

Jednobodová kompaktifikácia

Niektoré potrebné tvrdenia z topológie:

Tvrdenie: Uzavretá podmnožina kompaktného topologického priestoru je kompaktná.

Tvrdenie: Kompaktná podmnožina hausdorffovho topologického priestoru je uzavretá.

Tvrdenie: T_2 -priestor X je lokálne kompaktný $\Leftrightarrow$ pre každé $a \in X$ existuje kompaktné okolie a .

Tvrdenie: Ak Y je uzavretý (otvorený) podpriestor lokálne kompaktného priestoru X , tak Y je lokálne kompaktný.

Def: Nech (X, T) je topologický priestor, ktorý nie je kompaktný. Potom topologický priestor Y sa nazýva **kompaktifikáciou** topologického priestoru X , ak Y je kompaktný a X je hustý podpriestor Y .

Veta: Ak X je ľubovoľný topologický priestor, potom $X^* = X \cup \{\infty\}$ s topológiou $T^* = T \cup \{X^* \setminus F; F \text{ je kompaktná uzavretá podmnožina v } X\}$ je jeho kompaktifikácia a nazýva sa **jednobodová (Alexandrova) kompaktifikácia** topologického priestoru X .

Dôkaz: 1. (X^*, T^*) je topologický priestor.

Nech $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ je systém otvorených množín v X^* .

Ak $U_\alpha \in T \forall \alpha \in I$, je to O.K.

Nech teda $I = I_1 \cup I_2$, kde I_1 sú množiny z T a I_2 obsahuje množiny obsahujúce ∞ .

$$\bigcup_{\gamma \in I} U_\gamma = \left(\bigcup_{\gamma \in I_1} U_\gamma \right) \cup \left(\bigcup_{\gamma \in I_2} U_\gamma \right).$$

$$A = \bigcup_{\gamma \in I_1} U_\gamma \text{ je otvorená v } X.$$

$$B = \bigcup_{\gamma \in I_2} U_\gamma = \bigcup_{\gamma \in I_1} (X - K_\gamma) \cup \{\infty\} = (X - \bigcap_{\gamma \in I_2} K_\gamma) \cup \{\infty\} \text{ a } K = \bigcap_{\gamma \in I_2} K_\gamma \text{ je uzavretá podmnožina}$$

kompaktnej, je teda kompaktná. Potom B je otvorená množina v X^* .

$A \cup B = A \cup (X^* - K) = X^* - (K \cap (X - A))$ je doplnkom kompaktnej množiny. $(K \cap (X - A))$ je uzavretá podmnožina kompaktnej a je teda kompaktná.)

Ďalej, nech A a B sú otvorené v X^* . Chceme ukázať, že aj $A \cap B \in T^*$.

Uvažujeme 3 možnosti:

a) $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$.

b) $A \in T, B \in T^* - T \Rightarrow A \cap B = A \cap (X - K)$ je otvorená v X .

c) $A = (X - K_1) \cup \{\infty\}, B = (X - K_2) \cup \{\infty\} \Rightarrow A \cap B = X - (K_1 \cup K_2) \cup \{\infty\} \in T^*$.

$\emptyset$ a X patria do T a teda aj do T^* .

Dokázali sme teda, že T^* je topológia.

2. Kompaktnosť X^*

Nech $\{V_\alpha; \alpha \in J\}$ je otvorené pokrytie topologického priestoru X^* .

Potom existuje $\beta \in J$, že $\infty \in V_\beta \Rightarrow V_\beta = (X - K) \cup \{\infty\}$.

$\{V_\alpha; \alpha \in J\}$ je otvorené pokrytie kompaktnej množiny K , preto existuje konečné podpokrytie. Toto podpokrytie spolu s množinou V_β tvorí pokrytie celého X^* .

3. Hustota X v X^*

Každé okolie bodu ∞ má tvar $(X - K) \cup \{\infty\}$, kde K je kompaktná. Keďže X nie je kompaktný, znamená to, že každé okolie bodu ∞ má neprázdny prienik s X , čiže $\infty \in \overline{X}$. Z toho už je jasné, že $\overline{X} = X^*$.

Tvrdenie: Nech (X, T) je topologický priestor, $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$, $(\tilde{X}, \tilde{T})$ je kompaktný T_2 -priestor a X nie je kompaktný. Potom topológia $\tilde{T} = T \cup \{U : \infty \in U \wedge \tilde{X} \setminus U \text{ je kompaktný}\}$.

Dôkaz: Označme $\mathcal{S} = T \cup \{U : \infty \in U \wedge \tilde{X} \setminus U \text{ je kompaktný}\}$. To, že $\mathcal{S}$ je topológia sme už ukázali v predchádzajúcej vete. (V hausdorffovských priestoroch sú kompaktné množiny uzavreté.)

$\mathcal{S} \subset \tilde{T}$ Ak $K \subset X$ je kompaktná v X , tak K je kompaktná aj v $\tilde{X}$ (pretože ak máme $\{U_i; i \in I\}$ otvorené pokrytie K v $\tilde{X}$, tak $\{U_i \cap X; i \in I\}$ je otvorené pokrytie K v X . Vďaka kompaktnosti existuje $J \subset I$ konečná, že $\{U_i \cap X; i \in J\}$ je pokrytie K , ale potom aj $\{U_i; i \in J\}$ je otvorené pokrytie X .)

Ako kompaktná podmnožina T_2 -priestoru je teda K v $\tilde{X}$ uzavretá, čiže $X \setminus K$ je otvorená.

Ak $U \subset X$ je otvorená $\Rightarrow U = U_1 \cap X$, kde U_1 je otvorená v $\tilde{X}$, ale aj X je otvorená (lebo $\tilde{X} \setminus X = \{\infty\}$ je ako jednobodová v T_2 -priestore uzavretá) $\Rightarrow U$ je otvorená v $\tilde{X}$.

$\tilde{T} \subset \mathcal{S}$ $U \in \tilde{T}$ a $\infty \notin U \Rightarrow U \subset X \Rightarrow U = U \cap X \Rightarrow U$ je otvorená v X (podľa definície topologického podpriestoru)

$\infty \in U \in \tilde{T} \Rightarrow X \setminus U$ je kompaktná.

Ak máme totiž otvorené pokrytie $X \setminus U$ v X , je to aj otvorené pokrytie $X \setminus U$ v $\tilde{X}$ (vďaka otvorenosti X)

a pridaním U dostaneme otvorené pokrytie celého priestoru $\tilde{X}$. Z neho sa dá vybrať konečné podpokrytie a prípadným vynechaním U dostaneme konečné podpokrytie $X \setminus U$ v X .

Bez hausdorffovskosti to nefunguje. Kontrapríklad je veľmi jednoduchý. Stačí zobrať ľubovoľný topologický priestor, ktorý nie je kompaktný a kompaktifikáciu utvoríme tak, že pridáme jeden bod a topológia bude pôvodná topológia + celá množina. Otvorené pokrytie takéhoto priestoru musí obsahovať celú množinu a táto množina súčasne vytvára konečné podpokrytie.

To aby priestor nebol kompaktný je dôležité kvôli tomu, aby bol hustý v celom.

Tvrdenie: X^* je $T_2 \leftrightarrow X$ je T_2 a lokálne kompaktný.

Dôkaz: $\Rightarrow$ Podpriestor T_2 je T_2 .

Otvorený podpriestor lokálne kompaktného je lokálne kompaktný.

$\Leftarrow$ $a, b \in X$ sa dajú oddeliť už v X , a teda aj v X^* tými istými množinami.

$a \in X$ a ∞

X je lokálne kompaktný T_2 -priestor, čiže $a \in X$ má lokálne kompaktné okolie.

$a \in U \subset K \subset X$, kde K je kompaktná a U je otvorená $\Rightarrow \infty \in V = X \setminus K$, kde V je otvorená v X^* .