

## 1 Limita postupnosti podľa filtra

**Definícia 1.1.**  $\mathcal{F}$ -limita postupnosti. Nech  $\mathcal{F}$  je filter na  $\omega$  ( $=$  na  $\mathbb{N}$ ) a  $P$  je topologický priestor. Hovoríme, že bod  $a$  je *limitou postupnosti*  $(x_n)$  *podľa filtra*  $\mathcal{F}$  alebo, že postupnosť  $(x_n)$  *konverguje k*  $a$  *podľa*  $\mathcal{F}$ , označujeme  $\mathcal{F}\text{-}\lim x_n = a$ , ak pre každé okolie  $V$  bodu  $a$  skoro všetky členy postupnosti ležia vo  $V$ , to znamená, že  $\{n : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$ .

Obvyklý pojem limity postupnosti zodpovedá limite podľa Fréchetovho filtra, ktorý obsahuje práve doplnky konečných množín.

$\mathcal{F}$ -limita zachováva súčet a súčin postupností.

$a$  je hromadným bodom postupnosti  $x_n$  práve vtedy, keď existuje taký filter, že  $\mathcal{G}\text{-}\lim x_n = a$ .

**Veta 1.1.** Každá postupnosť reálnych čísel má jednoznačne určenú (vlastnú alebo nevlastnú)  $\mathcal{F}$ -limitu pre ľubovoľný ultrafilter  $\mathcal{F}$ .

Pomocou pojmu  $\mathcal{F}$ -limity tu ukazujú existenciu konečne aditívnej miery na algebre všetkých podmnožín prirodzených čísel rozširujúcej asymptotickú hustotu. Tá sa vraj obyčajne ukazuje pomocou Hahn-Banacha.

## 2 Banachova limita

Ak limitu chápeme ako lineárny operátor z podpriestoru priestoru  $l_\infty$ , tak má tieto vlastnosti:

- (i)  $\text{LIM}(c.f + d.g) = c.\text{LIM } f + d.\text{LIM } g$
- (ii)  $f \geq 0 \Rightarrow \text{LIM } f \geq 0$
- (iii)  $\text{LIM } f = \text{LIM } fs$ , kde  $fs$  označuje posunutie postupnosti  $f$  o jeden člen.
- (iv) Ak existuje limita  $\lim f$  v obvyklom zmysle, tak  $\text{LIM } f$  má tú istú hodnotu.

Vzniká otázka, či by sme vedeli rozšíriť tento operátor na všetky ohraničené postupnosti, aby sa zachovali uvedené vlastnosti. Takýto lineárny operátor sa nazýva *Banachova limita*.

Existencia Banachovej limity a konečno-aditívnych mier rozširujúcich hustotu sa obvykle ukazuje z Hahn-Banachovej vety (rozširujeme funkcionál definovaný na podpriestore všetkých konvergentných funkcií). Tu tvrdia, že ich ukázali „jednoduchšími prostriedkami,“ než cez Hahn-Banachovu vetu.

Nech  $\mathcal{F}$  je netriviálny ultrafilter. Potom Banachovu limitu môžeme zostrojiť takto:

$$\lim f = \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n+1},$$

čiže ako  $\mathcal{F}$ -limitu postupností aritmetických priemerov.

Patrílo by sa spomenúť, že oba postupy využívajú AC. (Raz je skrytá v Hahn-Banachovi, druhýkrát v existencii ultrafiltrov.)

Dá sa ukázať, že nemôžeme „vylepšiť“ Banachovu limitu tak, aby zachovávala aj súčin. Ak vezmeme postupnosti  $0, 1, 0, 1, \dots$  a  $1, 0, 1, 0, \dots$ , tak podľa (iii) majú rovnakú Banachovu limitu  $L$ . Ich sčítaním dostaneme postupnosť  $1, 1, 1, 1, \dots$ , preto  $L = \frac{1}{2}$ . Ale ich súčinom dostaneme postupnosť  $0, 0, 0, 0, \dots$ , ktorá má limitu  $0$ , a teda Banachova limita nezachováva súčin.

Keby sme vynechali podmienku o posunutí a chceli zachovať súčin, tak tieto podmienky splňa  $\mathcal{F}$ -limita pre ľubovoľný ultrafilter  $\mathcal{F}$ .