Prehľad poznatkov o ordinálnych číslach. V zdrojáku sú uvedené presné čísla viet a definícií, ktoré sú citované.

Šalát, Smítal: Teória množín
$A \subset B$ sa tu označuje ostrá inklúzia, čiže $A \neq B$.
9.1.Základné vlastnosti dobre usporiadaných množín

Definícia. Usporiadaná množina sa nazýva **dobre usporiadaná**, ak každá jej neprázdna podmnožina má prvý prvok.

Definícia. Nech $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Zobrazenie $f \colon A \to B$ sa nazýva **podobné (izotónne) zobrazenie**, ak je prosté a pre každé $x, y \in A$ platí:

$$x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$$

Čiastočne usporiadaná množina A je **podobná** čiastočne usporiadanej množine B ($A \cong B$), ak existuje podobné zobrazenie z množiny A na množinu B.

Definícia. Množina $I \subset A$ je **úsek** usporiadanej množiny $(A, <)$, ak existuje také $a \in A$, že $I = \{x \in A; x < a\}$; označujeme $I = A_a$.
Množina $I \subseteqq A$ je **primitívny interval** usporiadanej množiny A, ak I obsahuje s každým x aj všetky prvky $y \in A$ menšie ako x.

Veta. *Nech J je primitívny interval dobre usporiadanej množiny $(A, <)$. Potom alebo $J = A$, alebo J je úsekom množiny A, t.j. pre vhodné $a \in A$ sa $J = A_a$*

Veta. *Každá podmnožina dobre usporiadanej množiny je dobre usporiadaná.*

Veta. *Nech $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina a nech f je podobné zobrazenie množiny A do A. Potom pre žiadne $a \in A$ neplatí $f(a) < a$.*

Veta. *Nech $(A, <)$ a $(A^*, <^*)$ sú dobre usporiadané množiny. Potom existuje najviac jedno podobné zobrazenie množiny A na A^*.*

Základná veta o dobre usporiadaných množinách. *Nech $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú dobre usporiadané množiny. Potom alebo A a B sú podobné množiny, alebo jedna z nich je podobná úseku druhej.*

9.2.Ordinálne čísla

Axióma ordinálnych čísel. *Ku každej dobre usporiadanej množine A existuje množina $Ord(A)$ dobre usporiadaná reláciou inklúzie $\subset$ s týmito vlastnosťami:*

1. *$A \cong Ord(A)$*
2. *Ak $(A, <)$, $(A^*, <^*)$ sú dobre usporiadané množiny, tak $A \cong A^*$ platí práve vtedy, keď $Ord(A) \cong Ord(A^*)$.*

Definícia. Množina $Ord(A)$, kde A je dobre usporiadaná množina, sa nazýva ordinálne číslo množiny A.

Definícia. Ordinálne číslo α je menšie ako ordinálne číslo β, ak α je podobné nejakému úseku množiny β. Namiesto $\alpha \cong \beta_b$ potom píšeme $\alpha < \beta$.

Lema. *Každá množina M ordinálnych čísel je usporiadaná reláciou $<$.*

Veta. *Ak α je ľubovoľné ordinálne číslo, tak množina $W(\alpha)$ ordinálnych čísel všetkých úsekov množiny α je dobre usporiadaná a $W(\alpha) \cong \alpha$, t.j. $Ord(W(\alpha)) = \alpha$.*

Veta. *Každá množina M ordinálnych čísel je dobre usporiadaná.*

Veta. *Neexistuje množina ordinálnych čísel, ktorá by obsahovala všetky ordinálne čísla.*

9.3.Konštrukcia ordinálnych čísel - ordinálne čísla sa nemusia zavádzať axiomaticky

Veta. *Nech $(A, <)$ je usporiadaná množina. Potom množina B všetkých úsekov množiny A usporiadaná reláciou inklúzie $\subset$ je podobná množine A.*

Definícia. Usporiadaná množina A sa nazýva ordinálne číslo, ak $a = A_a$ pre každé $a \in A$.

Veta. *Nech A je ordinálne číslo a nech $a \in A$. Potom A_a je ordinálne číslo.*

Veta. *Nech A, B sú ordinálne čísla a nech $B \subset A$. Potom pre vhodné $a \in A$ sa $B = A_a$.*

Veta. *Prienik dvoch ordinálnych čísel je ordinálne číslo.*

Veta. *Nech A, B sú ordinálne čísla, $A \neq B$. Potom jedno nich je úsekom druhého.*

Veta. *Ak A a B sú podobné ordinálne čísla, tak $A = B$.*

Veta. *Nech $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina, ktorej každý úsek A_a je podobný nejakému ordinálnemu číslu. Potom aj množina A je podobná ordinálnemu číslu.*

Veta. *Každá dobre usporiadaná množina je podobná práve jednému ordinálnemu číslu.*

Veta. *Pre ľubovoľné dve ordinálne čísla α, β sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*
(1) $\alpha < \beta$
(2) $\alpha \subset \beta$
(3) $\alpha \in \beta$

9.4.Aritmetika ordinálnych čísel

Lema. *Nech $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú disjunktné dobre usporiadané množiny. Potom množina $C = A \cup B$ je dobre usporiadaná reláciou $<_C = (<_A) \cup (<_B) \cup A \times B$.*

Definícia. Nech $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú disjunktné dobre usporiadané množiny. Nech $C = A \cup B$ je množina usporiadaná relciou z predchádzajúcej definície. Potom ordinálne číslo $\gamma = Ord(C)$ sa nazýva súčet ordinálnych čísel $\alpha = Ord(A)$ a $\beta = Ord(B)$. Píšeme $\gamma = \alpha + \beta$.

Veta. *Ak α, β sú ordinálne čísla, $\beta \neq 0$, tak $\alpha < \alpha + \beta$.*

$$\omega + 1 \neq \omega = 1 + \omega$$

Definícia. Nech $(A, <_A)$ a $(B, <_B)$ sú usporiadané množiny. Potom usporiadanie $<_C$ karteziánskeho súčinu $C = A \times B$ dané vzťahom

$$[x_1, y_1] <_c [x_2, y_2] \Leftrightarrow (y_1 <_B y_2) \vee (y_1 = y_2 \wedge x_1 <_A x_2)$$

sa nazýva **lexikografické usporiadanie** množiny $A \times B$.

Lema. *Ak $(A, <_A)$ a $(B, <_B)$ sú usporiadané množiny, tak lexikografické usporiadanie súčinu $A \times B$ je tiež dobré usporiadanie.*

Definícia. Nech A, B sú dobre usporiadané množiny. Nech C je karteziánsky súčin $A \times B$ s lexikografickým usporiadaním. Potom $\gamma = Ord(C)$ sa nazýva **súčin ordinálnych čísel** $\alpha = Ord(A)$ a $\beta = Ord(B)$. Píšeme $\gamma = \alpha.\beta$ alebo len $\gamma = \alpha\beta$.

$$\omega.2 = \omega + \omega \neq 2\omega = \omega$$

Definícia. Nech α je ordinálne číslo, A množina. Potom každé zobrazenie $f\colon W(\alpha) \to A$ sa nazýva **transfinitná postupnosť** typu α prvkov množiny A.

Definícia. Súčet ordinálnych čísel možno zovšeobecniť aj pre nekonečne veľa sčítancov. Nech α je ordinálne číslo a nech $(\beta_\xi)_{\xi<\alpha}$ je transfinitná postupnosť ordinálnych čísel. Potom definujeme $\sum\limits_{\xi<\alpha} \beta_\xi$ ako ordinálne číslo množiny $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} \beta_\xi \times \{\xi\}$ usporiadanej tak, že prvky každej z množín $\beta_\xi \times \{\xi\}$ sú usporiadané medzi sebou podobne ako v množine b_ξ a prvky množiny $\beta_\xi \times \{\xi\}$ ležia naľavo od prvkov množiny $\beta_\eta \times \{\eta\}$, ak $\xi < \eta$.

9.5.Transfinitná indukcia

Princíp transfinitnej indukcie. *Nech $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina a nech $\Gamma(X)$ je výroková funkcia definovaná na množine A. Nech sú splnené tieto podmienky:*

(1) *Ak y_0 je prvý prvok množiny A, tak $\Gamma(y_0)$.*
(2) *Nech $y \in A$. Ak $\Gamma(x)$ platí pre všetky $x \in A$, ktoré sú menšie ako y, tak platí aj $\Gamma(y)$.*

Za týchto predpokladov $\Gamma(x)$ platí pre každé $x \in A$.

9.6. Definícia transfinitnou indukciou

Princíp definície transfinitnou indukciou. *Nech $\Phi(x, y)$ je "funkcia", ktorá každému ordinálnemu číslu x a každej množine y priradí práve jednu množinu $\Phi(x, y)$. Potom ku každému ordinálnemu číslu λ existuje práve jedna funkcia f definovaná na množine $W(\lambda)$ všetkých ordinálnych čísel menších ako λ a s hodnotami v nejakej množine A, ktorá spĺňa podmienku*

$$f(\alpha) = \Phi(\alpha, f|W(\alpha)) \textit{ pre každé } \alpha \in W(\lambda)$$

Balcar, Štěpánek: Teorie množin
Ordinální čísla (II.1)

Definícia. **Tranzitívne triedy a množiny.** Hovoríme, že trieda X je **tranzitívna**, ak každý prvok $x \in X$ je podmnožinou X, to znamená, ak platí $x \in X \to x \subseteq X$.

Lema.

(1) *Ak sú X a Y tranzitívne triedy, potom $X \cap Y$ a $X \cup Y$ sú tranzitívne.*
(2) *Ak je každý prvok triedy X tranzitívna množina, tak $\bigcap X$ a $\bigcup X$ sú tranzitívne.*
(3) *Ak je X tranzitívna trieda, tak relácia $\in$ je tranzitívna na X práve vtedy, keď každé $x \in X$ je tranzitívna množina.*

Definícia. Ordinálne čísla. Hovoríme, že množina x je **ordinálne číslo**, alebo krátko **ordinál**, ak x je tranzitívna a relácia $\in$ je dobré (ostré) usporiadanie množiny x.
Triedu všetkých ordinálnych čísel označíme On, teda

$$On = \{x : x \text{ je ordinálne číslo}\}.$$

Lema. *On je tranzitívna trieda.*

Lema. *Ak x, y sú ordinály, tak platí*

(1) $x \notin x$,
(2) $x \cap y$ *je ordinál,*
(3) $x \in y \leftrightarrow x \subset y$.

Veta. *Relácia $\in$ je dobré usporiadanie triedy On.*

Dôsledok. *Trieda On nie je množinou.*

Dôsledok. *Ak je X tranzitívna vlastná trieda dobre usporiadaná reláciou $\in$, tak $X = On$.*

Lema.

(1) *Množina $x \subseteq On$ je ordinálnym číslom práve vtedy, keď x je ordinálna množina.*
(2) *Ak je A neprázdna trieda ordinálnych čísel, potom $\cap A$ je najmenší prvok triedy A vzhľadom na usporiadanie $<$.*
(3) *Ak je a množina ordinálnych čísel, tak $\cup a$ je tiež ordinálne číslo a je to suprémum množiny a vzhľadom na usporiadanie $<$.*

Dôsledok. *Ordinál ω je suprémum množiny všetkých prirodzených čísel v triede On. To znamená, že ω je najmenšie nekonečné kardinálne číslo. Konečné ordinály sú práve prirodzené čísla.*

Lema. *Ak je α ordinálne číslo, tak $\alpha \cup \{\alpha\}$ je najmenšie ordinálne číslo väčšie než α. Hovoríme, že $\alpha \cup \{\alpha\}$ je nasledovníkom α a α je predchodcom $\alpha \cup \{\alpha\}$ v usporiadaní $<$.*

Definícia. Izolované a limitné ordinálne čísla.

(1) Hovoríme, že ordinálne číslo α je **izolované**, ak $\alpha = 0$, alebo α má predchodcu.
(2) Hovoríme, že ordinálne číslo α je **limitné**, ak je nenulové a nemá predchodcu.

Veta. *Ak je R dobré usporiadanie množiny A, tak existuje práve jedno ordinálne číslo α a jednoznačne určený izomorfizmus α a A vzhľadom k $<$ a R.*

Dôsledok. *Dva rôzne ordinály nie sú izomorfné.*

Definícia. Lexikografické a maximo-lexikografické usporiadanie.

Na triede On^2 definujeme **lexikografické usporiadanie** $<_{Le}$ tak, že pre ľubovoľné ordinály $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ položíme

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_{Le} \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \ \ \& \ \ \beta_1 < \beta_2).$$

(1) Maximo-lexikografické usporiadanie $<_{MLe}$ na On^2

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_{MLe} \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \leftrightarrow Max\{\alpha_1, \beta_1\} < Max\{\alpha_2, \beta_2\} \vee$$
$$\vee \ (Max\{\alpha_1, \beta_1\} = Max\{\alpha_2, \beta_2\} \quad \& \quad \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_{Le} \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle).$$

Veta.

(1) *Lexikografické usporiadanie je dobré ostré usporiadanie na On^2.*
(2) *Maximo-lexikografické usporiadanie je dobré ostré usporiadanie na On^2. Navyše každá dvojica $\langle \alpha, \beta \rangle$ má len množinu predchodcov. Maximo-lexikografické usporiadanie je teda úzka relácia.*

Definícia. Nech $[On]^{<\omega}$ označuje triedu všetkých konečných podmnožín On, teda

$$[On]^{<\omega} = \{x : x \subseteq On \ \ \& \ \ Fin(x)\}.$$

Pre ľubovoľné dve množiny ordinálov x, y definujeme

$$x \lhd y \leftrightarrow (x \neq y \ \ \& \ \ \max((x - y) \cup (y - x)) \in y),$$

inými slovami x predchádza y, ak symetrický rozdiel množín x, y je neprázdny a jeho najväčší prvok patrí do množiny y.

Veta. *Relácia $\lhd$ je úzke dobré usporiadanie na $[On]^{<\omega}$.*

Veta - princíp transfinitnej indukcie. *Nech A je trieda ordinálnych čísel taká, že pre každý ordinál α platí*

$$\alpha \subseteq A \to \alpha \in A,$$

potom $A = On$.

Veta. *Nech A je trieda ordinálnych čísel taká, že*

(1) $0 \in A$
a pre každý ordinál α platí
(2) $\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A$
(3) $\alpha \subseteq A \to \alpha \in A$, *ak α je limitný.*

Potom $A = On$.

Ordinální aritmetika

Definícia. Hovoríme, že zobrazenie F je **ordinálna funkcia**, ak jeho definičným oborom je nejaký ordinál alebo On a $\operatorname{Rng} F \subseteq On$.

Hovoríme, že ordinálna funkcia je **rastúca** (**neklesajúca**), ak pre ľubovoľné $\beta \in \operatorname{Dom}(F)$ a $\alpha < \beta$ platí $F(\alpha) < F(\beta)$ ($F(\alpha) \leqq F(\beta)$).

Veta.

(1) *Ak je F rastúca ordinálna funkcia, potom $\alpha \leqq F(\alpha)$ pre každé $\alpha \in \operatorname{Dom}(F)$.*
(2) *Ak je A dobre usporiadaná množina a $B \subseteq A$, pre ordinálne typy α, β množín A, B platí $\alpha \leqq \beta$.*

Definícia. Hovoríme, že ordinálna funkcia F je **normálna**, ak je rastúca a spojitá. To znamená, že pre každý limitný ordinál $\lambda \in \operatorname{Dom}(F)$ platí

$$F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Lema. *Ak je F normálna funkcia, tak pre každý ordinál β taký, že $F(0) \leqq \beta < \sup \operatorname{Rng}(F)$, existuje najväčší ordinál α, pre ktorý platí $F(\alpha) \leqq \beta$.*

Lema. *Ak sú F, G normálne funkcie na On, tak aj $F \circ G$ je normálna.*

Definícia. Hovoríme, že ordinál ξ je **pevným bodom** ordinálnej funkcie F, ak $F(\xi) = \xi$.

Veta o pevných bodoch normálnej funkcie. *Nech F je normálna funkcia definovaná na On.*

(1) *Ku každému ordinálu α existuje $\beta \geqq \alpha$, ktoré je pevným bodom funkcie F. Trieda všetkých pevných bodov funkcie F je teda neohraničená.*
Navyše, ak definujeme postupnosť ordinálov $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ tak, že $\alpha_0 = \alpha$ a pre každé prirodzené n je $\alpha_{n+1} = F(\alpha)$, potom suprémum tejto postupnosti je najmenší zo všetkých pevných bodov $\xi \geqq \alpha$ funkcie F.
(2) *Trieda všetkých pevných bodov funkcie F je uzavretá. To znamená, že suprémum každej množiny pevných bodov je tiež pevným bodom funkcie F.*

Dôsledok. *Ak je F normálna funkcia na On, tak podľa 2.11 existuje izomorfné zobrazenie J triedy On na triedu pevných bodov funkcie F. Navyše J je normálna funkcia, pretože $K(F)$ je uzavretá trieda.*

Definícia. Nech α, β sú ordinálne čísla.

(1) Ordinálne číslo, ktoré je typom množiny $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ pri lexikografickom usporiadaní, označujeme $\alpha + \beta$ a nazývame **súčet ordinálnych čísel** α a β.
(2) Ordinálne číslo, ktoré je typom množiny $\beta \times \alpha$ pri lexikografickom usporiadaní, označujeme $\alpha.\beta$ a nazývame **súčin ordinálnych čísel** α a β.

Tvrdenie.

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha.0 = \alpha = 0.\alpha$$

$$\alpha.1 = \alpha = 1.\alpha$$

$$\alpha.2 = \alpha + \alpha$$

$$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$$

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

$$2.\omega = \omega \neq \omega.2$$

Lema - monotónnosť sčítania. *Pre ľubovoľné ordinály α, β, γ platí*

(1)
$$\alpha < \beta \to \gamma + \alpha < \gamma + \beta$$

(2)
$$\alpha \leqq \beta \to \alpha + \gamma \leqq \beta + \gamma$$

Lema - monotónnosť súčinu. *Pre ľubovoľné ordinály α, β, γ platí*

(1)
$$\alpha < \beta \to \gamma.\alpha < \gamma.\beta$$

(2)
$$\alpha \leqq \beta \to \alpha.\gamma \leqq \beta.\gamma$$

Distributívnosť.

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$(1 + 1).\omega \neq \omega + \omega$$

Lema. *Ak $\alpha \leqq \beta$, tak existuje práve jeden ordinál ρ taký, že $\alpha + \rho = \beta$.*

Lema. *Pre ľubovoľný ordinál α v množine všetkých riešení $\langle \xi, \eta \rangle$ rovnice*

$$\xi + \eta = \alpha$$

nájdeme len konečne veľa rôznych hodnôt η.

Lema. *Ak $\beta > 0$, pre každý ordinál α existujú jednoznačne určené ordinály $\delta \leqq \alpha$ a $\rho < \beta$ také, že*

$$\alpha = \beta.\delta + \rho.$$

Veta.

(1) *Pre každý ordinál α je ordinálna funkcia $F(\xi) = \alpha + \xi$ normálna.*
(2) *Pre každé $\alpha > 0$ je ordinálna funkcia $F(\xi) = \alpha.\xi$ normálna.*

Definícia. Pre ľubovoľné α definujeme mocninu α^β rekurziou podľa β

(1) $\alpha^0 = 1$,
(2) $\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta.\alpha$
(3) $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : 0 < \gamma < \beta\}$, ak β je limitný ordinál.

Tvrdenie.

(1) $0^0 = 1$ *a* $0^\beta = 0$, *ak* $\beta > 0$,
(2) $1^\beta = 1$,
(3) $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha.\alpha$, $\alpha^3 = (\alpha.\alpha).\alpha$.

Lema. *Pre ľubovoľné α, β, γ platí:*

(1) $\alpha \leqq \beta \rightarrow \alpha^\gamma \leqq \beta^\gamma$
(2) $(1 < \alpha \ \& \ \beta < \gamma) \rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$
(3) *pre každé $\alpha > 1$ je α^ξ normálna funkcia premennej ξ.*

Lema. *Pre ľubovoľné α, β, γ platí:*

(1)
$$\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta . \alpha^\gamma,$$

(2)
$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}.$$

Veta. *Ak sú m, n prirodzené čísla, tak $m+n$, $m.n$ a m^n sú tiež prirodzené čísla. Navyše $m+n = n+m$, $m.n = n.m$. Súčet a súčin prirodzených čísel sú komutatívne operácie, a pretože súčin ordinálnych čísel je distributívny zľava, súčin prirodzených čísel je distributívny.*

Lema. *Ak sú k, $m_0, m_1, \ldots, m_k$ prirodzené čísla a $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ menšie než δ, tak*
$$\omega^\delta > \omega^{\gamma_0}.m_0 + \omega^{\gamma_1}.m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k}.m_k.$$

Veta o rozvoji ordinálnych čísel v mocninách ω. *Ku každému ordinálu $\alpha > 0$ možno jednoznačne priradiť prirodzené čísla k, $m_0, m_1, \ldots, m_k$ rôzne od nuly a ordinály $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ tak, že*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}.m_0 + \omega^{\gamma_1}.m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k}.m_k.$$

Výraz na pravej strane sa nazýva Cantorovým normálnym tvarom ordinálu α.

Ak je
$$\beta = \omega^{\delta_0}.n_0 + \omega^{\delta_1}.n_1 + \ldots + \omega^{\delta_k}.n_k$$

vyjadrenie ordinálu β v Cantorovom normálnom tvare, potom $\alpha < \beta$ nastane práve vtedy, keď nastane niektorý z dvoch nasledujúcich prípadov:

(1) *$k < l$ a pre každé $i \leqq k$ je $\langle \gamma_i, m_i \rangle = \langle \delta_i, n+i \rangle$,*
(2) *existuje $i \leqq \min(k,l)$ také, že $\langle \gamma_i, m_i \rangle \neq \langle \delta_i, n+i \rangle$, a pre najmenší taký index i je buď $\gamma_i < \delta_i$ alebo $\gamma_i = \delta_i$ a $m_i < n_i$.*

Dôsledok. *Ak je $\alpha > 0$, potom platí:*

(1) *existuje práve jedno prirodzené číslo $l > 0$ a jednoznačne určené ordinály $\gamma_0 \geqq \gamma_1 \geqq \ldots \geqq \gamma_l$ tak, že*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} + \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_l},$$

(2) *existujú jednoznačne určené ordinály β, γ také, že*

$$\alpha = \omega^\gamma(\beta + 1).$$

Definícia. Hovoríme, že ordinál ξ je **ε-číslo**, ak je pevným bodom funkcie ω^ξ, to znamená, že ξ je ε-číslom, ak $\xi = \omega^\xi$.

Časť o Goodsteinových postupnostiach som vynechal.
Kardinální čísla (II.4)

Definícia. Kardinálne čísla. Hovoríme, že $\varkappa$ je **kardinálne číslo**, ak $\varkappa$ je ordinál, ktorý sa nedá prosto zobraziť na žiadne menšie ordinálne číslo. Triedu **všetkých kardinálnych čísel** označíme Cn, teda $Cn = \{\varkappa \in On : (\forall \xi < \varkappa)(\xi \not\approx \varkappa)\}$.

Hovoríme, že kardinálne číslo $\varkappa$ je **mohutnosť množiny** x a píšeme $|x| = \varkappa$, ak existuje prosté zobrazenie množiny x na $\varkappa$.

Lema. *Ak X je množina kardinálnych čísel, tak* $\sup X$ *je tiež kardinálne číslo. To znamená, že Cn je uzavretá na supréma.*

Veta.

(1) *Ku každému kardinálu existuje väčší kardinál.*
(2) *Cn je vlastná trieda.*

Definícia. Nasledovník kardinálu, limitný kardinál.

(1) Ak $\varkappa \in Cn$, tak najmenšie zo všetkých kardinálnych čísel $\lambda > \varkappa$ nazveme nasledovníkom kardinálu $\varkappa$ a označíme $\varkappa^+$. Hovoríme, že kardinál $\varkappa$ je predchodcom karidnálu λ, ak $\lambda = \varkappa^+$.
(2) Hovoríme, že kardinál λ je limitný, ak nemá predchodcu.

Označenie. Jednoznačne určenú normálnu funkciu, ktorá zobrazuje On na triedu všetkých nekonečných kardinálnych čísel označíme $\aleph$ a jej hodnoty $\aleph(\alpha)$ zančíme krátko $\aleph_\alpha$.

Je zrejmé, že $\aleph_0$ je limitný kardinál a pre $\alpha > 0$ je $\aleph_\alpha$ izolovaný (limitný) kardinál práve vtedy, keď α je izolované (limitné) ordinálne číslo.

Veta. *Pre každé $\alpha \in On$ a limitný ordinál ξ platí*

(1) $\alpha \leq \aleph_\alpha$,
(2) ω_α *je limitný ordinál,*
(3) $\aleph_\xi = \sup\{\aleph_\alpha \colon \alpha < \xi\}$,
(4) $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$
(5) $|[\aleph_\alpha]^{<\omega} = \aleph_\alpha|$.

Definícia. Súčet a súčin kardinálnych čísel. Ak sú $\varkappa$, λ kardinálne čísla, ich súčet a súčin definujeme vzťahmi

$$\varkappa + \lambda = |(\{0\} \times \varkappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|,$$
$$\varkappa . \lambda = |\lambda \times \varkappa|.$$

Veta.

(1) *Pre každé $\alpha, \beta \in On$ platí*
$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha . \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}.$$
(2) *Ak sú $\varkappa$, λ kardinálne čísla a aspoň jedno z nich je nekonečné, potom*
$$\varkappa + \lambda = \max\{\varkappa, \lambda\},$$
$$\varkappa . \lambda = \max\{\varkappa, \lambda\} \text{ ak je } \varkappa, \lambda > 0.$$

Definícia. Kofinálna množina. Nech X je množina usporiadaná reláciou $\leq$. Hovoríme, že $Y \subseteq X$ je **kofinálna** s X alebo že Y je **kofinálna podmnožina** X vzhľadom k usporiadaniu $\leq$, ak k ľubovoľnému $x \in X$ existuje $y \in Y$, $x \leq y$.

Definícia. Kofinál. Nech α je limitný ordinál. Najmenší ordinál β, ktorý je typom usporiadania nejakej kofinálnej podmnožiny ordinálu α sa nazýva **kofinálom** α a označíme ho $cf(\alpha)$.

Pre každé limitné α platí $\omega \leq cf(\alpha) \leq \alpha$ a $cf(\alpha)$ je limitný ordinál.

$$cf(\omega) = \omega,$$

$$cf(\aleph_\omega) = \omega,$$

$$cf(\omega + \omega) = cf(\omega.\omega) = cf(\omega^\omega) = \omega$$

Ak α je spočítateľný limitný ordinál, tak $cf(\alpha) = \omega$.

Aj α je limitný ordinál, tak $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Lema. *Pre každý limitný ordinál α platí:*

(1) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$,
(2) $cf(\alpha)$ *je nekonečné kardinálne číslo.*

Definícia. Regulárne a singulárne kardinály. Nech $\varkappa$ je nekonečné kardinálne číslo. Hovoríme, že $\varkappa$ je **regulárny kardinál**, ak $cf(\varkappa) = \varkappa$. Hovoríme, že $\varkappa$ je **singulárny kardinál**, ak $cf(\varkappa) < \varkappa$.

$\aleph_0$ je regulárny kardinál, $\aleph_\alpha$ je singulárny kardinál. Kofinál limitného ordinálu je vždy regulárne kardinálne číslo.

Veta. *Nekonečné kardinálne číslo $\varkappa$ je singulárne práve vtedy, keď $\varkappa = \cup X$, kde X je nejaká množina mohutnosti menšej než $\varkappa$ a $(\forall x \in X)(|\varkappa| < \varkappa)$.*

Dôsledok. *Ak $\varkappa$ je regulárny kardinál a $\varkappa = \cup X$, kde $|X| < \varkappa$, tak pre nejaký prvok $x \in X$ platí $|x| = \varkappa$.*

Lema. *(AC). Nech $|X| \leq \aleph_\alpha$ a nech pre každé $x \in X$ je tiež $|x| \leq \aleph_\alpha$. Potom $|\cup X| \leq \aleph_\alpha$. Je tiež zrejmé, že ak je nejaké $x \in X$ mohutnosti $\aleph_\alpha$, platí rovnosť. Nie je to však nutná podmienka.*

Veta. *(AC). Pre každý ordinál α je $\aleph_{\alpha+1}$ regulárny kardinál.*

Definícia. Slabo nedosiahnuteľné kardinály. Hovoríme, že kardinálne číslo $\varkappa$ je **slabo nedosiahnuteľné**, ak $\varkappa$ je nespočítateľný limitný a regulárny kardinál.

Existencia slabo nedosiahnuteľného kardinálu sa nedá dokázať z axiómov teórie množín.

Lema. *Každá perfektná množina reálnych čísel má mohutnosť kontinua.*

Veta. *(Cantor, Bendixson) Každá nespočítateľná uzavretá množina reálnych čísel obsahuje perfektnú množinu.*

Hypotéza kontinua: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
Zovšeobecnená hypotéza kontinua: $(\forall\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.
Gödel dokázal, že zovšeobecnená hypotéza kontinua je bezosporná vzhľadom k axiómam teórie množín. Cohen (a nezávisle od neho Vopěnka) ukázal, že hypotéza kontinua je nezávislá na axiómach teórie množín.

Kardinální aritmetika (II.5)

Definícia. Kardinálna mocnina. Ak sú $\varkappa$, λ kardinálne čísla, **kardinálnu mocninu** $\varkappa^\alpha$ definujeme vzťahom $\varkappa^\lambda = |{}^\lambda\varkappa|$ ako kardinálne číslo, ktoré je mohutnosťou všetkých zobrazení λ do $\varkappa$.

$$2^\varkappa = |\mathcal{P}(\varkappa)| > \varkappa$$

$$(0 \neq \varkappa \leq \mu \ \ \& \ \ \lambda \leq \nu) \rightarrow \varkappa^\lambda \leq \mu^\nu$$

$$\varkappa^{(\mu+\nu)} = \varkappa^\mu . \varkappa^\nu$$

$$(\varkappa^\mu)^\nu = \varkappa^{\mu.\nu}$$

Veta. *Pre ľubovoľné kardinálne čísla $\varkappa$, λ platí*

(1) $0^0 = 1$, $\lambda \neq 0 \rightarrow 0^\lambda = 0$,
(2) $\varkappa^0 = 1$, $1^\varkappa = 1$,
(3) $(\varkappa \geq \omega \ \ \& \ \ 0 < \lambda < \omega) \rightarrow \varkappa^\lambda = \kappa$,
(4) $(2 \leq \varkappa \leq \lambda \ \ \& \ \ \lambda \geq \omega) \rightarrow \varkappa^\lambda = 2^\lambda$.

Definícia. Súčet a súčin systému kardinálnych čísel. Nech $\langle \varkappa_i \colon i \in I \rangle$ je systém kardinálnych čísel. Jeho **súčet**

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i = | \cup_{i \in I} \{i\} \times \varkappa_i)|$$

definujeme ako mohutnosť disjunktného zjednotenia kardinálov a **súčin** $\prod_{i \in I} \varkappa_i = | \times_{i \in I} \varkappa_i|$ definujeme ako mohutnosť karteziánskeho súčinu kardinálov $\varkappa_i$. Špeciálne ak je $\varkappa_i = \varkappa$ pre každé $i \in I$ a $|I| = \lambda$, tak

$$\prod_{i \in I} \varkappa_i = \varkappa^\lambda.$$

Definícia. Ak je X množina a λ kardinálne číslo, definujeme

$$[X]^\lambda = \{x \colon x \subseteq X \ \ \& \ \ |X| = \lambda\},$$

$$[X]^{<\lambda} = \{x \colon x \subseteq X \ \ \& \ \ |X| < \lambda\}.$$

Lema. *Nech X je množina mohutnosti $\varkappa$ a λ je kardinálne číslo. Potom*

(1) $|[X]^\lambda| = \varkappa^\lambda$, *ak* $\lambda \leq \varkappa$,
(2) $|[X]^\lambda| = \sum_{\mu<\lambda} \kappa^\lambda$, *ak* $\lambda \leq \mu^+$.

Definícia. Slabá mocnina $\varkappa^{<\lambda}$. Pre ľubovoľné kardinály definujeme

$$\varkappa^{<\lambda} = \sum_{\mu<\lambda} \varkappa^\lambda,$$

kde na pravej strane sčitujeme cez kardinálne čísla menšie než λ. Hovoríme, že $\varkappa^{<\lambda}$ je **slabá mocnina** kardinálov $\varkappa$, λ.

Lema. *Nech $\varkappa_i, i \in I$ sú nenulové kardinálne čísla. Ak je $|I|$ alebo niektoré z $\varkappa_i$ nekonečné kardinálne číslo, tak*

$$\sum_{i\in I} \varkappa_i = \max(|I|, \sup\{\varkappa_i \colon i \in I\}).$$

Dôsledok.

(1) *Ak sú X_i množiny také, že pre každé $i \in I$ je $|X_i| = \varkappa_i$, a* $\sup\{\varkappa_i \colon i \in I\}$ *je nekonečný kardinál väčší alebo rovný $|I|$, potom*

$$|\cup X_i| = \sup\{\varkappa_i \colon i \in I\} = \sum \varkappa_i.$$

(2) *Kardinál $\varkappa$ je singulárny práve vtedy, keď existujú kardinály $\lambda < \varkappa$ a $\varkappa_i < \varkappa$ pre $i < \lambda$ také, že*

$$\varkappa = \sum_{i<\lambda} \varkappa_i.$$

Lema. *Ak je $\varkappa_i \geq 2$ pre každé $i \in I$, potom*

$$\sum_{i\in I} \varkappa_i \leq \prod_{i\in I} \varkappa_i.$$

Veta. *Königova nerovnosť. Ak sú $\varkappa_i$, λ_i kardinálne čísla také, že $\varkappa_i < \lambda_i$ pre každé $i \in I$, potom*

$$\sum_{i\in I} \varkappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Dôsledok. *Ak sú $\varkappa$, α kardinálne čísla také, že $\varkappa \geq 2$ a $\lambda \geq \omega$, potom*

(1) $cf(2^\lambda) > \lambda$,
(2) $cf(\varkappa^\lambda) > \lambda$,
(3) $\lambda^{cf(\lambda)>}\lambda$.

Lema. *Ak je $\varkappa$ limitný kardinál, potom*

$$2^\varkappa = (2^{<\varkappa})^{cf(\varkappa)}.$$

Definícia. Funkcia gimel. Pre ľubovoľný nekonečný kardinál $\varkappa$ definujeme funkciu $\gimel(\varkappa) = \aleph^{cf(\varkappa)}$, ktorú nazývame **gimel**. Je to kardinálna funkcia, ktorá zobrazeje triedu všetkých nekonečných kardinálnych čísel do Cn. Vieme, že $\gimel(\varkappa) > \varkappa$, a z Königovej nerovnosti tiež plynie $cf(\gimel(\varkappa)) > cf(\varkappa)$, špeciálne $cf(\gimel(\varkappa)) > \aleph_0$ pre každý nekonečný kardinál $\varkappa$.

Veta. *Priebeh funkcie* $2^{\aleph_\alpha}$

(1) *Ak je* $\aleph_\alpha$ *regulárny kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = \gimel(\aleph_\alpha).$$

(2) *(Bukovský) Ak je* $\aleph_\alpha$ *singulárny kardinál, môžu nastať dva prípady: (a) existuje* $\beta < \alpha$ *tak, že pre každý ordinál v intervale* $\beta \leq \gamma < \alpha$ *platí* $2^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_\beta}$, *potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta} = 2^{<\aleph_\alpha}.$$

b) Ku každému $\beta < \alpha$ *existuje* γ, $\beta < \gamma < \alpha$ *také, že* $2^{\aleph_\beta} < 2^{\aleph_\alpha}$. *Potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = \gimel(2^{<\aleph_\alpha}).$$

Veta. *(Silver) Ak je* $\aleph_\alpha$ *singulárny kardinál taký, že* $cf(\aleph_\alpha) > \omega$, *a pre každé* $\beta < \alpha$ *platí* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$, *potom aj* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Definícia. Silne limitné kardinálne čísla. Hovoríme, že kardinálne číslo $\varkappa$ je **silne limitné**, ak pre každý kardinál $\lambda < \varkappa$ platí $2^\lambda < \varkappa$.

Veta. *(Galvin, Hajnal, Shelah) Ak je* $\aleph_\alpha$ *silne limitný singulárny kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^{cf(\alpha)})^+}.$$

Navyše, ak $\alpha = \beta + \gamma$, *potom*

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\beta+(|\gamma|^{cf(\gamma)})^+}.$$

Špeciálne, ak sú $\aleph_\omega$ *a* $\aleph_{\omega_1+\omega}$ *silne limitné kardinály dostávame*

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$$

a

$$2^{\aleph_{\omega_1+\omega}} < \aleph_{\omega_1+(2^{\aleph_0})^+}$$

Lema. *Ak je* $\aleph_\alpha$ *limitný kardinál a* $cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$, *potom*

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} = (\sum_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma{}^{\aleph_\beta})^{cf(\aleph_\alpha}.$$

Veta. *Pre mocniny ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$ plati nasledujće tvrdenia:*

(1) *Ak je $\alpha \leq \beta$, potom ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.*
(2) *(Hausdorff) Ak je $\alpha = \gamma + 1$, potom*

$$\aleph_{\gamma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\gamma+1}.{\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

(3) *(Tarski) Ak je α limitný a $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha)$, potom*

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma<\alpha} {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

(4) *(Bukovský) Ak je $cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$, môžu nastať dva prípady:*
(a) Existuje $\gamma < \alpha$ také, že ${\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\delta}^{\aleph_\beta}$ pre každé δ, $\gamma \leq \delta < \alpha$, potom

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

(b) Pre každé $\gamma < \alpha$ existuje δ $\gamma < \delta < \alpha$ také, že ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} < {\aleph_\delta}^{\aleph_\beta}$, potom

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \beth(\aleph_\varepsilon) \text{ kde } \aleph_\varepsilon = \sum_{\gamma<\alpha} {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

Dôsledok. *Induktívny výpočet ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$. Pre ľubovoľné α a pevné β platí:*

(1) *AK existuje kardinál $\varkappa < \aleph_\alpha$ taký, že $\varkappa^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$, potom ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \varkappa^{\aleph_\beta}$. Špeciálne, ak je $\alpha \leq \beta$, dostanem ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.*
(2) *Ak je $\varkappa^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$, pre každý ordinál $\varkappa < \aleph_\alpha$, potom*

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, \text{ ak } \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ {\aleph_\alpha}^{cf(\aleph_\alpha)}, \text{ ak } cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \end{cases}.$$

Dôsledok. *(GCH). Pre ľubovoľné ordinály α, β platí*

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, \text{ ak } \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1}, \text{ ak } cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1}, \text{ ak } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Vynechal som časť o hypotéze singulárnych kardinálov.