ primitívna funkcia k f . Potom $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$.*

Ak funkcia f má primitívnu funkciu, hovoríme, že je integrovateľná v Newtonovom zmysle.

Vety o strednej hodnote

Veta 13 (1.Veta o strednej hodnote). *Nech $f, g \in \langle a, b \rangle$, nech pre $x \in \langle a, b \rangle$ je $g(x) \geq 0 (\leq 0)$. Označme $M = \sup_{\langle a, b \rangle} f$, $m = \inf_{\langle a, b \rangle} f$. Potom existuje $\lambda \in \langle m, M \rangle$ také, že $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda \int_a^b g(x)dx$.*

Dôsledok 1. *Ak $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $g \in R\langle a, b \rangle$, $g(x) \geq 0 (\leq 0)$, tak existuje $c \in \langle a, b \rangle$ $\int_a^b f g dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.*

Veta 14 (2.veta o strednej hodnote). *Nech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je tam monotónna, $g \in R\langle a, b \rangle$. Potom existuje $c \in R\langle a, b \rangle$ také, že $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$.*

Metódy výpočtu určitého integrálu

Veta 15 (per partes). *Nech $u, v: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sú tam spojitě diferencovateľné. Potom $\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.*

Veta 16 (substitučná metóda). *Nech f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, φ spojitě diferencovateľná na $\langle \alpha, \beta \rangle$, nech $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Potom*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

TODO Vencko spomenul, že tieto vety platia obecnějišie, možno to doplň.

5.2 Nevlastné jednorozmerné integrály

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$$

Ak existujú $\int_a^\infty f(x)dx$ aj $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, tak $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ definujeme ako ich súčet.

Tiež sa definujú nevlastné integrály pre neohraničené funkcie. Pre nevlastné integrály existujú rôzne kritériá konvergencie: Cauchy-Bolzanova podmienka, porovnávacie kritérium, Abelove a Dirichletove kritérium - pozri [BS] alebo [GĎ].

5.3 Riemannov integrál v $\mathbb{R}^n$

Integrál ohraničených funkcií s kompaktným nosičom

Ohraničené funkcie s kompaktným nosičom budeme značiť $B_0(\mathbb{R}^n)$.

Definícia 6. Nech pre každé $i = 1, \dots, n$ je daný konečný systém m_i nadrovín $\alpha_{ij} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i = a_{ij}\}$, kde $j = 1, \dots, m_i + 1$ a $a_{i1} < \dots < a_{im_i}$ sú reálne čísla. Zjednotenie týchto nadrovín nazývame *delenie* priestoru $\mathbb{R}^n$.

Definícia 7. Hovoríme, že n -rozmerný interval $I = J_1 \times \dots \times J_n$ je *polootvorený sprava*, ak každý z jednorozmerných intervalov J_i je polootvorený sprava.

Funkciu $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame *elementárna s-funkcia*, ak existuje delenie $D(\mathbb{R}^n)$ priestoru $\mathbb{R}^n$ také, že funkcia s je konštantná na každom intervale delenia $D(\mathbb{R}^n)$. Množinu všetkých elementárnych s-funkcií značíme $S_e(\mathbb{R}^n)$.

Definícia 8. Horný R^{bo} -integrál funkcie $f \in B_0(\mathbb{R}^n)$ je

$$(R^{bo}) \int_{\mathbb{R}^n} f dV := \inf \{ (L^s) \int_{\mathbb{R}^n} s dV \in \mathbb{R}; s \in S_e(\mathbb{R}^n), s \geq f \}.$$

Dolný R^{bo} -integrál funkcie $f \in B_0(\mathbb{R}^n)$ je

$$(R^{bo}) \int_{\mathbb{R}^n} f dV := \sup \{ (L^s) \int_{\mathbb{R}^n} r dV \in \mathbb{R}; r \in S_e(\mathbb{R}^n), r \leq f \}.$$

L^s v predchádzajúcej definícii znamená integrál zo schodovitej funkcie.

Definícia 9. Funkciu $f \in B_0(\mathbb{R}^n)$ nazývame *riemannovsky R^{bo} -integrovateľná* na $\mathbb{R}^n$, ak horný a dolný R^{bo} -integrál sú rovnaké. Spoločnú hodnotu oboch integrálov nazývame *Riemannov R^{bo} -integrál* a označujeme ho $(R^{bo}) \int_{\mathbb{R}^n} f dV$. Množinu všetkých R^{bo} -integrovateľných funkcií na $\mathbb{R}^n$ z $B_0(\mathbb{R}^n)$ značíme $R^{bo}(\mathbb{R}^n)$.

Riemannov integrál ohraničenej funkcie f na ohraničenej množine $A \subset \mathbb{R}^n$ sa definuje ako jej integrál cez celé $\mathbb{R}^n$ po dodefinovaní nulou mimo množiny A . Množinu riemannovsky integrovateľných funkcií na množine A značíme $R^b(A)$.

5.4 Metódy výpočtu viacrozmerných integrálov

Tieto vety sme mali formulované pre Lebesguove integrály.

Veta 17. Nech množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktná a funkcia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na A . Potom

$$(L^b) \int_A f(x) dV_n(x) = (L^b) \int_B \left\{ \int_{A(x')} f(x', x'') dV_{n-s}(x'') \right\} dV_s(x').$$

Definícia 10. Nech $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Zobrazenie $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa nazýva *regulárne*, ak

- (i) g je injektívne zobrazenie,
- (ii) $g \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$,
- (iii) Jacobiho determinant zobrazenia g v každom bode $t \in \Delta$ je rôzny od nuly.

Veta 18. *Nech $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ a $D \subset \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny a $g: \Delta \rightarrow D$ je surjektívne regulárne zobrazenie ($x = g(t)$). Ak funkcia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a množina $A \subset D$ je merateľná, potom platí*

$$(L^c) \int_A f(x) dV(x) = (L^c) \int_{g^{-1}(A)} f[g(t)] |Jg(t)| dV(t).$$

5.5 Pár poznámok

V skriptách [NV2] (tiež [ŠŠN, Veta 5.5.2]) je v dodatku táto pekná veta:

Veta 19. *Ohraničená funkcia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je R-integrovaťelná vtedy a len vtedy, ak množina jej bodov nespojitosti má Lebesguovu mieru 0.*

Ako príklad na dvojicu riemannovsky integrovateľných funkcií, ktorých zloženie nie je riemannovsky integrovateľné, môžeme použiť funkcie $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$, $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$ (táto sa tuším volá Riemannova funkcia) a $g: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $g(0) = 0$, $g(x) = 1$ pre $x \neq 0$. $g \circ f$ je Dirichletova funkcia. R-integrovaťelnosť funkcie f vyplýva z predchádzajúcej vety.

Veta 8 v [NV2] asi nie je dokazovaná dobre, správny dôkaz je v [JAR].

Čitateľ si iste rád premyslí platnosť nasledujúceho tvrdenia.
Neubrunn+Vencko

6 Parametrické integrály

Parametrické integrály, spojitost a derivácia integrálu závislého od parametra.

Veta 1. *Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná a $B \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a funkcia $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $A \times B$. Predpokladajme, že existuje majoranta $g \in L(A)$ taká, že $|f(x, t)| \leq g(x)$ pre všetky $x \in A$, $t \in B$. Potom funkcia $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ s hodnotami*

$$h(t) := (L) \int_A f(x, t) dV_n(x)$$

je spojitá na B .

Veta 2. *Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná a $B \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina. Nech funkcia $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ je spolu s parciálnymi deriváciami $\partial f / \partial t_j$, $j = 1, \dots, m$ ($t = (t_1, \dots, t_m) \in B$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$) spojitá na $A \times B$ a spĺňa podmienky $|f(x, t)| \leq g(x)$, $|\partial f / \partial t_j(x, t)| \leq g_j(x)$, kde $g, g_1, \dots, g_m$ sú funkcie z $L(A)$. Potom funkcia h z predchádzajúcej vety je z triedy $C^1(B)$ a jej parciálne derivácie sú dané rovnosťou*

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(t) = (L) \int_A \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) dV_n(x)$$

pre $j = 1, \dots, m$ a $t \in B$.

Na cvičeniach si to už dotvoríte.
Ďurikovič

7 Krivkový integrál

Krivkové a plošné integrály, základné vlastnosti a výpočet.

7.1 Krivky v $\mathbb{R}^n$

Definícia 1. Nech $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazenie s hodnotami $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ pre $t \in \langle a, b \rangle$ také, že

- (i) $g_i \in C^1(\langle a, b \rangle)$ pre $i = 1, \dots, n$,
- (ii) $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ pre $t \in \langle a, b \rangle$.

Potom zobrazenie g nazývame C^1 -parametrická reprezentácia na $\langle a, b \rangle$ trajektórie $k = \{g(t) \in \mathbb{R}^n; t \in \langle a, b \rangle\}$.

Definícia 2. Nech $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^1 -parametrická reprezentácia trajektórie $k \subset \mathbb{R}^n$ a nech $G: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie z triedy $C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$ s vlastnosťami

- (i) $G(\alpha) = a, G(\beta) = b$,
- (ii) $G'(\tau) > 0$ pre všetky $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Potom zobrazenie $f = g \circ G: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^1 -parametrická reprezentácia trajektórie k ekvivalentná s g .

Definícia 3. Triedu γ všetkých ekvivalentných C^1 -parametrických reprezentácií g danej trajektórie $k \subset \mathbb{R}^n$ budeme nazývať *krivkou* z $\mathbb{R}^n$ a $g \in \gamma$ jej C^1 -parametrickou reprezentáciou.

Definícia 4. Nech $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^1 -reprezentácia krivky γ z $\mathbb{R}^n$ a nech $G: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie z triedy $C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$ s vlastnosťami:

- (i) $G(\alpha) = b, G(\beta) = a$,
- (ii) $G'(\tau) < 0$ pre všetky $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Potom $f = g \circ G: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ reprezentuje *opačne orientovanú krivku* κ ku krivke γ . Krivku κ označujeme $-\gamma$.

Definícia 5. *Násobnosť bodu* x krivky γ s parametrickou reprezentáciou $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je počet bodov $t \in \langle a, b \rangle$, pre ktoré $x = g(t)$. Body krivky s násobnosťou 1 nazývame *jednoduché body*.

Bod $g(a)$ nazývame *začiatočným* a $g(b)$ *koncovým bodom* krivky g . Ak $g(a) = g(b)$, krivka sa nazýva uzavretá.

Krivka, ktorá má iba jednoduché body sa nazýva *jednoduchý oblúk*. Uzavretá krivka sa nazýva jednoduchá, ak každý jej bod je jednoduchý okrem bodu $g(a)$, ktorý má násobnosť 2.

7.2 Dĺžka krivky a integrál 1.typu cez krivku

Definícia 6. Nech je daná krivka γ z $\mathbb{R}^n$ a $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je jej C^1 -parametrická reprezentácia. Potom *dĺžka krivky* γ je

$$V_1(\gamma) := \int_{\gamma} ds := (L) \int_a^b |g'(t)| dt = (R) \int_a^b |g'(t)| dt.$$

Definícia 7. Nech γ z $\mathbb{R}^n$ je krivka a $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je jej C^1 -parametrická reprezentácia. Nech funkcia $F: (D \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, kde D je otvorená množina a $\gamma \subset D$, je spojitá na γ . Potom *krivkový integrál 1. typu* definujeme rovnosťou

$$\int_{\gamma} F ds := \int_{\gamma} F(s) ds := (L) \int_a^b F[g(t)] |g'(t)| dt.$$

Množinu všetkých funkcií, pre ktoré je krivkový integrál prvého typu cez γ konečný, budeme označovať $L_1(\gamma)$.

Veta 1. Nech γ je krivka z $\mathbb{R}^n$, $F_1, F_2 \in L_1(\gamma)$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$(i) \int_{\gamma} (F_1 + F_2) ds = \int_{\gamma} F_1 ds + \int_{\gamma} F_2 ds$$

$$(ii) \int_{\gamma} c F_1 ds = c \int_{\gamma} F_1 ds$$

$$(iii) \int_{\gamma} F_1 ds \leq \int_{\gamma} F_2 ds, \text{ ak } F_1 \leq F_2 \text{ na } \gamma.$$

$$(iv) \int_{\gamma} F_1 ds = \int_{-\gamma} F_1 ds.$$

Krivkový integrál pre krivky po častiach hladké sa definuje ako súčet integrálov cez hladké úseky.

7.3 Krivkový integrál 2. typu

Diferenciálne formy 1. stupňa

Definícia 8. Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Zobrazenie $w: D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ sa nazýva *diferenciálna forma 1. stupňa* (krátko 1-forma) na D .

Definícia 9. Budeme hovoriť, že 1-forma $w: (D \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ je *exaktná* na D (D je oblasť), ak existuje funkcia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $df = w$.

Hovoríme, že 1-forma je z triedy $C^k(D)$, ak každá jej komponenta $w_i \in C^k(D)$ (D je otvorená množina).

Veta 2. Nech $w = w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n$ je exaktná 1-forma triedy $C^1(D)$. Potom

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i},$$

$i, j = 1, \dots, n$ na D .

1-forma spĺňajúca podmienku z predchádzajúcej vety sa nazýva *uzavretá*.

Nutná podmienka z predchádzajúcej vety je v prípade jednoducho súvislej oblasti aj postačujúca.

Definícia a vlastnosti

Definícia 10. Nech $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je po častiach hladká krivka a zobrazenie $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je jej C^1 -parametrická reprezentácia na $\langle a, b \rangle$. Ďalej nech w je spojitá 1-forma na otvorenej

množine $D \subset \mathbb{R}^n$, pričom v $\gamma \subset D$ (t.j. trajektória krivky leží v D). Potom *krivkový integrál 2. typu* z w cez krivku γ je

$$\int_{\gamma} w := \int_{\gamma} w_1 dx_1 + \cdots + w_n dx_n := (L) \int_a^b w[g(t)]g'(t) = (L) \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^n w_i[g(t)]g'_i(t) \right\} dt.$$

Veta 3. *Nech γ je po častiach hladká krivka v $\mathbb{R}^n$, w a ξ nech sú spojité 1-formy na otvorenej množine D , v ktorej leží γ . Potom*

$$(i) \int_{\gamma} (w + \xi) ds = \int_{\gamma} w ds + \int_{\gamma} \xi ds$$

$$(ii) \int_{\gamma} (cw) ds = c \int_{\gamma} w ds$$

$$(iii) \int_{\gamma_1 + \gamma_2} w ds = \int_{\gamma_1} w ds + \int_{\gamma_2} w ds, \text{ ak } \gamma_1, \gamma_2 \text{ sú po častiach hladké disjunktné krivky v } \mathbb{R}^n.$$

$$(iv) \int_{-\gamma} w ds = - \int_{\gamma} w ds.$$

Veta 4. *Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a nech w je spojitá 1-forma na D . Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) w je exaktná,

(ii) pre každú uzavretú po častiach hladkú krivku $\gamma \subset D$ integrál $\int_{\gamma} w = 0$,

(iii) ak γ_1 a γ_2 sú dve ľubovoľné po častiach hladké krivky v D s tým istým začiatkovým a koncovým bodom, potom $\int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$.

Fyzikálny význam krivkového integrálu 2. typu je práca v silovom poli. Krivkový integrál 1. typu možno použiť na výpočet hmotnosti, ťažiska a rôznych momentov.

7.4 Veta o divergencii

Integrály na varietach by som sem asi ani nemusel písať, však? (Možno by som aj mal, ale sa mi nechce.:=()) Aj pre integrály na varietach sú dva druhy. Pri integráloch druhého druhu treba uvažovať aj orientáciu variety.

Definícia 11. Hovoríme, že množina $D \subset \mathbb{R}^n$ je *regulárna oblasť*, ak:

(i) D je otvorená a ohraničená,

(ii) pre každé $x_0 \in \partial D$ existuje okolie U bodu x_0 a zobrazenie $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ $F \in C^1(U)$ s $\text{grad } F(x) \neq (0)$ pre $x \in U$ pričom $\partial D \cap U = \{x \in U; F(x) = 0\}$, $D \cap U = \{x \in U; F(x) < 0\}$.

Definícia 12. Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je *regulárna oblasť* v $\mathbb{R}^n$ a $\nu \neq 0$ je normálový vektor k ∂D v bode x . Potom ν nazývame vonkajšou normálou v bode $x \in \partial D$, ak existuje $\delta > 0$ tak, že $x + t\nu \in D$ pre $-\delta < t < 0$ a $x + t\nu \in \mathbb{R}^n - \overline{D}$ pre $0 < t < \delta$.

Veta 5 (Veta o divergencii, prvá verzia). *Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je regulárna oblasť, $\nu(x)$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k ∂D v bode $x \in \partial D$ a nech w je 1-forma z triedy $C^1(\overline{D})$. Potom*

$$\int_{\partial D} w(x) \cdot \nu(x) ds_{n-1} = (L) \int_D \text{div } w(x) dV_n(x),$$

ak oba integrály existujú. (Integrand na ľavej strane je skalárny súčin 1-kovektora z $(\mathbb{R}_1^n)^*$ a vektora z $\mathbb{R}^n$. - Čo to ale znamená, to sa ma nepýtajte.)

$(\mathbb{R}_r^n)^*$ sa označovala množina všetkých alternujúcich r -lineárnych zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^r$ do $\mathbb{R}$.

Dôsledok 1. *Nech sú splnené predpoklady predchádzajúcej vety, kde $w = f(x).g(x)dx_i$. Funkcie $f, g: \text{cl } D \rightarrow \mathbb{R}$ sú z triedy $C^1(\text{cl } D)$. Potom*

$$(L) \int_D f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dV_n(x) = \int_{\partial D} f(x)g(x)v_i(x)ds_{n-1} - (L) \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dV_n(x)$$

Veta 6. *Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená otvorená množina, ktorej hranica je $\partial D = A_1 \cup \dots \cup A_m \cup E$. Množiny A_k sú relatívne otvorené podmnožiny ∂D , $\overline{A_k}$ je kompaktná podmnožina nejakej $(n-1)$ -variety z triedy C^1 a E je kompaktná podmnožina $(n-2)$ -variety triedy C^1 , pričom $\overline{A_i} \cap \overline{A_j} \subset E$ pre $i \neq j$. Ak $\nu(x)$ je jednotkový normálový vektor k A_k pre $k = 1, \dots, m$ v bode $x \in A_k$ a w je 1-forma z triedy $C^1(\overline{D})$, potom*

$$(L) \int_D \text{div } w dV_n = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} w \cdot \nu ds_{n-1}$$

Predchádzajúca veta sa týka napríklad takých množín, ako n -rozmerný simplex a n -rozmerná kocka.

Veta 7 (Veta o divergencii, druhá verzia). *Nech $D^+ \subset \mathbb{R}^n$ je regulárna oblasť s kladnou orientáciou a s kladne orientovanou hranicou ∂D^+ a w je 1-forma z triedy $C^1(\overline{D})$. Potom*

$$\int_{\partial D^+} w = \int_{D^+} dw,$$

kde dw je vonkajší diferenciál formy w .

Nasledujúce tvrdenia sú špeciálne prípady vety o divergencii:

Veta 8 (Greenova veta). *Označme $w(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Potom (ak sú splnené predpoklady vety o divergencii)*

$$\int_{\partial D^+} Mdx + Ndy = \int_{D^+} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy.$$

Gauss-Ostrogradského vzorec - určuje vzťah medzi objemovým a plošným integrálom.

$$(L) \int_{D^+} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV_3(x, y, z) = \int_{\partial D^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

Stokesova veta - udáva vzťah medzi plošným a krivkovým integrálom v $\mathbb{R}^3$.

Nech krivka C ohraničuje plochu S . Potom

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\text{inak: } \int_C w = \iint_S \text{rot } w$$

Funkcia bude ísť tam.

Fečkan

8 Lebesguov integrál

Lebesguov integrál v $\mathbb{R}^n$ a jeho vlastnosti, porovnanie s Riemannovým integrálom.

8.1 Merateľnosť a miera množín

TODO Na cvikách z funkcionálky s Tereščákom sme asi tiež robili Lebesguovskú merateľnosť množiny, ale nenašiel som zošit.

TODO Lebesguov integrál by mal byť aj v [GĎ] na str.476 (??).

TODO Čosi o Lebesguovej miere by mohlo byť aj v Šalát: Metrické priestory.

TODO ?Fubiniho vetu aj vo formulácii pre súčin merateľných priestorov?

Na definíciu Lebesguovho integrálu treba mať najprv zavedenú Lebesguovu mieru. Jeden prístup k zavedeniu Lebesguovej miery je pomocou indukovanej vonkajšej miery (z knihy [RN]), iný k nemu ekvivalentný prístup použil Ďurikovič na prednáške. Najprv zavedenie Lebesguovej miery z Riečana:

Definícia 1. Nech $\mathbf{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathbf{E}$. Nech $\mu: \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je funkcia, ktorá spĺňa podmienku

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ E_1, E_2 \in \mathbf{E}, E_1 \cap E_2 &= \emptyset, E_1 \cup E_2 \in \mathbf{E} \Rightarrow \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Potom hovoríme, že funkcia μ je *aditívna* množinová funkcia definovaná na $\mathbf{E}$.

Ak μ spĺňa aj podmienku

$$E_n \in \mathbf{E}, n = 1, 2, \dots, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ pre } i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{E} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \quad (8.2)$$

tak hovoríme, že μ je σ -aditívna, alebo že je *zovšeobecnená miera*.

Ak je zovšeobecnená miera nezáporná, hovoríme, že je *mierra*. Ak nadobúda len konečné hodnoty, hovoríme o *konečnej miere*.

Tereščák definoval mieru tak, že namiesto podmienky $\mu(\emptyset) = 0$ požadoval existenciu $B \in \mathbf{S}$ takého, že $\mu(B) < \infty$. Obe definície sú ekvivalentné.

Definícia 2. Neprázdny systém $\mathbf{E}$ podmnožín X budeme nazývať *okruh*, ak

- (i) $E, F \in \mathbf{E} \Rightarrow E \cup F \in \mathbf{E}$,
- (ii) $E, F \in \mathbf{E} \Rightarrow E \setminus F \in \mathbf{E}$.

$\mathbf{E}$ sa nazýva σ -okruh, ak je okruh a platí

$$E_n \in \mathbf{E} \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{E}.$$

Ku ľubovoľnému systému $\mathbf{R} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje najmenší σ -okruh, ktorý ho obsahuje a označuje sa $\sigma(\mathbf{R})$.

Definícia 3. Ak $\mathbf{R} \subset \mathcal{P}(X)$ je okruh a $X \in \mathbf{R}$, tak $\mathbf{R}$ sa nazýva *algebra*. Ak algebra je súčasne σ -okruh, tak sa nazýva σ -algebra.

Veta 1 (vlastnosti miery na okruhu). Nech μ je miera definovaná na okruhu $\mathbf{R}$. Potom

- (i) $E, F \in \mathbf{E}, E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$ (μ je neklesajúca),
- (ii) ak aspoň jedno z čísel $\mu(E)$, $\mu(F)$ je konečné a $E \subset F$, tak $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.
(Tejto vlastnosti hovoríme *subtraktívnosť s podmienkou konečnosti*.)

(iii) $E \in \mathbf{R}, E_n \in \mathbf{R}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (σ -subaditivita)

(iv) $A_i \in \mathbf{S}, A_i \subset A_{i+1}$ pre $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (polospojitosť zdola)

(v) $A_i \in \mathbf{S}, A_i \supset A_{i+1}$ pre $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (polospojitosť zhora)

Definícia 4. Nech $\mathbf{R} \subset \mathcal{P}(X)$ je okruh a μ je miera na $\mathbf{R}$. Pre ľubovoľnú množinu $A \in \mathcal{P}(X)$ definujeme

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n); A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n; E_n \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \dots \right\} \quad (8.3)$$

(pričom infimum prázdnej množiny kladieme ∞). Takto definovaná množinová funkcia μ^* na $\mathcal{P}(X)$ sa nazýva *vonkajšia miera indukovaná mierou μ* .

Veta 2. Nech μ^* je vonkajšia miera indukovaná mierou μ definovanou na okruhu. Potom platí:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(A) \geq 0$ pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$,

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ pre každé $A, B \in \mathcal{P}(X), A \subset B$,

(iii) $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, ak $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

(iv) ak $E_n \in \mathbf{R}$, tak $\mu^*(E) = \mu(E)$.

Definícia 5. Nech μ^* je množinová funkcia definovaná na $\mathcal{P}(X)$ a nadobúdajúca hodnoty v $\overline{\mathbb{R}}$, ktorá spĺňa podmienky (i)–(iii) z predchádzajúcej vety. Potom hovoríme, že μ^* je *vonkajšia miera*.

Definícia 6. Nech μ^* je ľubovoľná vonkajšia miera na $\mathcal{P}(X)$. Množina $E \in \mathcal{P}(X)$ sa nazýva μ^* -merateľná (alebo tiež μ^* -merateľná v zmysle Caratheodoryho), ak pre ľubovoľné dve množiny $P \subset E, Q \subset E'$ platí

$$\mu^*(P \cup Q) = \mu^*(P) + \mu^*(Q). \quad (8.4)$$

Vidno, že je to ekvivalentné s podmienkou, že pre ľubovoľné $A \in \mathcal{P}(X)$ platí:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'), \quad (8.5)$$

z čoho ďalej vyplýva, že $\emptyset$ aj X sú vždy μ^* -merateľné.

Systém všetkých μ^* -merateľných množín budeme značiť $\mathbf{S}_{\mu^*}$.

Veta 3 (Caratheodoryho). Systém $\mathbf{S}_{\mu^*}$ je algebra a μ^* je vonkajšia miera na $\mathcal{P}(X)$. Systém $\mathbf{S}_{\mu^*}$ je σ -algebra a μ^* je miera na $\mathbf{S}_{\mu^*}$.

Veta 4. Nech μ^* je vonkajšia miera, indukovaná mierou μ , definovanou na okruhu $\mathbf{R}$. Potom $\mathbf{S}_{\mu^*} \supset \sigma(\mathbf{R})$.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že platí:

Veta 5 (o rozšírení miery). Nech μ je miera definovaná na okruhu $\mathbf{R}$. Potom existuje miera μ_1 na najmenšom σ -okruhu $\sigma(\mathbf{R})$ nad okruhom $\mathbf{R}$, ktorá je rozšírením miery μ .

Definícia 7. Miera μ definovaná na okruhu $\mathbf{R}$ sa nazýva σ -konečná, ak pre každé $E \in \mathbf{R}$ existuje postupnosť $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ množín z $\mathbf{R}$ taká, že $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$.

Veta 6. Nech μ je σ -konečná miera definovaná na okruhu $\mathbf{R}$. Potom existuje práve jedno rozšírenie miery μ z $\mathbf{R}$ na $\sigma(\mathbf{R})$.

Definícia 8. Znakom $<\mathcal{T}$ označujeme systém všetkých zľava uzavretých, sprava otvorených intervalov.

$s(<\mathcal{T})$ označíme systém obsahujúci prázdnu množinu a konečné zjednotenia intervalov z $<\mathcal{T}$. Systém $s(<\mathcal{T})$ je okruh.

Lema 1. Nech l je množinová funkcia definovaná na okruhu $s(<\mathcal{T})$ takto: $l(\emptyset) = 0$ a $l(\bigcup_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$, ak intervaly $\langle a_i, b_i \rangle$ sú navzájom disjunktné. Potom l je miera na $s(<\mathcal{T})$.

Najmenší σ -okruh, ktorý obsahuje $s(<\mathcal{T})$, už musí obsahovať všetky otvorené, uzavreté aj všetky borelovské množiny.

Definícia 9. Vonkajšiu mieru l^* indukovanú mierou l na $s(<\mathcal{T})$ nazývame Lebesguova miera. Systém l^* -merateľných množín označujeme $\mathbf{L}$ a zúženie l^* na $\mathbf{L}$ značíme λ .

Veta 7. Jediná miera μ na systéme $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ všetkých borelovských množín, pre ktorú platí $\mu\langle a, b \rangle = b - a$ pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ sa na $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ zhoduje s Lebesguovou mierou.

Tvrdenie 1. Lebesguova miera je úplná a σ -konečná. (Miera je úplná, ak všetky podmnožiny množín s nulovou mierou sú merateľné.)

Veta 8. Nech $E \in \mathbf{L}$ a $\varepsilon > 0$. Existuje taká otvorená množina $G \supset E$ a taká uzavretá množina $F \subset E$, že $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$, $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.

Dôsledok 1. Ku každej množine $E \in \mathbf{L}$ existuje množina G_0 typu G_δ (t.j. G_0 je prienikom postupnosti otvorených množín) a množina F_0 typu F_σ (t.j. F_0 je zjednotením postupnosti uzavretých množín), že $G_0 \supset E \supset F_0$ a $\lambda(G_0 \setminus E) = \lambda(E \setminus F_0) = 0$.

Tvrdenie 2. Každá spočítateľná množina má Lebesguovu mieru 0.

Podobne, ako sme definovali $s(<\mathcal{T})$, možno definovať $s(<\mathcal{T})^2$.

Definícia 10. $E \subset \mathbb{R}^2$ patrí do $s(<\mathcal{T})^2$ práve vtedy, keď $E = \emptyset$, alebo $E = \bigcup_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle \times \langle c_i, d_i \rangle$, kde $\langle a_i, b_i \rangle, \langle c_i, d_i \rangle \in <\mathcal{T}$. Vyjadrenie množiny E možno voliť tak, že dvojrozmerné intervaly, ktoré v ňom vystupujú budú disjunktné.

$$l^{(2)}(\emptyset) = 0 \text{ a } l^{(2)}(\bigcup_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle \times \langle c_i, d_i \rangle) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)(d_i - c_i).$$

Zavedenie Lebesguovej miery vo viacrozmere bolo v [RN] ponechané ako cvičenie a má sa urobiť analogicky ako v jednorozmernom prípade.

Ďurikovič zavádza Lebesguovu mieru trochu inak - začne vlastne tak, že ju definuje pre ohraničené otvorené a kompaktné množiny. Z doteraz uvedených viet vyplýva (podľa mňa), že bude takto zavedená miera rovnaká.

Definícia 11. Množina $I \subset \mathbb{R}^n$ sa nazýva n -rozmerný interval v $\mathbb{R}^n$, ak I je karteziánsky súčin 1-dimenzionálnych nedegerovaných intervalov s n -činiteľmi, t.j. $I = J_1 \times \dots \times J_n$, kde koncové body intervalu J_i sú rôzne reálne čísla pre $i = 1, \dots, n$.

Súčin dĺžok intervalov $J_1, \dots, J_n$ nazývame n -rozmerná miera intervalu I a označujeme $V^I(I) > 0$.

Interval I nazývame uzavretý (otvorený), ak každý z intervalov $J_1, \dots, J_n$ je uzavretý (otvorený).

Definícia 12. Nech pre každé $i = 1, \dots, n$ je daný konečný systém m_i nadrovín $\alpha_{ij} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i = a_{ij}\}$, kde $j = 1, \dots, m_i + 1$ a $a_{i1} < \dots < a_{im_i}$ sú reálne čísla. Zjednotenie týchto nadrovín nazývame *delenie* priestoru $\mathbb{R}^n$.

Hovoríme, že delenie $D_1(\mathbb{R}^n)$ je *zjemnením* delenia $D(\mathbb{R}^n)$, ak $D(\mathbb{R}^n) \subset D_1(\mathbb{R}^n)$.

Definícia 13. Množinu $Y \subset \mathbb{R}^n$ nazývame *s-množina* (jednoduchá alebo elementárna množina), ak existuje také delenie $D(\mathbb{R}^n)$ a $p \in \mathbb{N}$, že Y je zjednotenie konečného počtu uzavretých intervalov $I_1, \dots, I_p$ generovaných delením $D(\mathbb{R}^n)$, t.j. $Y = \bigcup_{i=1}^p I_i$.

Miera s-množiny Y je definovaná rovnosťou $V^s(Y) := V^I(I_1) + \dots + V^I(I_p) \in \mathbb{R}^+$.

Veta 9. Hodnota miery $V^s(Y)$ závisí iba od Y a nezávisí od výberu delenia, ktoré generuje Y .

Dôsledok 2. Množina S_n všetkých schodovitých množín z $\mathbb{R}^n$ a prázdna množina tvorí okruh množín. Navyše pre $Y, Z \in S_n$ platí, že $Y \cap Z \in S_n \cup \{\emptyset\}$ a $V^s(Y \cup Z) \leq V^s(Y) + V^s(Z)$.

Definícia 14. Nech $G \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená neprázdna množina. Potom miera množiny G je

$$V^o(G) := \sup_Y \{V^s(Y) \in \mathbb{R}^+; Y \in S_n, Y \subset G\}.$$

Ak $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktná množina, tak je mieru definujeme rovnosťou:

$$V^c(K) := \inf_Z \{V^s(Z) \in \mathbb{R}^+; Z \in S_n; K \in \text{Int } Z\}.$$

Lema 2. Nech $Z \in S_n$. Potom $V^o(\text{Int } Z) = V^s(Z)$ a ak Z je kompaktná, tak $V^c(Z) = V^s(Z)$.

Pre ohraničenú množinu sa miera vybuduje aproximatívne, zdola pomocou kompaktných a zhora pomocou otvorených množín.

Definícia 15. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina. Vonkajšiu mieru množiny A definujeme rovnosťou

$$\overline{V}^b(A) := \inf_G \{V^o(G) \in \mathbb{R}^+; G \in O_n, A \subset G\} \geq 0.$$

a vnútornú mieru rovnosťou

$$\underline{V}^b := \sup_K \{V^c(K) \in \mathbb{R}^+; K \in C_n, K \subset A\} \geq 0.$$

Tvrdenie 3. Nech $A \subset B$ sú ohraničené množiny z $\mathbb{R}^n$. Potom $\underline{V}^b(A) \leq \overline{V}^b(A)$, $\underline{V}^b(A) \leq \underline{V}^b(B)$ a $\overline{V}^b(A) \leq \overline{V}^b(B)$.

Definícia 16. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina. Hovoríme, že A je *b-merateľná*, ak platí $\underline{V}^b(A) = \overline{V}^b(A)$. Spoločnú hodnotu vnútornej a vonkajšej miery množiny A nazývame *n-rozmerná miera* množiny A a značíme ju $V^b(A)$.

Opäť možno ukázať, že pre kompaktné a otvorené množiny nová definícia miery splýva s pôvodnou.

Veta 10. Systém ohraničených b-merateľných podmnožín $\mathbb{R}^n$ tvorí okruh, ktorý je navyše uzavretý na konečné prieniky.

Definícia 17. Neohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ sa nazýva *u-merateľná*, ak ohraničená množina $A \cap B_r$ je b-merateľná pre každé $r > 0$. (B_r je otvorená guľa s polomerom r .)

Mieru neohraničenej množiny definujeme rovnosťou $V^u(A) := \lim_{r \rightarrow \infty} V^b(A \cap B_r)$.

Veta 11. Systém merateľných množín tvorí σ -algebru, ktorá obsahuje všetky otvorené množiny. V je miera na tejto σ -algebre.

8.2 Merateľné funkcie

Definícia 18. Nech X je množina a $\mathbf{S}$ je nejaký okruh jej podmnožín. Usporiadanú dvojicu $(X, \mathbf{S})$ nazývame *merateľný priestor*. Ak na $\mathbf{S}$ je definovaná nejaká miera, tak usporiadanú trojicu $(X, \mathbf{S}, \mu)$ nazývame *priestor s mierou*. Množinu $E \subset X$, ktorá $E \in \mathbf{S}$ nazývame *merateľná množina* ($\mathbf{S}$ -merateľná množina).

Definícia 19. Nech $(X, \mathbf{S})$ je merateľný priestor. Budeme hovoriť, že reálna funkcia $f(x)$ definovaná na X je *merateľná* na merateľnom priestore $(X, \mathbf{S})$, ak pre ľubovoľnú otvorenú množinu $G \subset \mathbb{R}$ je $f^{-1}(G) \in \mathbf{S}$.

Veta 12. Funkcia f je merateľná práve vtedy, keď množina $f^{-1}(c, \infty)$ ($f^{-1}(c, \infty)$, $f^{-1}(-\infty, c)$, $f^{-1}(-\infty, c)$) je merateľná pre každé $c \in \mathbb{R}$.

Úplne rovnako sa definujú merateľné funkcie aj v prípade, že namiesto $\mathbb{R}$ vystupuje ľubovoľný topologický priestor. (Teda vzor otvorenej je merateľná.)

Tvrdenie 4. Nech $(X, \mathbf{S})$ je merateľný priestor, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ a $(Z, \mathcal{T}_Z)$ sú topologické priestory. Ak $f: X \rightarrow Y$ je merateľná funkcia a $g: Y \rightarrow Z$ je spojité zobrazenie, tak $g \circ f$ je merateľná funkcia.

Tvrdenie 5. Nech $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sú merateľné a $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité. Potom funkcia $\Psi(f, g)(x) = \Phi(f(x), g(x))$ je merateľná.

Definícia 20. Nech $E_1, \dots, E_n$ sú množiny z $\mathbf{S}$. Nech $E_i \cup E_k = \emptyset$ pre $i \neq k$. Funkciu $\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ nazývame *jednoduchou merateľnou funkciou*.

Tvrdenie 6. Ku každej merateľnej funkcii existuje postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých merateľných funkcií tak, že $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Ak $f(x) \geq 0$ tak existuje takáto neklesajúca postupnosť.

Tvrdenie 7. Ak funkcie f, g sú merateľné, tak funkcia $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ je tiež merateľná.

Ak funkcie $f_1, f_2, \dots$ sú merateľné a $g(x) = \sup\{f_1, f_2, \dots\}$, $h(x) = \inf\{f_1, f_2, \dots\}$, tak funkcie g a h sú merateľné.

Ak funkcie $f_1, f_2, \dots$ sú merateľné a $g(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$, $h(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$, tak funkcie g a h sú merateľné.

Definícia 21. Jednoduchú merateľnú funkciu budeme nazývať $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ *jednoduchou integrovateľnou funkciou*, ak $\mu(E_i) < \infty$ pre všetky i , pre ktoré $c_i \neq 0$. Číslo $\sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i)$ budeme nazývať *integrálom* funkcie f .

Definícia 22. Integrálom z nezápornej merateľnej funkcie f nazývame číslo $\int f d\mu$, ktoré dostaneme ako limitu postupnosti $(\int f_n(x) d\mu)_{n=1}^{\infty}$, kde $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť jednoduchých merateľných funkcií konvergujúca k $f(x)$. (Hodnota integrálu nezávisí od výberu postupnosti.)

Definícia 23. Integrálom z merateľnej funkcie $f(x)$ nazývame číslo, $\int f(x) d\mu = \int f_1(x) d\mu - \int f_2(x) d\mu$, kde $f_1(x) = \frac{f^+ + |f|}{2}$ a $f_2(x) = \frac{|f| - f}{2}$, za predpokladu, že aspoň jedno z čísel $\int f_1(x) d\mu$, $\int f_2(x) d\mu$ je reálne.

Vlastnosti Lebesguovho integrálu:

$$\begin{aligned}\int (f + g) d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu \\ \int c f d\mu &= c \int f d\mu \\ f \leq g &\Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu \\ \int |f + g| d\mu &\leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu \\ \left| \int f d\mu \right| &\leq \int |f| d\mu\end{aligned}$$

Veta 13. Merateľná funkcia $f(x)$ je integrovateľná (=má konečný integrál) práve vtedy, keď $|f(x)|$ je integrovateľná.

Túto vlastnosť Riemannov integrál nemá. Kontrapríklad je funkcia $\chi_{\mathbb{Q} \cap (0, 1)} - \chi_{(0, 1) \setminus \mathbb{Q}}$.

Veta 14. Ak $f(x)$ je merateľná funkcia a g je merateľná funkcia a ak $|f| \leq g$, potom $f(x)$ je integrovateľná.

Veta 15 (Beppo-Leviho veta). Nech $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť nezáporných merateľných funkcií konvergujúca k funkcii $f(x)$, potom $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$. (Inak povedané $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.)

Dôsledok 3. Nech $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných merateľných funkcií. Potom pre $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ platí $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.

Veta 16 (Fatouova lema). Ak $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných merateľných funkcií a ak $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, potom $\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Veta 17 (Lebesguova veta). Nech $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť merateľných funkcií, ktorá konverguje podľa miery (alebo skoro všade) k funkcii $f(x)$. Nech $g(x)$ je integrovateľná funkcia a nech $|f_n| \leq g$. Potom f je integrovateľná funkcia a platí:

$$\int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Konvergencia podľa miery znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$. Konvergencia podľa miery vyplýva z konvergenzie skoro všade.

8.3 Lebesguov integrál

Definícia 24. Integrál podľa Lebesguovej miery nazývame Lebesguovým integrálom.

Takisto sa však zvykne Lebesguovým integrálom nazývať aj spôsob, ktorým sme definovali integrál na ľubovoľnom priestore s mierou.

Veta 18. Ak je ohraničená funkcia f riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$, potom je lebesguovsky integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a Riemannov integrál sa rovná Lebesguovmu integrálu.

Literatúra týkajúca sa miery a integrálu: [RN], [Ď], [MEM], [ND], [ŠŠN], [Q], [FR].

Čo mi to tu vzniklo?
 Ďurikovič

9 Metrické priestory

Metrické priestory, úplné a kompaktné priestory. Banachova veta o pevnom bode. Aplikácie.

Táto kapitola je spracovaná podľa [ŠŠN]. Sú tam aj nejaké veci, ktoré sme nebrali.

9.1 Metrické priestory

Definícia 1. Nech X je množina a $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Potom (X, d) sa nazýva *metrický priestor* s metrikou d , ak:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojuholníková nerovnosť)

Konvergencia postupnosti v metrickom priestore: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim d(x_n, x) = 0$.

Gule v metrickom priestore tvoria bázu topológie. V tejto topológii sú uzavreté práve množiny, ktoré obsahujú všetky limity konvergentných postupností svojich prvkov. Topológia určená metrikou je hausdorffovská. Každý bod má spočítateľnú bázu okolí (priestor spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti).

V ľubovoľnom topologickom priestore z existencie spočítateľnej bázy vyplýva separabilita priestoru. V metrických priestoroch to platí aj naopak:

Tvrdenie 1. *Ak metrický priestor (X, d) je separabilný, tak je aj priestorom so spočítateľnou bázou topológie.*

9.2 Úplné metrické priestory

Definícia 2. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvkov metrického priestoru X je *fundamentálna*, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $m, n > n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Metrický priestor nazveme *úplným*, ak každá fundamentálna postupnosť prvkov priestoru X konverguje v X .

Veta 1 (Cantorova veta). *Nech (X, d) je metrický priestor. Potom X je úplný práve vtedy, keď pre každú nerastúcu postupnosť neprázdnych uzavretých podmnožín s vlastnosťou $\text{diam } A_n \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$ obsahuje $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ práve jeden bod.*

Definícia 3. Podmnožina A topologického priestoru X sa nazýva *množina prvej Bairovej kategórie* (v X), ak existujú také množiny $A_n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) riedke v X , že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ak množina $A \subset X$ nie je prvej Bairovej kategórie v X , tak sa nazýva *množinou druhej Bairovej kategórie*.

Veta 2 (Bairova veta). *Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $X \neq \emptyset$. Potom X je množina druhej Bairovej kategórie v X .*

Veta 3 (Bairova veta o hustote). *Nech (X, d) je úplný metrický priestor a nech $X \neq \emptyset$. nech $X_k \subset X$ ($k \in \mathbb{N}$) sú riedke množiny. Potom množina $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ je hustá v X .*

Definícia 4. *Zúplnenie* metrického priestoru X je taký úplný metrický priestor Y , že X je podpriestor Y a $\overline{X} = Y$ (X je hustá podmnožina Y).

Veta 4. Každý metrický priestor má zúplnenie, toto zúplnenie je jediné až na izometriu.

Tvrdenie 2. Nech X je úplný metrický priestor a $Y \subseteq X$ je jeho podpriestor. Potom Y je úplný metrický priestor $\Leftrightarrow Y$ je uzavretá množina v X .

9.3 Kompaktné metrické priestory

Definícia kompaktného topologického priestoru je v otázke číslo 11.

Definícia 5. Topologický priestor sa nazýva *sekvenciálne kompaktný*, ak každá postupnosť má konvergentnú podpostupnosť.

Veta 5. Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor. Potom sú ekvivalentné tieto výroky:

- (i) (X, d) je kompaktný,
- (ii) (X, d) je sekvenciálne kompaktný,
- (iii) (X, d) je úplný a totálne ohraničený (totálne ohraničený znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -sieť),
- (iv) Každá nekonečná podmnožina priestoru (X, d) má hromadný bod. (V knihe [NS] tomu hovorí, že (X, d) má tzv. Bolzanovu-Weierstrassovu vlastnosť.)

V [BS] sa definuje totálne ohraničený priestor ako taký, že z každej postupnosti sa dá vybrať fundamentálna podpostupnosť. Je to ekvivalentné s definíciou pomocou ε -sietí.

Veta 6 (Cantorova veta). Nech (X, d) je metrický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) X je kompaktný.
- (ii) Nech F_k ($k \in \mathbb{N}$) sú neprázdne uzavreté množiny v X . Nech $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \dots$. Potom $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.

(Ak sa nemýlim, tak toto by malo platiť pre topologické priestory všeobecne.)

V priestore spojitých funkcií na kompaktnej množine charakterizuje kompaktné podmnožiny Ascoliho lema. Je tu uvedená najprv vo formulácii z [ŠŠN] (v takomto znení ju používal Medveď pri dôkaze Peanovej vety) a vo verzii, ktorú sme mali s Tereščákom.

Definícia 6. Nech F je množina funkcií $f: A \rightarrow Y$, $A \subset X$. (X, Y - metrické priestory.) F je *rovnomočne spojitá*, ak $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in A \forall f \in F d(x, x') < \delta \Rightarrow f(x') < \varepsilon$.

Rovnomocná spojitosť je teda niečo ako rovnomerná spojitosť, pričom δ nezávisí od f .

Veta 7 (Ascoliho lema). Nech $A \subset X$ je kompaktná podmnožina, Y je úplný metrický priestor a nech F je množina funkcií $f: A \rightarrow Y$ spojitých na A . Potom sú nasledovné výroky sú ekvivalentné.

- (i) F je rovnomerne ohraničená a rovnomocne spojitá.
- (ii) Každá postupnosť prvkov z F obsahuje rovnomerne konvergentnú podpostupnosť.

Veta 8. Nech A je kompaktný a Y úplný metrický priestor. $F \subset C(A, Y)$ je kompaktná $\Leftrightarrow F$ je uzavretá, pre každé $x \in A$ je $\{f(x) : f \in F\}$ kompaktná a F je rovnomocne spojitá.

9.4 Banachova veta o pevnom bode

Uvažujme o funkcii $f: A \rightarrow A$, $A \subset X$, X je metrický priestor.

Definícia 7. Bod $x_0 \in A$, pre ktorý platí $f(x_0) = x_0$, nazývame *pevný bod* funkcie f .

Definícia 8. Hovoríme, že funkcia $f: A \rightarrow Y$, $A \subset X$, spĺňa na množine A Lipschitzovu podmienku, ak $d(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2)$. Ak funkcia $f: A \rightarrow A$ spĺňa Lipschitzovu podmienku s konštantou L takou, že $0 < L < 1$, nazývame *kontraktívnou* alebo *kontrakciou*.

Veta 9 (Banachova veta o pevnom bode). *Nech (X, d) je úplný metrický priestor. Nech $f: X \rightarrow X$ je kontrakcia. Potom f má práve jeden pevný bod. Tento pevný bod možno získať ako limitu postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty = (f(x_{n-1}))_{n=1}^\infty$, kde x_1 je ľubovoľný bod z X .*

Navyše platí odhad $d(x_0, x_n) \leq \frac{L^{n-1}}{1-L} d(x_2, x_1)$, kde $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ je pevný bod f .

Aplikácie Banachovej vety o pevnom bode

Nevedel som celkom, čo by tu ešte mohlo byť okrem toho, čo robil Medveď na difkách, tak som sem odpísal nejaké veci z [ŠŠN].

Hľadanie koreňa

Ak $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < K_1 \leq f'(x) \leq K_2$ na $\langle a, b \rangle$, tak f má v $\langle a, b \rangle$ koreň. $F(x) = x - \lambda f(x)$. $F(x) = x \Leftrightarrow x$ je koreň f . Vhodnou voľbou λ dosiahneme kontraktívnosť zobrazenia F .

Existencia riešenia diferenciálnej rovnice

Nech $P = \langle x_0, x_0 + a \rangle \times \mathbb{R}$, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na P a spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

$L \geq 0$. Potom začiatočná úloha

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

má práve jedno riešenie a toto riešenie existuje na intervale $J = \langle x_0, x_0 + a \rangle$.

y_0 je riešením uvedenej začiatočnej úlohy práve vtedy, keď je pevným bodom funkcionálu $T: C(J) \rightarrow C(J)$

$$(Ty)(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Ak definujeme na $C(J)$ normu vzťahom $\|y\| = \max_{x \in J} \{|y(x)| \cdot e^{-2Lx}\}$, tak získame Banachov priestor a T je na ňom kontraktívny.

Poznámka pisateľa paškvilu: Mohlo by sa možno zdať, že takýmto použitím Banachovej vety sme odvodili lepší výsledok, ako na prednáške z ODR, kde sme vyslovili vetu, ktorá hovorila iba to, že existuje nejaký interval, na ktorom existuje riešenie. V skutočnosti dĺžka intervalu v dôkaze tejto vety závisela iba od konštanty L a nie od bodu t_0 , teda aj pri tomto dôkaze vieme predĺžiť riešenie na celý interval, na ktorom je funkcia lipschitzovská. (Za predpokladu, že riešenie „nevybehne“ z oblasti D .)

Existencia implicitnej funkcie

Veta 10 (Veta o implicitnej funkcii). *Nech $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nech $O(A) \subset \mathbb{R}^2$ je kruhové okolie bodu A . Nech $F(x, y)$ a $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_y(x, y)$ sú spojité reálne funkcie na $O(A)$. Nech ďalej $F(x_0, y_0) = 0$ a $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom existujú také čísla $\xi, \eta > 0$, že rovnicou $F(x, y) = 0$ je na intervale $J = \langle x_0 - \xi, x_0 + \xi \rangle$ definovaná jediná spojitá funkcia $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, že $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ a $|f(x) - y_0| \leq \eta$ pre každé $x \in J$.*

$$B = \{g \in C(J) : g(x_0) = y_0, |g(x) - y_0| \leq \eta \text{ pre každé } x \in J\}$$

$$d(g_1, g_2) = \max_j |g_1(x) - g_2(x)|$$

d je metrika na B a (B, d) je úplný metrický priestor

$(Tg)(x) = g(x) - \frac{1}{K}F(x, g(x))$, kde K je také, že $F_y < K$ na oblasti D , D je také okolie, že $F_y \neq 0$ na D .

Zovšeobecnenia Banachovej vety

Veta 11. *Nech (X, d) je úplný metrický priestor a nech operátor $T: X \rightarrow X$ je taký, že T^n pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ je kontraktívny operátor. Potom T má v X práve jeden pevný bod.*

Veta 12. *Nech X je Banachov priestor. Nech $x_0 \in X$ je daný prvok. Nech $S: X \rightarrow X$ je lineárny ohraničený operátor a nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S^n\| < \infty.$$

Potom operátor

$$T(x) = x_0 + S(x)$$

má práve jeden pevný bod.

Hustá polievka je taká, že kdekoľvek naberiem,
bude nejaký rezanec.

Hustá prednáška je taká, že kamkoľvek pozriem
je nejaké tvrdenie, ktorému nerozumiem.

Tereščák - pri definícii hustej množiny

10 Banachov a Hilbertov priestor

Lineárny normovaný priestor, Banachov priestor, Hilbertov priestor. Lineárne spojité operátory a funkcionály. Veta o reprezentácii lineárneho ohraničeného funkcionálu v Hilbertovom priestore.

Lineárny normovaný priestor

Definícia 1. Lineárny priestor X s funkciou $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajúcou

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

nazývame *lineárny normovaný priestor*.

Definícia 2 (Hamelova báza). Nech X je lineárny priestor. Potom lineárne nezávislú množinu $H \subset X$ nazývame *bázou* v X , ak $[H] = X$ (lineárny obal H je celé X).

Veta 1. Každý netriviálny lineárny priestor má Hamelovu bázu. Ľubovoľné dve bázy majú rovnakú kardinalitu. Kardinalita ľubovoľnej bázy sa nazýva *dimenzia lineárneho priestoru*.

Veta 2 (Hahn-Banach). Nech X je lineárny priestor, K uzavretá konvexná množina, A_0 je afinný podpriestor, nepretínajúci K . Potom existuje nadrovina A obsahujúca A_0 nepretínajúca K .

Tvrdenie 1. Nech X je lineárny priestor a $l: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineárny funkcionál. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

- (i) l je spojitý,
- (ii) $\forall r > 0 \exists c > 0 |l(x)| \leq c \forall x \in B(0, r)$,
- (iii) $\exists C > 0 |l(x) - l(y)| \leq C\|x - y\|$,
- (iv) $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow l(x_n) \rightarrow 0$,
- (v) $x_n \rightarrow x \Rightarrow l(x_n) \rightarrow l(x)$.

Tvrdenie 2. Nech X je lineárny normovaný priestor. Potom ak l_1, l_2 sú spojité lineárne funkcionály, tak aj $l_1 + l_2$ a λl_1 sú spojité lineárne funkcionály. Teda množina všetkých lineárnych spojitých funkcionálov na X označovaná ako X^* a nazývaná *duál X* je lineárny priestor s normou $\|l\| = \sup_{x \in B(0,1)} |l(x)|$. X^* s touto normou je Banachov priestor.

Veta 3 (Hahn-Banach). Nech X je lineárny normovaný priestor, Y je jeho lineárny podpriestor a $l_0: Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineárny a na Y spojitý funkcionál s normou na Y označenou $\|l_0\|$. Potom existuje $L \in X^*$ taký, že $L|_Y = l_0$ a $\|L\| = \|l_0\|$.

Tvrdenie 3. Nech X je lineárny normovaný priestor. Potom zobrazenie $\chi: X \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definované ako $\chi(v, l) = l(v)$ je bilinéarne a platí $|\chi(v, l)| \leq \|l\|\|v\|$, pre $l \in X^*, v \in X$. Ďalej zobrazenie $i: X \rightarrow X^{**}$ definované ako $i(v) := \chi(v, \cdot)$ je lineárne injektívne a zachováva normu, t.j. $\|v\| = \|i(v)\|$.

Tvrdenie 4. Nech X je lineárny normovaný priestor a l je lineárny funkcionál na X . Potom l je spojitý práve vtedy, keď $l^{-1}(0)$ je uzavretá množina. $0 \neq l$ je nespojitý práve vtedy, keď uzáver $l^{-1}(0)$ je X .

Definícia 3. Nech X je lineárny normovaný priestor. Potom hovoríme, že postupnosť x_m konverguje *slabo* k x (a značíme $x_m \rightharpoonup x$), ak pre každý $l \in X^*$ platí $l(x_m) \rightarrow l(x)$ pre $m \rightarrow \infty$. Hovoríme, že postupnosť *konverguje silne*, ak konverguje k x v norme.

Definícia 4. Nech X je lineárny normovaný priestor a $i: X \rightarrow X^{**}$ kanonické vloženie. Ak i je bijekcia, hovoríme, že X je *reflexívny* priestor.

X je reflexívny práve vtedy, keď z každej postupnosti ohraničenej v norme sa dá vybrať slabo konvergentná podpostupnosť. (Eberlejn-Šmuljan)

Dôsledok 1. Nech $X \neq \{0\}$ je lineárny priestor a $v \in X$. Potom existuje $l \in X^*$; $l(v) = \|v\|$, $\|l\| = 1$.

Tvrdenie 5 (Baire). *Nech (M, d) je úplný metrický priestor a $G_i, i \in \mathbb{N}$ je systém otvorených a hustých podmnožín v M . Potom $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ je hustý v M .*

Veta 4 (Banach-Steinhaus - princíp rovnomernej ohraničenosti). *Nech X, Y sú lineárne normované priestory a A_n je postupnosť $A_n \in L(X, Y), n \in \mathbb{N}$. Potom buď $\{x \in X : \sup \|A_n x\| = \infty\}$ je prienik spočítateľného systému otvorených a hustých podmnožín X alebo existuje $C > 0$ také, že $\|A_n\| \leq C$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.*

Tvrdenie 6. *Nech X je Banachov priestor a $l_n \in X^*, n \in \mathbb{N}$. Ak $\{l_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená pre všetky $x \in X$, potom existuje $C > 0$ také, že $\|l_n\| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$.*

Tvrdenie 7. *Nech A je lineárne zobrazenie z lineárneho priestoru X do Y , potom nasledovné podmienky sú ekvivalentné*

- (i) A je spojité,
- (ii) existuje $B(x_0, r_0)$, na ktorej je A ohraničené,
- (iii) $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C, x \in B_1(0)$,
- (iv) $\exists C > 0 : \|Ax - Ay\|_Y \leq C\|x - y\|_X$,
- (v) $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow 0$,
- (vi) $x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$.

Tvrdenie 8. *Nech X, Y sú lineárne normované priestory a Y je Banachov priestor. Potom $L(X, Y)$ je Banachov priestor.*

Tvrdenie 9 (von Neumann). *Nech X je Banachov priestor. Potom ak $A \in L(X, X)$ a $\|A\|_{L(X, X)} < 1$, tak existuje inverzný operátor $B \in L(X, X)$ k operátoru $I - A$ a $\|B\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$.*

Príklady Banachových priestorov:

$BC(X, \mathbb{R})$ - ohraničené funkcie z X do $\mathbb{R}$ so suprémovou normou (ak X je kompaktný, sú to všetky spojité funkcie)

$$L_p - \|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$L_\infty - \|x\|_\infty = \text{esssup}\{|x(t)| : t \in J\} = \inf\{B : |x(t)| \leq B \text{ skoro všade na intervale } I\}$ (L_∞ je množina tých funkcií, pre ktoré je množina vystupujúca v definícii $\|\cdot\|_\infty$ neprázdna, a teda existuje esenciálne suprérum.)

$$l_p - \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$l_\infty - \text{ohraničené postupnosti, } \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

Hölderove priestory, Sobolevove priestory

Porovnanie konečnorozmerných a nekonečnorozmerných Banachových priestorov:

V konečnorozmerných priestoroch sú všetky normy ekvivalentné. Jednotková guľa v X je kompaktná práve vtedy, keď X je konečnorozmerný. Slabá a silná konvergencia sú v konečnorozmere ekvivalentné.

Konečnorozmerný lineárny podpriestor lineárneho normovaného priestoru je vždy uzavretý.

Hilbertov priestor

Definícia 5. *Nech X je lineárny priestor. Potom zobrazeniu $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ hovoríme skalárny súčin na X , ak platí*

- (i) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, (x, x) \geq 0,$
- (ii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$
- (iii) $(x, y) = (y, x)$

a priestoru X so skalárnym súčinom $(\cdot, \cdot)$ hovoríme *predhilbertov priestor* (priestor so skalárnym súčinom).

Definícia 6. Ak je lineárny normovaný priestor s metrikou odvodenou od normy úplný metrický priestor, tak ho nazývame *Banachovým priestorom*. Ak priestor so skalárnym súčinom s metrikou odvodenou od skalárneho súčinu je úplný metrický priestor, tak hovoríme, že je to *Hilbertov priestor*.

Tvrdenie 10. *Nech X je predhilbertov priestor. Potom $\sqrt{(x, x)}$ je norma na X .*

Tvrdenie 11. *Nech X je predhilbertov priestor. Potom $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pre $x, y \in X$.*

Tvrdenie 12. *Nech X je predhilbertov priestor. Potom $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

Predchádzajúce tvrdenie hovorí, že norma odvodená od skalárneho súčinu spĺňa trojuholníkovú nerovnosť, teda že je skutočne normou.

Definícia 7. Nech X je predhilbertov priestor. Potom píšeme $x \perp y$, ak $(x, y) = 0$. Pre $M \subset X$ píšeme $x \perp M$, ak platí $x \perp y$ pre všetky $y \in M$.

Tvrdenie 13 (Rovnoběžníkové pravidlo). *Nech X je predhilbertov priestor. Potom platí $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.*

Tvrdenie 14. *Nech X je Hilbertov priestor, $x \in X$ a K je konvexná a uzavretá podmnožina X . Potom existuje jediný $x_0 \in K$ taký, že $\|x - x_0\| = \text{dist}(x, K)$.*

Tvrdenie 15. *Nech X je Hilbertov priestor, Y je afinný uzavretý podpriestor a $x \in X$. Potom existuje $y \in Y$ taký, že $\|y - x\| = \text{dist}(x, Y)$ a platí $(x - y) \perp (y - Y)$*

Tvrdenie 16. *Nech X je Hilbertov priestor, Y uzavretý lineárny podpriestor. Potom existujú lineárne zobrazenia $P, Q \in L(X, X)$ také, že:*

- (i) $P(X) = Y, Q(X) = Y^\perp,$
- (ii) $|x|^2 = |Px|^2 + |Qx|^2,$
- (iii) $P^2 = P, Q^2 = Q.$

Veta 5 (Rieszova veta o reprezentácii). *Nech X je Hilbertov priestor. Potom pre každý $l \in X^*$ existuje jediné $y \in X$ také, že $l(x) = (y, x)$ pre všetky $x \in X$.*

Dôsledok 2. *Hilbertov priestor je reflexívny.*

Definícia 8. Nech X je predhilbertov priestor. Potom systém vektorov $\{u_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ($\Lambda \neq \emptyset$) nazývame *ortogonálny*, ak $(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}) = 0$ pre všetky $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \Lambda$. Ortogonálny systém $\{u_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ nazývame *ortonormálny*, ak navyše $\|u_\lambda\| = 1$ pre všetky $\lambda \in \Lambda$.

Tvrdenie 17. *Nech X je Hilbertov priestor (predhilbertov priestor) a $\{u_1, \dots, u_n\}$ je ortonormálny systém v X . Potom platí $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n (x, u_i)^2$.*

Definícia 9. Nech $c_\lambda, \lambda \in \Lambda$ sú nezáporné. $\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \sup_{\substack{J \subset \Lambda \\ \#J < \infty}} \sum_{\lambda \in J} c_\lambda$.

Tvrdenie 18 (Besselova nerovnosť). Nech X je predhilbertov priestor a $\{u_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ je ortonormálny systém v X . Potom $\|x\|^2 \geq \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, u_\lambda)^2$

Veta 6 (Riesz-Fischer). Nech X je Hilbertov priestor, $\{u_i; i \in I\}$ je ortonormálny systém v X a $\{c_i \in \mathbb{R}; i \in I\}$ je množina reálnych čísel. Ak $\sum_{i \in I} c_i^2 < \infty$, potom existuje $x \in X$ taký, že $(x, u_i) = c_i$ pre všetky $i \in I$.

Definícia 10. Nech X je predhilbertov priestor a $\{u_i; i \in I\}$ ortonormálny (ortogonálny) systém. Hovoríme, že tento systém je *úplný* (úplný ortonormálny (ortogonálny) systém), ak je maximálny (tzn. neexistuje $u \neq 0$ taký, že $u \perp u_i$ pre všetky $i \in I$).

Tvrdenie 19. Nech X je Hilbertov priestor a $\{u_i; i \in I\}$ je ortonormálny systém. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $\{u_i; i \in I\}$ je úplný,
- (ii) lineárny obal $\{u_i; i \in I\}$ je hustý v X ,
- (iii) $\forall x \in X \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} (x, u_i)^2$,
- (iv) $\forall x, y \in X \quad (x, y) = \sum_{i \in I} (x, u_i)(y, u_i)$.

Definícia 11. Ortonormálny systém v Hilbertovom priestore sa nazýva *ortonormálna báza* priestoru, ak je úplný.

Tvrdenie 20. Nech $X \neq 0$ je Hilbertov priestor. Potom existuje ortonormálna báza (teda úplný ortonormálny systém) tohto priestoru.

Príklady Hilbertových priestorov: Sobolevov priestor $W_2^1, L_2(\langle a, b \rangle), l_2$.

Pár poznámok

Rovnoběžníkové pravidlo možno obrátiť v tom zmysle, že ak ho nejaká norma spĺňa, tak je odvodená od skalárneho súčinu. Ak chceme ukázať, že nejaká norma nie je odvodená od skalárneho súčinu, môže pomôcť toto kritérium ([ŠŠN, úloha 8.1.1]):

Tvrdenie 21. V priestore so skalárnym súčinom platí $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = \alpha y$.

Ak $u_n, n \in \mathbb{N}$ je spočítateľná ortonormálna báza, tak pre každé $x \in X$ platí $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x, u_n) u_n$. (Lineárny obal je hustý v X , preto v ňom existuje postupnosť konvergujúca k prvku x . Potom sa dá využiť veta 25 z otázky 4.)

Každý nekonečnorozmerný separabilný reálny Hilbertov priestor je izomorfný s l_2 . (V X existuje spočítateľná ortonormálna báza. $x \mapsto ((x, u_i))_{i \in \mathbb{N}}$. Na surjektívnosť stačí overiť, že pre $\alpha \in l_2 \sum \alpha_i u_i$ konverguje, čo vyplýva z úplnosti.) Dokonca platí, že Hilbertov priestor je jednoznačne určený kardinalitou svojej ortonormálnej bázy (pozri [TAY]).

Situácia je velice, velice jednoduchá.
Tereščák

11 Topologické priestory

Topologické priestory. Otvorené a uzavreté množiny, okolia, husté množiny a pod. Spojité zobrazenia, homeomorfné zobrazenia, otvorené a uzavreté zobrazenia. Spojitý obraz kompaktných a súvislých množín.

Definícia 1. Systém podmnožín množiny X $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na X , ak

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (ii) $A_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,
- (iii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

Dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor* ak $\mathcal{T}$ je topológia na X .

Príklady topologických priestorov:

$(X, \{\emptyset, X\})$ - indiskrétny topologický priestor

$(X, \mathcal{P}(X))$ - diskretný topologický priestor

$(X, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ je konečná}\}$ - kofinitná topológia

Každý metrický priestor určuje topológiu.

Definícia 2. Množiny patriace do $\mathcal{T}$ nazývame *otvorené* a ich doplnky *uzavreté* množiny.

Tvrdenie 1.

- (i) $\emptyset$ a X sú uzavreté,
- (ii) prienik ľubovoľného systému uzavretých množín je uzavretá množina,
- (iii) zjednotenie konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina.

Definícia 3. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$. $\overline{A} = \cap \{F : A \subseteq F, F \text{ je uzavretá v } X\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A v X .

Tvrdenie 2.

- (i) A je uzavretá $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,
- (ii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
- (iii) $A \subseteq \overline{A}$,
- (iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
- (v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definícia 4. Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $Y \subseteq X$, tak $\mathcal{T}^* = \{G \cap Y : G \in \mathcal{T}\}$ je topológia na Y a nazýva sa *relatívnou topológiou* indukovanou na Y topológiou $\mathcal{T}$. $(Y, \mathcal{T}^*)$ sa nazýva *topologický podpriestor* priestoru X .

Definícia 5. Nech X je topologický priestor a $x \in V \subseteq X$. V sa nazýva *okolie* bodu x , ak existuje otvorená množina U taká, že $x \in U \subseteq V$.

Veta 1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ každé okolie bodu x má neprázdny prienik s A (pretína množinu A).

11.1 Typy bodov a množín v topologických priestoroch

Definícia 6. Bod p topologického priestoru X sa nazýva *izolovaný bod* priestoru X , ak množina $\{p\}$ je otvorená v X . Bod $p \in A \subseteq X$ je *izolovaný bod* množiny A , ak je izolovaný v topologickom podpriestore A priestoru X .

Definícia 7. Bod $p \in X$ je *hromadný bod* množiny $A \subseteq X$, ak ľubovoľné okolie bodu p obsahuje bod množiny A rôzny od p . Množina všetkých hromadných bodov množiny A sa označuje $D(A)$ a nazýva sa *derivácia množiny* A .

Tvrdenie 3. *Nech X je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom platí:*

- (i) $\overline{A} = A \cup D(A)$,
- (ii) množina A je uzavretá práve vtedy, keď $D(A) \subseteq A$ (A obsahuje všetky svoje hromadné body.)

Definícia 8. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$. Potom množina $\text{Int } A = \bigcup \{G : G \subseteq A, G \in \mathcal{T}\}$ sa nazýva *vnútro* množiny A a množina $H(A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ *hranica* množiny A . Prvky množiny $\text{Int } A$ nazývame *vnútorné body* a prvky množiny $H(A)$ nazývame *hraničné body* množiny A .

Tvrdenie 4. (i) A je otvorená $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$,

(ii) $A \subseteq \text{Int } A \cup H(A)$,

(iii) ak A je uzavretá, tak $A = \text{Int } A \cup H(A)$.

(iv) $\text{Int } A = X \setminus \overline{X \setminus A}$

(v) $\overline{A} = \text{Int } A \cup H(A)$

Definícia 9. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *hustá* (v X), ak $\overline{A} = X$.

Tvrdenie 5. Množina $A \subseteq X$ je hustá v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina G otvorená v X má neprázdny prienik s množinou A .

Definícia 10. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *perfektná*, ak $A = D(A)$.

Veta 2. Množina $A \subseteq X$ je perfektná práve vtedy, keď A je uzavretá a nemá izolované body.

Definícia 11. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *riedka* (v priestore X), ak $\text{Int } \overline{A} = \emptyset$.

Veta 3. Množina $A \subseteq X$ je riedka v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina $G \subseteq X$ obsahuje takú neprázdnu otvorenú podmnožinu $H \subseteq G$, že $H \cap A = \emptyset$.

11.2 Báza topológie, báza okolí

Definícia 12. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém množín $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *báza topológie* $\mathcal{T}$, ak každá množina $z \in \mathcal{T}$ je zjednotením množín $z \in \mathcal{B}$.

Tvrdenie 6. *Nutná a postačujúca podmienka na to, aby $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bola báza nejakej topológie na X sú:*

- (i) $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = X$,

(ii) ak $A, B \in \mathcal{B}$ a $p \in A \cap B$, tak existuje taká množina $V \in \mathcal{B}$, že $p \in V \subseteq A \cap B$.

Definícia 13. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *priestor so spočítateľnou bázou*, ak existuje spočítateľná báza $\mathcal{B}$ pre topológiu $\mathcal{T}$. Hovoríme potom, že X spĺňa *druhú axiómu spočítateľnosti*.

Definícia 14. Topologický priestor X sa nazýva *separabilný*, ak v X existuje hustá spočítateľná podmnožina.

Tvrdenie 7. Ak X je priestor so spočítateľnou bázou, tak X je separabilný.

Pre metrické priestory platí aj obrátená implikácia.

Definícia 15. Hovoríme, že systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ je *subbáza* topológie $\mathcal{T}$, ak systém pozostávajúci zo všetkých konečných prienikov množín z $\mathcal{S}$ tvorí bázu topológie $\mathcal{T}$.

Definícia 16. Nech X je topologický priestor a $p \in X$. Množina $\mathcal{B}$ okolí bodu p sa nazýva *báza okolí bodu p* , ak $p \in B$ pre všetky $B \in \mathcal{B}$ a pre každé okolie V bodu p existuje množina $B \in \mathcal{B}$ taká, že $B \subseteq V$.

Definícia 17. Ak $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ sú topologické priestory, tak $(\prod X_i, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T}$ je určená subbázou $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$ (p_i označujeme projekcie z karteziánskeho súčinu $\prod X_i$ na množinu X_i) sa nazýva *topologický súčin* topologických priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. (Teda báza topológie topologického súčinu obsahuje množiny tvaru $\prod_{i \in I} V_i$, pričom $V_i \in \mathcal{T}_i$ pre všetky $i \in I$ a $V = X_i$ pre všetky $i \in I$ až na konečný počet.)

11.3 Zobrazenia topologických priestorov

Definícia 18. Nech $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{S})$ sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je

- (i) *spojité*, ak pre každú otvorenú množinu $U \subseteq Y$ je jej vzor $f^{-1}(U)$ otvorená v X ,
- (ii) *homeomorfizmus*, ak f je bijekcia a f aj f^{-1} sú spojité,
- (iii) *uzavreté*, ak obraz každej uzavretej množiny je uzavretá,
- (iv) *otvorené*, ak obraz každej otvorenej množiny je otvorená.

Tvrdenie 8. Nech X a Y sú topologické priestory, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) f je spojité,
- (ii) vzor každej uzavretej množiny v zobrazení f je uzavretá množina,
- (iii) pre každú podmnožinu $A \subseteq X$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Tvrdenie 9. Ak X a Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je bijekcia, tak sú ekvivalentné podmienky:

- (i) f je homeomorfizmus,
- (ii) f je spojité a otvorené,
- (iii) f je spojité a uzavreté.

11.4 Súvislý topologický priestor

Definícia 19. Topologický priestor X sa nazýva *súvislý*, ak nie je zjednotením svojich dvoch neprázdnych uzavretých disjunktných podmnožín.

Veta 4. Ak $f: (X, T) \rightarrow (Y, S)$ je spojité, surjektívne a (X, T) je súvislý, tak aj (Y, S) je súvislý. (Spojité obraz súvislého topologického priestoru je súvislý.)

11.5 Kompaktný topologický priestor

Definícia 20. Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak každé jeho otvorené pokrytie obsahuje konečné podpokrytie.

Definícia 21. Hovoríme, že systém množín je *centrovaný*, ak každý jeho konečný podsystem má neprázdny prienik.

Tvrdenie 10. Topologický priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín má neprázdny prienik.

Tvrdenie 11. Uzavretá podmnožina kompaktného topologického priestoru je kompaktná.

Tvrdenie 12. Kompaktný podpriestor hausdorffovského priestoru je uzavretý.

Veta 5. Spojitý obraz kompaktného topologického priestoru je kompaktný.

Veta 6 (Tichonovova). Ak X_γ , $\gamma \in \Gamma$ sú kompaktné topologické priestory, tak ich topologický súčin $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ je kompaktný.

Keď človek nemá,
hľadá, čo je na zemi.
Medveď - hľadajúci kriedu

12 Lineárne diferenciálne rovnice a ich systémy

Lineárna diferenciálna rovnica n -tého rádu a lineárne diferenciálne systémy. Štruktúra množín riešení, rovnice a systémy s konštantnými koeficientami.

12.1 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Definícia 1. Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Obyčajná diferenciálna rovnica 1. rádu v D je rovnica tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Ak $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$, tak je ekvivalentná systému rovníc $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x)$.

Nech zobrazenie $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité. Riešenie diferenciálnej rovnice $\frac{dx}{dt} = p(t)x$ na intervale $I \subset \mathbb{R}$ je také spojité diferencovateľné zobrazenie $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, že

(i) $(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in I$,

(ii) $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$

Lineárna homogénna diferenciálna rovnica 1. rádu je rovnica tvaru

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x, \tag{12.1}$$

$p: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Veta 1. Pre každé $t_0 \in (a, b)$ a každé $x_0 \in \mathbb{R}$ má začiatočná úloha

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(t)x \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{12.2}$$

práve jedno riešenie $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \cdot x_0.\tag{12.3}$$

Každé riešenie $x(t)$ rovnice (12.1) má tvar

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \cdot C,\tag{12.4}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica 1. rádu v $\mathbb{R}$ je rovnica tvaru

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + f(t),\tag{12.5}$$

kde $p, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie a $f(t) \not\equiv 0$.

Veta 2. Pre každé $t_0 \in (a, b)$ a každé $x_0 \in \mathbb{R}$ má začiatočná úloha

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(t)x + f(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{12.6}$$

práve jedno riešenie

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau.\tag{12.7}$$

Každé riešenie $x(t)$ diferenciálnej rovnice (12.5) má tvar $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, kde $x_p(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau p(s)ds} f(\tau) d\tau$ je tzv. partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice (12.6) a $x_h(t) = C e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}$ je všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice.

Bernoulliho rovnica je rovnica tvaru $x' = p(t)x + f(t)x^n$, ktorú riešime prevedením do tvaru $x^{-n}x' - p(t)x^{1-n} = f(t)$ a substitúciou $y = x^{1-n}$.

12.2 Lineárne diferenciálne systémy

čiže lineárne diferenciálne rovnice v $\mathbb{R}^n$. Najprv niečo o homogénnych

$$\dot{x} = A(t)x\tag{12.8}$$

Veta 3. Množina riešení (12.8) tvorí n -rozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Definícia 2. Každá množina $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárne nezávislých riešení (12.8) sa nazýva *fundamentálny systém* riešení. $\Phi(t) = (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$ sa nazýva *fundamentálna matica* systému (12.8) (riešenia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tvoria jej stĺpce). Ak $\Phi(0) = I_n$, potom $\Phi(t)$ sa nazýva *normálna fundamentálna matica*.

Lema 1. $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \forall t \in I$, čiže fundamentálna matica je maticové riešenie (12.8).

Veta 4. Maticové riešenie $\Phi(t)$ rovnice (12.8) je fundamentálna matica tejto rovnice $\Leftrightarrow \det \Phi(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Definícia 3. $R(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$ je rezolventa (12.8).

Veta 5. Začiatková úloha

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{12.9}$$

má riešenie tvaru $x(t) = R(t, t_0)x_0$.

Nehomogénny lineárny systém: $\dot{x} = A(t)x + f(t)$.

Veta 6. Ak $\Phi(t)$ je fundamentálna matica homogénnej diferenciálnej rovnice $\dot{x} = A(t)x$, potom $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)f(s)ds$ je riešenie začiatkovej úlohy $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $x(t_0) = x_0$.

Dôkaz. Metódou variácie konštánt, t.j. riešenie hľadáme v tvare $x(t) = \Phi(t)c(t)$.

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t)$$

$$A(t)x(t) + f(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + f(t)$$

$$\Phi(t)\dot{c}(t) = f(t)$$

$$c(t) = K + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$x(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t)K + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

K určíme z rovnosti $x_0 = x(t_0) = \Phi(t_0)K \Rightarrow K = \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)f(s)ds$$

□

Lema 2 (Liouvilleova formula). Ak $\Phi(t)$ je maticové riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{x} = A(t)x$, potom pre každé $t_0 \in \mathbb{R}$ platí $\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s)ds}$.

Dôsledok 1. Ak $\det \Phi(t_0) \neq 0$ pre nejaké $t_0 \in \mathbb{R}$, tak $\det \Phi(t) \neq 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

12.3 Lineárne diferenciálne rovnice n -tého rádu

Označme

$$L_n u = a_0(t) \frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{du}{dt} + a_n(t) u, \quad (12.10)$$

kde $a_0, \dots, a_n, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité.

Lineárnou diferenciálnou rovnicou n -tého rádu nazývame rovnicu

$$L_n u = f. \quad (12.11)$$

Ak $f(t) \equiv 0$, tak je to *homogénna* diferenciálna rovnica n -tého rádu.

Ak $f(t) \not\equiv 0$, je to *nehomogénna* diferenciálna rovnica n -tého rádu.

Ak $a_0(\tau) = 0$ pre nejaké $\tau \in \mathbb{R}$, je to *singulárna* diferenciálna rovnica n -tého rádu.

Ak $a_0(t) \neq 0$, tak je to *regulárna* diferenciálna rovnica n -tého rádu.

My sa budeme zaoberať len regulárnymi. V tom prípade je možné predpokladať, že $a_0(t) \equiv 1$ (rovnice môžeme predeliť).

Pomocou substitúcií $u = x_1, u' = x_2, \dots, u^{(n-1)} = x_n$ ju môžeme previesť na systém diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Ak $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sú riešenia homogénnej rovnice, tak

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je *wronskián* (*Wronského determinant*) riešení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Veta 7. Riešenia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ homogénnej diferenciálnej rovnice $L_n u = 0$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

Definícia 4. Množina lineárne nezávislých riešení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ diferenciálnej rovnice $L_n u = 0$ sa nazýva *fundamentálny systém* riešení tejto diferenciálnej rovnice.

Veta 8. Ak $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $L_n u = 0$, potom každé jej riešenie $\varphi(t)$ má tvar $\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$, kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Veta 9. Nech $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je fundamentálny systém riešení homogénnej diferenciálnej rovnice $L_n u = u^{(n)} + a_1(t)u^{(n-1)} + \dots + a_n(t)u = 0$. Potom riešenie $\psi(t)$ Cauchyho úlohy $L_n u = f(t), u_1(t_0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$ má tvar

$$\psi(t) = \psi_h(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \int_{t_0}^t \frac{W_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(s)} f(s) ds,$$

kde $\psi_h(t)$ je riešením homogénnej začiatočnej Cauchyho úlohy a

$$W_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(s) & \dots & \varphi_{k-1}(s) & 0 & \varphi_{k+1}(s) & \dots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \dots & \varphi_{k-1}'(s) & 0 & \varphi_{k+1}'(s) & \dots & \varphi_n'(s) \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(s) & \dots & \varphi_{k-1}^{(n-1)}(s) & 1 & \varphi_{k+1}^{(n-1)}(s) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}.$$

12.4 Metóda variácie konštánt

$$\begin{aligned} L_2 y &= \ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = f(t) \\ y(t_0) &= y_0, \dot{y}(t_0) = y_1 \end{aligned} \quad (12.12)$$

Nech $x_1(t)$, $x_2(t)$ je fundamentálny systém riešení homogénnej diferenciálnej rovnice $L_2 y = 0$. Hľadáme riešenie (12.12) v tvare

$$y(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

Dostaneme $\dot{y}(t) = \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2$. Zvolíme $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0$ a máme $\dot{y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2$, $\ddot{y} = c_1 \ddot{x}_1 + c_2 \ddot{x}_2 + \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2$. Využitím toho, že x_1 , x_2 sú riešenia homogénnej rovnice dostaneme $L_2 y = \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = f$. Sústavu

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) &= 0 \\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) &= f(t) \end{aligned}$$

môžeme riešiť Cramerovým pravidlom, a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \det \begin{pmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \\ \dot{c}_2(t) &= \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \det \begin{pmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{pmatrix} \\ c_1(t) &= \alpha_1 + \int_{t_0}^t \frac{W_1(x_1, x_2)(s)}{W(x_1, x_2)(s)} f(s) ds \\ c_2(t) &= \alpha_2 + \int_{t_0}^t \frac{W_2(x_1, x_2)(s)}{W(x_1, x_2)(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = \\ &= \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + x_1(t) \int_{t_0}^t \frac{W_1(x_1, x_2)(s)}{W(x_1, x_2)(s)} f(s) ds + x_2(t) \int_{t_0}^t \frac{W_2(x_1, x_2)(s)}{W(x_1, x_2)(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

Ak $n \geq 2$, postup je analogický:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{c}_1(t)x_1^{n-2}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{n-2}(t) &= 0 \\ \dot{c}_1(t)x_1^{n-1}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{n-1}(t) &= f(t) \end{aligned}$$

12.5 Lineárne diferenciálne rovnice n -tého rádu s konštantnými koeficientami

Homogénna diferenciálna rovnica rádu n s konštantnými koeficientami je rovnica tvaru

$$L_n u = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} u' + a_n u = 0 \quad (12.13)$$

Definícia 5. Polynóm $P(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ sa nazýva *charakteristický polynóm* diferenciálnej rovnice (12.13).

Lema 3. $L_n(e^{\lambda t}v(t)) = e^{\lambda t} \left[P(\lambda)v(t) + \frac{P^{(1)}(\lambda)}{1!}v^{(1)}(t) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!}v^{(n)}(t) \right]$

Veta 10. Ak $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sú navzájom rôzne korene charakteristického polynómu $P(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ diferenciálnej rovnice (12.13) a násobnosť koreňa λ_i je m_i , potom fundamentálny systém riešení (vo všeobecnosti komplexných) diferenciálnej rovnice (12.13) je $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}$ až $e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \dots, t^{m_s-1}e^{\lambda_s t}$.

12.6 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

Veta 11. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A (vo všeobecnosti komplexné) a $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sú im zodpovedajúce vlastné vektory, pričom predpokladáme, že sú lineárne nezávislé. Potom $e^{\lambda_1 t}\gamma_1, \dots, e^{\lambda_m t}\gamma_m$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice $\dot{x} = Ax$ (čiže tvoria fundamentálny systém).

Veta 12. Nech $\lambda = \sigma + i\omega$, $\omega \neq 0$ je komplexný k -násobný koreň charakteristickej rovnice $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$, pričom k nemu existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov $\xi_1 = g_1 + ih_1, \dots, \xi_k = g_k + ih_k$. Potom množina všetkých riešení tvaru $(a \cos \omega t + b \sin \omega t)e^{\sigma t}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ tvorí $2k$ -rozmerný vektorový priestor V_{2k} (podpriestor množiny všetkých riešení). Jeho bázu tvoria riešenia:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= [g_1 \cos \omega t - h_1 \sin \omega t]e^{\sigma t} \\ &\vdots \\ u_k(t) &= [g_k \cos \omega t - h_k \sin \omega t]e^{\sigma t} \\ v_1(t) &= [h_1 \cos \omega t + g_1 \sin \omega t]e^{\sigma t} \\ &\vdots \\ v_k(t) &= [h_k \cos \omega t + g_k \sin \omega t]e^{\sigma t} \end{aligned}$$

Reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnému číslu λ matice A rozumieme $v_1, v_2, \dots, v_k$, ak spĺňajú $(A - \lambda I)v_1 = 0, (A - \lambda I)v_2 = v_1, \dots, (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$.

Veta 13. Nech $v_1, v_2, \dots, v_m$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A prislúchajúci vlastnej hodnote λ . Potom

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v_1 e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= (v_2 + v_1 t) e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ y_m(t) &= \left(v_m + \frac{1}{1!} v_{m-1} t + \dots + \frac{1}{(m-1)!} v_1 t^{m-1} \right) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice $\dot{x} = Ax$ (nad $\mathbb{C}$).

Matematika je hra. Ak sa hráte, robíte dobre. Ak sa trápíte, nemá to zmysel.
Medveď

13 Picardova existenčná veta

Picardova existenčná veta.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{13.1}$$

Veta 1 (o existencii a jednoznačnosti). *Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ je spojité zobrazenie spĺňajúce Lipschitzovu podmienku vzhľadom na premennú x (t.j. existuje $L > 0$ také, že $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$, $\|\cdot\|$ je euklidovská norma). Potom pre každé $(t_0, x_0) \in D$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ taký, že $t_0 \in I$ a na I existuje práve jedno riešenie úlohy (13.1).*

Tvrdenie 1. *Funkcia x je riešením (13.1) práve vtedy, keď x spĺňa rovnicu*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt \tag{13.2}$$

Na prednáške sa robilo viac dôkazov vety 1, jeden na základe Banachovej vety o pevnom bode, druhý pomocou Picardových aproximácií:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0 \\ x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds\end{aligned}\tag{13.3}$$

Postupnosť Picardových aproximácií je vlastne postupnosť, ktorá vystupuje v dôkaze Banachovej vety o pevnom bode, ktorá konverguje k pevnému bodu. V našom prípade to znamená, že táto postupnosť rovnomerne konverguje k riešeniu diferenciálnej rovnice (13.1). Tretí dôkaz bol pomocou Eulerových polygónov, ktoré sa potom využili aj v dôkaze Peanovej vety.

Definícia 1. Nech $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie a $\varepsilon > 0$. Spojité zobrazenie $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ je interval) sa nazýva ε -približné riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ na intervale I ak

- (i) $(t, x(t)) \in D$ pre všetky $t \in I$,
- (ii) existuje konečná množina $S \subset I$ taká, že x je spojitاً diferencovateľná na $I \setminus S$ a pre každé $s \in S$ existujú $\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{dx(t)}{dt}$, $\lim_{t \rightarrow s^-} \frac{dx(t)}{dt}$, (teda $\frac{dx(t)}{dt}$ je po častiach spojitاً na I),
- (iii) $\|\frac{dx(t)}{dt} - f(t, x(t))\| < \varepsilon$ pre všetky $t \in I \setminus S$.

Lema 1 (Gronwallova). *Nech $\beta: \langle t_0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: \langle t_0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité nezáporné funkcie a $\alpha \geq 0$ je konštanta. Nech*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s) \varphi(s) ds$$

pre všetky $t \geq t_0$. Potom

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s) \varphi(s) ds}$$

Lema 2. *Nech $G = \langle t_0 - a, t_0 + a \rangle \times \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}$ a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje ε -približné riešenie $x(t)$ diferenciálnej rovnice (13.1) na intervale $I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$, kde $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max_{(t,x) \in G} \|f(t, x)\|$.*

ε -približné riešenia z predchádzajúcej lemy sa konštruujú ako Eulerove polygóny, teda po častiach lineárne funkcie, ktorých smernica v „bodoch zlomu“ sa zvolí práve $f(t, x)$. Ukáže sa pomocou rovnomernej konvergenzie f , že ak zvolíme deliace body dostatočne husto, dostaneme ε -približné riešenie.

Lema 3. *Nech φ_1 je ε_1 -približné riešenie a φ_2 je ε_2 -približné riešenie rovnice (13.1) na intervale $I_\alpha = \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ také, že $\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \leq \delta$, $\delta > 0$ a nech f je lipschitzovská s konštantou L . Potom $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq (\delta + \varepsilon\alpha)e^{\alpha L}$ pre $t \in I_\alpha$. ($\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$)*

Veta 2 (Peanova veta o existencii). *Nech $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ je spojité zobrazenie. Potom pre každý bod $(t_0, x_0) \in D$ existuje otvorený interval $I \subseteq \mathbb{R}$, kde $t_0 \in I$, na ktorom je definované riešenie $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (13.1).*

Táto veta sa dokazovala tak, že pre Eulerove polygóny (resp. pre postupnosť ε -približných riešení) sa overila rovnomocná spojitosť a rovnomerná ohraničenosť a z Arzeli-Ascoliho lemy potom vyplynulo, že sa dá vybrať (v $C(I, \mathbb{R}^n)$) konvergentná podpostupnosť.

Veta 3 (o predĺžiteľnosti na interval $I = (-\infty, \infty)$). *Nech $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie spĺňajúce podmienku*

$$\|f(t, x)\| \leq \omega(\|x\|) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

kde $\omega: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité, $\omega(u) > 0$ pre $u > 0$, pričom

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_0}^r \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty, \quad r_0 > 0.$$

Potom pre každé $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existuje riešenie $\varphi: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (13.1).

Človek nemá skúšať všetko, čo prednáša
a nemal by prednášať všetko, čo vie.
Medveď

14 Klasifikácia lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc

Klasifikácia lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc 2. rádu.

Definícia 1. Pod parciálnou diferenciálnou rovnicou rozumieme funkcionálnu rovnicu, v ktorej vystupuje neznáma funkcia $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a ktorá má vo všeobecnosti tvar

$$F(x_1, \dots, x_n, u, D^{(1,0,\dots,0)}u, D^{(0,0,\dots,1)}u, \dots, D^\alpha u) = 0.$$

Riešenie je funkcia, ktorá má spojité derivácie, ktoré v rovnici vystupujú, a spĺňa túto rovnicu. Rád parciálnej diferenciálnej rovnice je maximálna dĺžka multiindexu.

Druhy podmienok:
začiatočné (Cauchyho)

okrajové - môže byť zadaný predpis pre funkciu (Dirichletove) alebo jej deriváciu v smere normály (Neumannove) na okraji danej oblasti, prípadne ich kombinácia.

Z rovníc prvého rádu sme sa zaoberali lineárnymi ($\sum a_i(x)u_i(x) + b(x)u(x) = f(x)$) a kvázilineárnymi ($\sum a_i(x, u(x))u_i(x) = b(x, u(x))$).

Homogénne lineárne parciálne diferenciálne rovnice 1. rádu $\sum f_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ (f_k sú spojité a nie sú v žiadnom $x \in \Omega$ súčasne nulové) sme riešili pomocou charakteristického systému $\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_n)$. Riešenia charakteristického systému sa nazývajú charakteristiky.

Veta 1. $\Psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ je riešenie $\sum f_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \Leftrightarrow \Psi$ je konštantné na každej charakteristike.

Všetky riešenia môžeme získať pomocou fundamentálneho systému riešení $\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$, ktoré sú nezávislé. Ak máme jedno riešenie, toto riešenie je vhodné ako substitúcia na zníženie počtu premenných.

Aj kvázilineárne rovnice sa riešia pomocou charakteristík.

$$\sum_{k=1}^n f_k(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = g(x_1, \dots, x_n, u) \quad (14.1)$$

K uvedenej kvázilineárnej rovnici priradíme lineárnu rovnicu

$$\sum_{k=1}^n f_k(x, u) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k} + g(x, u) \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \quad (14.2)$$

Charakteristický systém kvázilineárnej rovnice (14.1) je charakteristický systém (14.2) ako lineárnej homogénnej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Veta 2. Nech $f_k, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\chi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Nech $\Psi(x, u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ je riešenie lineárnej rovnice (14.2). Nech

(i) $\forall \Omega' \subset \Omega \exists \xi \in \Omega' : \frac{\partial \Psi}{\partial u}(\xi, \chi(\xi)) \neq 0$ (v každej podoblasti),

(ii) $\Psi(x, \chi(x)) = \text{const.}$

Potom χ je riešenie (14.1).

Lineárne parciálne diferenciálne rovnice 2. rádu: Uvažujme lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, z, u, u_x, u_z) = 0$. Jej diskriminant $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ nemení znamienko pri ľubovoľnej transformácii nezávisle premenných. Rovnicu nazveme *hyperbolickou* ak $\Delta > 0$, *parabolickou* ak $\Delta = 0$ a *eliptickou* ak $\Delta < 0$.

Kanonický tvar pre hyperbolickú rovnicu je $u_{\xi\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0$. Kanonický tvar pre parabolickú rovnicu je $u_{\xi\xi} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0$. Kanonický tvar pre eliptickú rovnicu je $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0$.

Transformácie $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, ktoré prevedú uvedenú diferenciálnu rovnicu na kanonický tvar hľadáme pomocou rovníc $a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$, $a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2 = 0$, ktoré riešime metódou charakteristík. V závislosti od typu rovnice dostaneme dve riešenia (hyperbolická), jedno riešenie, ktoré doplníme ľubovoľnou nezávislou funkciou (parabolická) alebo dve komplexné riešenia, ktorých reálnu a imaginárnu časť zvolíme za použité transformácie (eliptická).

Pre parciálne rovnice 2. rádu viac premenných určíme typ rovnice na základe vlastných čísel matice určenej koeficientmi, ak majú rovnaké znamienko, ide o eliptickú rovnicu (kvadratická forma daná touto maticou určuje elipsu/elipsoid), ak sú nenulové a nemajú rovnaké znamienka, ide o hyperbolickú rovnicu (hyperbola) a ak je jedno nulové a ostatné majú rovnaké znamienka, ide o parabolickú rovnicu.

Parciálne diferenciálne rovnice sú modelmi rôznych fyzikálnych javov. Parabolické rovnice sú napríklad rovnica pre vedenie tepla $\text{div}(k\nabla u) + f(t, x) = \rho u_t$ ($k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$) a rovnica spojitosti $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Rovnica pre priečne kmitanie struny $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ je príkladom hyperbolickej rovnice.

Volovi je všetko jasné.

Vencko

15 Cauchyho úloha

Cauchyho úloha pre vlnovú rovnicu (D'Alembertov vzorec), jednoznačnosť riešenia.

Najprv sme preberali dôkazy jednoznačnosti pre začiatovo-okrajové úlohy (pre všetky tri typy rovníc), potom princíp maxima pre parabolické a eliptické rovnice, z ktorých tiež vyplýva jednoznačnosť riešenia týchto úloh. Otázka sa týka (asi) iba jednoznačnosti Cauchyho úlohy, v jej dôkaze sa využíva princíp maxima pre parabolické rovnice, tak som sem dal aj ten.

15.1 Princíp maxima a minima pre parabolické rovnice

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ohraničená oblasť, $T > 0$,
 $\overline{Q_T} = \{x \in \overline{\Omega}; 0 \leq t \leq T\}$

Uvažujme rovnicu:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \nabla u) &= \rho u_t, x \in \Omega, t \in (0, T) \\ k(x) &> 0, \rho(x) > 0 \end{aligned} \quad (15.1)$$

Veta 1 (o maxime a minime). *Každé riešenie rovnice (15.1) $u \in C(\overline{Q_T}, \mathbb{R})$ nadobúda najväčšiu a najmenšiu hodnotu na dolnej hranici $\overline{Q_T}$ ($t = 0$) alebo na plášti valca $P = \{x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T\}$.*

Fyzikálny význam princípu maxima a minima je v tom, že teplo sa šíri z miesta s vyššou teplotou na miesta s nižšou teplotou a teploty sa pritom vyrovnávajú. (Pri tepelnej výmene s okolím sa môže maximum dosahovať na okraji v čase $t > 0$.)

Dôsledok 1 (princíp porovnávania riešení). *Nech $u_1, u_2 \in C(\overline{Q}, \mathbb{R})$ sú riešenia rovnice $\operatorname{div}(k \nabla u) + f(t, x) = \rho u_t$, $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ pre $(t, x) \in \Gamma = \{x \in \partial\Omega, t \geq 0\} \cup \{x \in \Omega, t = 0\}$. Potom $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ pre $(t, x) \in \overline{Q}$.*

Dôsledok 2 (spojitá závislosť na začiatkových a okrajových podmienkach - veta o stabilite). *Nech sú dané dve Dirichletove zmiešané úlohy: $\operatorname{div}(k \nabla u) + f(t, x) = \rho u_t$, $u|_{\Gamma} = \psi_{1,2}(t, x)$, $u(0, x) = \varphi_{1,2}(x)$ a $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon$, $|\psi_1(t, x) - \psi_2(t, x)| \leq \varepsilon$ $t \geq 0$, $x \in \partial\Omega$. Potom $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \varepsilon$ pre $(t, x) \in \overline{Q}$.*

Dôsledok 3. *$\operatorname{div}(k \nabla u) + f(t, x) = \rho u_t$, $u|_{\Gamma} = \psi(t, x)$, $u(0, x) = \varphi(x)$ má najviac jedno riešenie.*

15.2 Princíp maxima a minima pre eliptické rovnice

Veta 2. *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť, nech $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ je harmonická funkcia. Potom u dosahuje maximum aj minimum na $\partial\Omega$.*

Dôsledkom sú jednoznačnosť riešenia Dirichletovej úlohy, spojitá závislosť riešenia, porovnávací princíp a to, že ak postupnosť harmonických funkcií rovnomerne konverguje na hranici ohraničenej oblasti, potom rovnomerne konverguje v celej oblasti a limita je harmonická funkcia.

15.3 Jednoznačnosť riešenia Cauchyho úlohy

Pri Cauchyho úlohe ide o neohraničenú oblasť, v našom prípade $\mathbb{R}^n$.

Pre parabolickú úlohu:

$$\begin{aligned} a^2 \Delta u + f(t, x) &= u_t \\ u(0, x) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (15.2)$$

Veta 3. *Riešenie Cauchyho úlohy (15.2) $u \in C(\langle 0, \infty \rangle \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ktoré je navyše ohraničené, je určené jednoznačne.*

Vraj sa to dá dokázať aj bez tej ohraničenosti.

Pre hyperbolickú úlohu:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{tt}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0, x) &= g(x), x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (15.3)$$

Definícia 1. *Charakteristický kužeľ k rovnici (15.3) je $Z_r(x_0) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 < t < r, \|x - x_0\| < r - t\}$.*

Lema 1. *Ak $u \in C^2(\overline{Z_r(0)}, \mathbb{R})$ je riešenie (15.3) s nulovými počiatočnými podmienkami, tak je nulové na celom charakteristickom kuželi.*

Veta 4. *Cauchyho úloha pre rovnicu (15.3) má na zjednotení všetkých charakteristických kužeľov s podstavou v Ω najviac jedno riešenie.*

15.4 Existencia riešenia Cauchyho úlohy pre hyperbolickú rovnicu ak $n = 1$

Rovnica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ t > 0, x &\in (-\infty, \infty) \\ u(0, x) &= f(x), \frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = g(x) \end{aligned}$$

má riešenie

$$u(t, x) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau$$

Uvedený vzorec (d'Alembertova formula) udáva klasické riešenie v prípade, že g je raz a f dvakrát spojitely diferencovateľné, vždy však udáva riešenie v zmysle distribúcií.

Na prednáške sme mali aj vzorce pre $n = 2, 3$, bez odvodnenia.

TODO Treba sem dať aj Greenovu funkciu?

15.5 Jednoznačnosť riešenia začiatko-okrajových úloh

V ďalšom budeme často používať vzťah

$$\int_{\Omega} L(v) w dx = - \int_{\Omega} k(x) \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} q v w dx + \int_{\partial \Omega} k w \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds, \quad (*)$$

ktorý sa dá odvodiť napríklad v takto: Ak v (Arseninovi) známom vzorci $\operatorname{div}(p \vec{E}) = p \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla p$ položíme $p = w$ a $\vec{E} = k \nabla v$, tak máme $\int_{\Omega} L(v) w = \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla u) w - \int_{\Omega} q v w dx =$

$\int_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla v w) - \int_{\Omega} k \nabla v \nabla w - \int_{\Omega} q v w dx$ a teraz už stačí použiť vetu o divergencii. (Na prednáške sme to bolo pomocou per partes, je to v podstate ten istý postup. Takto je to v [ARS].)

Keď sme dokazovali jednoznačnosť riešenia pre rôzne typy rovníc, vždy sme postupovali tak, že sme predpokladali existenciu dvoch riešení $u_1 \neq u_2$ nehomogénnej rovnice s ľubovoľnými začiatočnými a okrajovými podmienkami a ich odčítaním sme získali nenulové riešenie $v = u_1 - u_2$ homogénnej rovnice s nulovými počiatočnými a okrajovými podmienkami. O tomto riešení potom ukážeme, že musí byť nulové. Zaoberali sme sa klasickými riešeniami, teda sme predpokladali, že riešenia sú funkcie spojitely diferencovateľné na $\overline{\Omega}$ toľkokrát, aký je rád rovnice.

Hyperbolické

$$L(u) = \operatorname{div}(k(x) \nabla u) - q(x)u + f(t, x) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15.4)$$

$$\gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \gamma_2(x)u|_{\partial \Omega} = g(t, x), \quad t \geq 0 \quad (15.5)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (15.6)$$

Veta 5. *Začiatočno-okrajová úloha (15.4)-(15.6) má jediné riešenie $u \in C^1(\overline{B}, R)$ ($B = \{(x, t); x \in \overline{\Omega}, t \geq 0\}$).*

Máme v , pre ktoré platí $L(v) = \rho(x)v_{tt}$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(x)v_{tt}v_t dx &= \int_{\Omega} L(v)v_t dx \stackrel{(*)}{=} \int_{\partial \Omega} k v_t \frac{\partial v}{\partial \overline{n}} ds - \int_{\Omega} k \nabla v \nabla v_t dx - \int_{\Omega} q v v_t dx \\ \int_{\Omega} \rho(x)v_{tt}v_t dx &+ \int_{\Omega} k \nabla v (\nabla v)_t dx + \int_{\Omega} q v v_t dx = \int_{\partial \Omega} k v_t \frac{\partial v}{\partial \overline{n}} ds \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t} (v_t^2) &+ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla v)^2 + q \frac{\partial}{\partial t} (v^2) dx = \int_{\partial \Omega} k v_t \frac{\partial v}{\partial \overline{n}} ds \end{aligned}$$

V prípade Dirichletovej úlohy ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$) a Neumannovej úlohy ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) je člen na pravej strane 0. Celú rovnosť zintegrujeme podľa t od 0 po T , zameníme poradie integrovania a využijeme tiež to, že $v_t(0, x) = v(0, x) = \nabla v(0, x) = 0$. Dostaneme

$$\int_{\Omega} \rho v_t^2(T, x) dx + \int_{\Omega} k (\nabla v)^2(T, x) dx + \int_{\Omega} q v^2(T, x) dx = 0$$

Pretože o funkcii k predpokladáme $k(x) > 0$, dostaneme $\nabla v = 0$. Súčasne vieme, že na hranici $\partial \Omega$ je $v = 0$, preto musí platiť $v = 0$ všade.

V prípade Newtonovej podmienky platí $\frac{\partial v}{\partial \overline{n}}|_{\partial \Omega} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} v|_{\partial \Omega}$, pričom sme predpokladali, že $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, preto na pravej strane dostaneme $-\int_{\partial \Omega} k v_t \frac{\gamma_2}{\gamma_1} v v_t ds$ a po zintegrovaní cez T dostaneme na pravej strane záporné číslo $-\int_{\partial \Omega} k v_t \frac{\gamma_2}{\gamma_1} v^2(T, x) ds$, teda opäť môžeme použiť ten istý argument.

Parabolické rovnice

Teraz sa venujeme rovnici tvaru $L(u) + f(t, x) = \rho(x)u_t$ pričom máme len jednu začiatočnú podmienku $u(0, x) = \varphi(x)$. Opäť prevedieme dôkaz jednoznačnosti na dôkaz, že riešenie homogénnej rovnice s homogénnymi podmienkami je nulové.

Pre v platí $L(v) = \rho(x)v_t$. Tentokrát položíme $w(x) = v(x)$ a dostaneme

$$\int_{\Omega} \rho v_t v dx = \int_{\Omega} L(v) v dx = - \int_{\Omega} k(\nabla v)^2 dx - \int_{\Omega} q v^2 dx + \int_{\partial\Omega} k v \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

V prípade Dirichletovej alebo Neumannovej podmienky je posledný člen nulový. Dostaneme, že $\frac{\partial}{\partial t}(v^2)$ je skoro všade rovné 0, zo spojitosti potom aj celkom všade a tým máme, že $v = 0$.

V prípade Newtonovej úlohy budeme použiť podobný trik ako minule.

Eliptické

Zaoberáme sa rovnicou $L(u) = f(x)$ na okraji platí $\gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2(x) u|_{\partial\Omega} = g(x)$, začiatkové podmienky pochopiteľne nie sú.

Máme $L(v) = 0$ a zintegrovaním tejto rovnosti cez Ω dostaneme

$$\int_{\Omega} k(\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} q v^2 dx - \int_{\partial\Omega} k v \frac{\partial v}{\partial n} dx.$$

V prípade Dirichletovej podmienky je posledný člen 0, preto $v = 0$. V prípade Newtonovej podmienky rovnakým postupom ako pri predchádzajúcich dvoch typoch rovníc dostaneme člen, v ktorom bude vystupovať nezáporný násobok v^2 .

Pri Neumannovej podmienke takisto v prípade $q \neq 0$ dostaneme jednoznačnosť. V prípade $q = 0$ (čo je prípad Laplaceovej rovnice) dostaneme $\nabla v = 0$ na $\overline{\Omega}$, pre je v konštantné. To znamená, že v tomto prípade je riešenie určené jednoznačne až na konštantu.

(Neviem, to len tak mimochodom, nemali by sme to rozdeliť na dva prípady $q = 0$ a $q \neq 0$ aj pre Newtonovu podmienku?)

Do kelu! Vy mi nič nepoviete.

Ďurikovič

16 Fourierova metóda

Fourierova metóda pre hyperbolické, parabolické a eliptické zmiešané a okrajové úlohy (vlnová rovnica, rovnica pre vedenie tepla, Laplaceova rovnica.

16.1 Fourierova metóda - rovnice hyperbolického a parabolického typu

$$L(u) = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - q(x)u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (16.1)$$

$$\gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2(x) u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (16.2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad u_t(0, x) = \varphi_1(x) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (16.3)$$

Pričom: $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, všetky tieto funkcie sú spojité. γ_1 a γ_2 sú spojité na $\partial\Omega$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ a $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$.

$A = \{f: (\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je spojité na } \overline{\Omega}, \text{ má po častiach spojitú 1. a 2. deriváciu na } \Omega \text{ a spĺňa (16.2)}\}$.

Hľadáme riešenie uvedenej rovnice v tvare $u(t, x) = T(t)\Phi(x)$.

$$\frac{L(\Phi)}{\rho\Phi}(x) = \frac{T''}{T}(t) = -\lambda$$

$$L(\Phi) + \lambda \rho \Phi = 0 \quad (16.4)$$

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (16.5)$$

$$\gamma_1(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial \bar{n}} + \gamma_2(x) \Phi(x)|_{x \in \partial \Omega} = 0 \quad (16.6)$$

(16.4), (16.6) - Sturm-Liouvillova úloha

Táto úloha má spočítateľnú množinu vlastných čísel λ_n a im zodpovedajúce vlastné funkcie Φ_n tvoria úplnú ortonormálnu bázu priestoru $L_2(\Omega)$ s váhou $\rho(x)$, teda každú funkciu z $L_2(\Omega)$ možno rozvinúť do Fourierovho radu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$ a $c_n = \frac{\int_{\Omega} \rho(x) f(x) \Phi_n(x) dx}{\int_{\Omega} \rho(x) \Phi_n^2(x) dx}$. (Možno nie je celkom správny, ale je tu aspoň pokus o nejaké zdôvodnenie. $L: A \rightarrow L_2(\Omega)$ je samoadjungovaný operátor a L^{-1} je kompaktný. Ďalej využijeme to, že funkcia a funkcia k nej inverzná majú rovnaké vlastné funkcie.)

(16.5) má riešenie $T_n(t) = C_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + D_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$. Riešenie (16.1)–(16.3) bude potom $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x) T_n(t)$ a konštanty, ktoré tu vystupujú možno vyrátať ako $C_n = \frac{\int \rho(x) \varphi(x) \Phi_n(x) dx}{\int \rho(x) \Phi_n^2(x) dx}$, $D_n = \frac{\int \rho(x) \varphi_1(x) \Phi_n(x) dx}{\sqrt{\lambda_n} \int \rho(x) \Phi_n^2(x) dx}$.

V parabolickom prípade dostaneme riešenie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x)$ a $C_n = \frac{\int \rho(x) \varphi(x) \Phi_n(x) dx}{\int \rho(x) \Phi_n^2(x) dx}$.

16.2 Nehomogénne úlohy

$$L(u) + f(t, x) = \operatorname{div}(k(x) \nabla u) - q(x) u + f(t, x) = \rho(x) u_{tt} \quad (\rho(x) u_t) \quad (16.7)$$

$$\gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \gamma_2(x) u|_{\partial \Omega} = 0 \quad (16.8)$$

$$u(0, x) = 0 = u_t(0, x) \quad (16.9)$$

Riešenie opäť hľadáme v tvare $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \Phi_n(x)$. Ak $\frac{f(t, x)}{\rho(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \Phi_n(x)$ (rozvoj do Fourierovho radu), tak máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) L \Phi_n(x) + \rho(x) f_n(t) \Phi_n(x) = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \Phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n c_n(t) + f_n(t) - c_n''(t)] \Phi_n(x) = 0$$

Potom všetky koeficienty musia byť 0:

$$c_n''(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t) \quad (c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t))$$

$$c_n(0) = c_n'(0) = 0$$

Takto dostaneme riešenie (16.7), (16.8), (16.9).

$$L(u) + f(t, x) = \operatorname{div}(k(x) \nabla u) - q(x) u + f(t, x) = \rho(x) u_{tt} \quad (\rho(x) u_t) \quad (16.10)$$

$$\gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \gamma_2(x) u|_{\partial \Omega} = 0 \quad (16.11)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad u_t(0, x) = \varphi_1(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (16.12)$$

Riešenie tejto úlohy hľadáme ako súčet riešenia homogénnej úlohy, ktoré spĺňa dané počiatočné podmienky a nehomogénnej úlohy s nulovými počiatočnými podmienkami.

Ak sú nehomogénne aj okrajové podmienky, tak hľadáme riešenie v tvare súčtu riešenia pre nehomogénnu rovnicu s homogénnymi podmienkami a riešenia homogénnej rovnice s nehomogénnymi podmienkami, ktoré treba uhádnuť. (Ak sú podmienky v tvare $f_1(x) \cdot f_2(t)$, možno ho hľadať tiež separáciou.) Niekedy možno nájsť riešenie tejto rovnice, ktoré nezávisí od času - ide o ustálený stav daného systému.

16.3 Laplaceova úloha

Pri úlohách eliptického typu treba použiť transformáciu (polárne, sférické, cylindrické súradnice), a potom sa dá použiť Fourierova metóda.

Polárne súradnice: $\nabla u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$.

Sférické súradnice: $x = r \sin \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \cos \theta$, $z = r \cos \varphi \Rightarrow \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ (?)

Cylindrické súradnice: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z \Rightarrow \nabla u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Riešenie Laplaceovej úlohy na kruhu

Túto úlohu môžeme riešiť Fourierovou metódou. Ak do rovnice $\nabla u = 0$ vyjadrenej v polárnych súradniciach dosadíme $u(r, \varphi) = F(r)\Psi(\varphi)$, dostaneme po úprave

$$\frac{rF'(r) + r^2F''(r)}{F(r)} = -\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)} = \lambda$$

Najprv riešime rovnicu $\Psi''(\varphi) + \lambda\Psi(\varphi) = 0$ s podmienkou $\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi)$. Táto rovnica má riešenie tvaru $\Psi(\varphi) = a \cos \sqrt{\lambda}\varphi + b \sin \sqrt{\lambda}\varphi$ a musí platiť $\sqrt{\lambda} = n$, $\lambda = n^2$. Máme teda riešenia $\Psi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$.

Ďalej dostaneme rovnicu $r^2F''(r) + rF'(r) = n^2F(r)$. Riešenie hľadáme v tvare r^α . Dostaneme dve riešenia r^n a $\frac{1}{r^n}$. Pretože riešenie, ktoré hľadáme, je v 0 ohraničené (to vieme z vlastností harmonických funkcií), tak použijeme iba r^n .

Výsledok je v tvare $u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi)r^k$. Koefficienty možno určiť pomocou okrajovej podmienky $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ ako $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{d} \varphi B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) \cos k\varphi}{R^k} d\varphi$ a $A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) \sin k\varphi}{R^k} d\varphi$.

Ďalšími úpravami sa tento tvar riešenia dal upraviť na Poissonov vzorec:

$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(t)dt}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \theta)}$. Ak si chcete pre zaujímavosť pozrieť jeho odvodenie pomocou komplexnej analýzy, môžete ho nájsť v [CA].

Jednoznačnosť riešenia Laplaceovej úlohy je v predchádzajúcej otázke.

Už ste mali vetu o spektrálnom poromele?

Fečkan

Literatúra

[ARS] V.Arsenin: *Matematická fyzika*

[BS] M.Barnovská, K.Smítalová: *Matematická analýza III*

[BM] I.Bock, Ľ.Marko: *Diferenciálne rovnice* (skriptá FEI STU)

- [BH] I.Bock, J.Horniaček: *Matematická analýza III*
- [BR] P.Brunovský: *Nelineárna analýza* (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta)
- [CA] G.Cain: *Complex Analysis* (www.math.gatech.edu/~cain)
- [CH] G.Cain, J.Herod: *Multivariable Calculus* (www.math.gatech.edu/~cain)
- [Ď] V.Ďurikovič: *Matematická analýza 4 - Integrálny počet v $\mathbb{R}^n$*
- [FR] D.H.Fremlin: *Measure theory* (www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin)
- [GĎ] M.Gera, V.Ďurikovič: *Matematická analýza 1*
- [GŠŠ] M.Greguš, M.Švec, M.Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice*
- [JAR] V.Jarník: *Integrálny počet I*
- [ND] T.Neubrunn, J.Dravecý: *Vybrané kapitoly z matematickej analýzy*
- [NS] A.Naylor, G.Sell: *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*
- [NV1] T.Neubrunn, J.Vencko: *Matematická analýza I*
- [NV2] T.Neubrunn, J.Vencko: *Matematická analýza II*
- [Q] P.Quittner: *Funkcionálna analýza v príkladoch* (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta)
- [RN] B.Riečan, T.Neubrunn: *Teória miery*
- [MEM] T.Šalát a kol.: *Malá encyklopédia matematiky*
- [ŠEV] D.Ševčovič: *Parciálne diferenciálne rovnice* (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta)
- [ŠŠN] M.Švec, T.Šalát, T.Neubrunn: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*
- [TAY] A.E.Taylor: *Úvod do funkcionální analýzy*