1 Stirlingova formula[1]

Odvodíme známu *Stirlingovu formulu*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pod $f(n) \sim g(n)$ rozumieme, že podiel pravej a ľavej strany konverguje pre $n \to \infty$ k 1.

Tu uvedené odvodenie je van der Waerdenovo odvodenie z [1] a možno ho nájsť v [2].

Položme

$$a_n = \frac{n!}{e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\log\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n}$$

Ak položíme $x := \frac{1}{2n+1}$, tak máme

$$\log\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{2n+1}{2}\log\frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} = 1 - \frac{1}{2x}\log\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = 1 - \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x}$$

Pre $|x| < 1$ platí

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

z čoho dostaneme

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$$

Teraz odvodíme odhad pre $\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Urobme najprv odhad pre $\log\frac{1+x}{1-x}$. Dolný odhad získame tak, že vynecháme všetky členy počnúc druhým ($x = \frac{1}{2n+1}$ je kladné) a horný odhad získame nahradením ďalších členov geometrickým radom.

$$2x < \log\frac{a_{n+1}}{a_n} < 2x + \frac{2x^3}{3}(1+x^2+x^4+\dots) = 2x + \frac{2x^3}{3}.\frac{1}{1-x^2} = 2x + \frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

Pomocou týchto nerovností môžeme odhadnúť $\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$0 > \log\frac{a_{n+1}}{a_n} > -\frac{x}{6}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}-1} - \frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

[1] `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty`

Z predchádzajúceho vzťahu indukciou ľahko odvodíme, že platí

$$0 > \log \frac{a_{n+k}}{a_n} > -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right). \tag{1}$$

Z (1) vyplýva, že postupnosť (a_n) je klesajúca, čiže existuje $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k}$. Ďalej $\alpha \neq 0$, lebo inak by platilo $\lim\limits_{k\to\infty} \log \frac{a_{n+k}}{a_n} \to -\infty$, čo je v spore s (1). Ak v tomto vzťahu prejdeme k limite pre k idúce do nekonečna, dostaneme:

$$\begin{aligned} \log \frac{\alpha}{a_n} &\geq -\frac{1}{12n} \\ \log \frac{\alpha}{a_n} &= -\frac{\theta_n}{12n}, \qquad 0 \leq \theta_n \leq 1 \\ a_n &= \alpha . e^{\frac{\theta_n}{12n}} \end{aligned}$$

Keď teraz použijeme vyjadrenie a_n, máme

$$n! = \alpha e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \sim \alpha e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

Už sme odvodili Stirlingovu formulu až na zatiaľ neznámu konštantu α.

Wallisov súčin. Na odhad konštanty α použijeme Wallisov súčin. Označme

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t dt \text{ pre } k = 0, 1, \dots$$

Zrejme platí

$$\begin{gathered} \sin^{2k-1} t \geq \sin^{2k} t \geq \sin^{2k+1} t, \text{ pre } t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \Rightarrow I_{2k-1} \geq I_{2k} \geq I_{2k+1} \end{gathered}$$

Metódou pre partes dostaneme:

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1} t \sin t dt = \left[-\sin^{k-1} t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} t \cos^2 t dt = \\ = (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} t (1 - \sin^2 t) dt = (k-1)(I_{k-2} - I_k). \end{aligned}$$

$$k I_k = (k-1) I_{k-2} \;\Rightarrow\; I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$$

Pomocou tejto rekurencie a hodnôt

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$$

vieme určiť

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Počítajme teraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2k^2}{2k(2k+1)} = 1$$

Z nerovnosti $I_{2k-1} \geq I_{2k} \geq I_{2k+1}$ potom vyplýva, že aj

$$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = \frac{((2k)!)^2(2k+1)}{2^{4k}(k!)^4} \cdot \frac{\pi}{2} \to 1$$

a po úprave

$$\frac{2^{4k}(k!)^4}{((2k)!)^2(2k+1)} \to \frac{\pi}{2}$$

Tento vzťah sa nazýva *Wallisov súčin.*

Dosaďme teraz do Wallisovho súčinu za faktoriál $n! = \alpha n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+O(n^{-1}))$. Dostaneme

$$\frac{2^{4k}(k!)^4}{((2k)!)^2(2k+1)} = \frac{2^{4k}\alpha^4 k^{4k+2}e^{-4k}(1+O(k^{-1}))}{\alpha^2(2k)^{4k+1}e^{-4k}(1+O(k^{-1}))(k+1)} = \frac{k}{2(2k+1)}\alpha^2(1+O(k^{-1})) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{2\pi}$$

Odvodenie pomocou Eulerovej sumačnej formuly. Presnejší odhad pre $n!$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O(\frac{1}{n^4})\right)$$

možno nájsť v [3]. Je tam odvodený pomocou Eulerovej sumačnej formuly. Tu aspoň naznačíme, ako pomocou nej možno odvodiť náš tvar Stirlingovej formuly.

Veta 1.1. *Nech nezáporná reálna funkcia f má v intervale $\langle 0, +\infty)$ spojitú deriváciu. Potom pre každé $n = 1, 2, \ldots$ platí*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(t)dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n (t-[t]-\frac{1}{2})f'(t)dt.$$

Dôkaz tejto vety pozri v [4].

Namiesto $n! = 1.2.\ldots n$ budeme odhadovať $\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k$. Pomocou Eulerovej sumačnej formuly dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log(1+k) = \int_0^{n-1} \log(1+t)dt + \frac{\log 1 + \log n}{2} + \int_0^{n-1} \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{t+1} dt =$$
$$= [(t+1)(\log(t+1)+1)]_0^{n-1} + \frac{1}{2}\log n + R_n = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n + R_n =$$
$$= (n+\frac{1}{2})\ln n - n + 1 + R_n$$

O postupnosti $R_n = \int_0^{n-1}(t - [t] - \frac{1}{2})f'(t)dt$ by sa malo dať ukázať, že je klesajúca a ohraničená, má teda nejakú limitu c. Potom v limite pre $n \to \infty$ dostaneme

$$\log(n!) - n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}.e^{c} \to 0,$$

čo je v podstate opäť tvar Stirlingovej formuly s neznámou konštantou α.

Literatúra

[1] B.L. van der Waerden: *Einfache Herleitung der Stirlingschen Formel,* Nieuw Archief voor Wiskunde 18 (1936), 40-45.

[2] J.Kaucký: *Kombinatorické identity.*

[3] D.E.Knuth: *Concrete Mathematics.*

[4] T.Šalát: *Nekonečné rady.*