

Nekonečná kombinatorika

15. apríla 2002

1 Kombinatorické vlastnosti množín

Lema 1.1 (Lema o disjunktnom zjemnení). *Nech $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ je systém množín, z ktorých každá má mohutnosť κ . Potom existuje systém $\langle B_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ taký, že pre každé $\alpha < \kappa$ platí $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ a $|B_\alpha| = \kappa$. Hovoríme že, že $\langle B_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ je disjunktným zjemnením systému $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$. ([BŠ, Lema 1.2])*

Lema 1.2. *Nech $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ je systém podmnožín nejakej množiny X a každé $|A_\alpha| = \kappa$. Potom existuje κ navzájom disjunktných podmnožín $B_\beta \subseteq X$, $\beta < \kappa$, pre ktoré platí*

$$|B_\beta| = \kappa \quad |B_\beta \cap A_\alpha| = \kappa \text{ pre každé } \alpha, \beta \in \kappa.$$

([BŠ, Lema 1.3])

Príklad 1.1. (a) Rozklad $\mathbb{Q}$ na spočítateľne veľa hustých podmnožín.
(b) Každá báza uniformného ultrafiltra na κ má mohutnosť väčšiu než κ .
(c) $B \subseteq \mathbb{R}$ je bernsteinovská, ak B aj $\mathbb{R} \setminus B$ pretínajú každé nespočítateľnú uzavretú množinu. Existencia vyplýva z lemy 1.3. Ak B je bernsteinovská, tak nie je lebesguovsky merateľná a tiež nemá Bairovu vlastnosť.

Veta 1.1 (O nezávislých rozkladoch). *Na nekonečnom kardinále κ existuje systém množín $\{M(\alpha, \beta) : \alpha < 2^\kappa, \beta < \kappa\}$ taký, že*

- (i) *pre každé $\alpha < 2^\kappa$ je $\{M(\alpha, \beta) : \beta < \kappa\}$ rozklad množiny κ ,*
- (ii) *pre každú konečnú podmnožinu $B \subseteq 2^\kappa$ a každú funkciu $f : B \rightarrow \kappa$ je $|\bigcap \{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in B\}| = \kappa$ (nezávislosť).*

([BŠ, Veta 1.6])

Dôsledok 1.1. *Nech $\langle A_i : i \in I \rangle$ je súbor množín taký, že $|A_i| \leq \kappa$ pre každé $i \in I$ a $|I| \leq 2^\kappa$. Potom existuje množina $S \subseteq \prod \langle A_i : i \in I \rangle$, ktorá má mohutnosť $\leq \kappa$ a pre každú funkciu $f \in \prod \langle A_i : i \in I \rangle$ a každú konečnú podmnožinu $J \subseteq I$ existuje $g \in S$ také, že*

$$f|J = g|J.$$

Definícia 1.1. Ak $\mathcal{F}$ je filter na κ , tak *charakterom filtra* $\mathcal{F}$ nazývame kardinál

$$\chi(\mathcal{F}) = \min\{|B| : B \text{ je báza filtra } \mathcal{F}\}.$$

Veta 1.2 (Pospíšil). *Pre každé nekonečné κ existuje 2^{2^κ} uniformných ultrafiltrův na κ , t.j. $|\beta\kappa| = |\mathcal{U}(x)| = 2^{2^\kappa}$. Navyše množina všetkých uniformných ultrafiltrův, ktoré majú maximálny možný charakter 2^κ , má tiež mohutnosť 2^{2^κ} . ([BŠ, Veta 1.10])*

Príklad 1.2. (a) Existujú aj λ -nezávislé systémy ($|B| < \lambda$ namiesto B je konečná) pre $\lambda \leq \kappa$. Ľahko sa overí, že na ω nemôže existovať nekonečný ω_1 -nezávislý systém.

(b) Veta(Hewitt, Marczewski, Pondiczery) Ak $S_i, i \in I$ sú topologické priestory, z ktorých každý má hustú podmnožinu mohutnosti $\leq \kappa$ a ak je $|I| \leq 2^\kappa$, tak topologický súčin $\prod S_i$ obsahuje hustú podmnožinu kardinality $\leq \kappa$.

$[X]^\lambda$ ($[X]^{<\lambda}$) označuje všetky podmnožiny X , ktoré majú kardinálnosť λ (menšiu ako λ).

Definícia 1.2 (Skoro disjunktné systémy). (i) Hovoríme, že dve podmnožiny x, y kardinálu κ sú skoro disjunktné, ak $|x \cap y| < \kappa$.

(ii) Hovoríme, že S je skoro disjunktný systém, krátko AD systém, ak $S \subseteq [\kappa]^\kappa$ a každé dve rôzne podmnožiny z S sú skoro disjunktné.

(iii) AD systémy na κ sú usporiadané inklúziou. Hovoríme, že S je maximálny skoro disjunktný systém (MAD systém), ak je maximálny vzhľadom na inklúziu.

Z princípu maximality vyplýva, že každý AD systém sa dá rozšíriť na MAD systém. AD systém S na κ je MAD systém práve vtedy, keď pre každé $x \in [\kappa]^\kappa$ existuje $y \in S$ také, že $|x \cap y| = \kappa$.

Lema 1.3. *Nech κ je nekonečný kardinál.*

(i) *Žiadny AD systém na κ mohutnosti $\text{cf}(\kappa)$ nie je maximálny.*

(ii) *Existuje AD systém na κ mohutnosti $\geq \kappa^+$. ([BŠ, Lema 1.13])*

Najväčšia možná mohutnosť AD systému na κ je 2^κ . Ak sa pýtame, či vždy existuje MAD systém na κ mohutnosti 2^κ , odpoveď nie je jednoznačná. Za predpokladu GCH existencia vyplýva z Lemy 1.13. Ak nepredpokladáme GCH, J.Baumgartner ukázal, že na ω_1 nemusí existovať žiadny MAD systém mohutnosti 2^{ω_1} . Dôkaz je v [BŠ, kap. IV, veta 3.4.1].

Literatúra

[BŠ] B.Balcar, P.Štěpánek: *Teorie množin*