

Whiteheadova veta

Def: X je lokálne kompaktný, ak pre každý bod $x \in X$ existuje okolie U také, že $\bar{U}$ je kompaktné.

Veta: *Whiteheadova veta* Nech X je lokálne kompaktný topologický priestor a $g : Y \rightarrow Z$ je ľubovoľné faktorové zobrazenie. Potom $f = id_X \times g : X \times Y \rightarrow X \times Z$ je faktorové.

Dôkaz: Nech $W \subset X \times Z$ a $f^{-1}(W) \subset X \times Y$ je otvorená.

Nech $(x_0, y_0) \in W$ je ľubovoľný bod z W .

Vyberme $y_0 \in g^{-1}(z_0)$ a okolie U bodu y_0 také, že $\bar{U}$ je kompaktné a $\bar{U} \times \{y_0\} \subset f^{-1}(W)$.

Pre každé $y \in Y$ máme

$$(1) \quad \bar{U} \times g^{-1}g(y) \subset f^{-1}(W) \Leftrightarrow \bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W)$$

z čoho $\bar{U} \times g^{-1}(z_0) \subset f^{-1}(W)$.

Pre množinu $V = \{z \in Z : \bar{U} \times g^{-1}(z) \subset f^{-1}(W)\}$ platí $(x_0, z_0) \in U \times V \subset W$, čiže stačí dokázať, že V je otvorená.

Keďže g je faktorové, prejde to na dôkaz otvorenosti množiny $g^{-1}(V) = \{y \in Y : \bar{U} \times g^{-1}g(y) \subset f^{-1}(W)\}$. Z (1) vyplýva, že $g^{-1}(V) = \{y \in Y : \bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W)\}$ a z Kuratowského vety je $g^{-1}(V)$ otvorené, lebo je doplnkom projekcie uzavretej množiny $(\bar{U} \times Y) \setminus f(W)$ pri projekcii $p : \bar{U} \times Y \rightarrow Y$ a $\bar{U}$ je kompaktné.

Veta: (*Kuratowského veta*)

Nech X je ľubovoľný topologický priestor.

Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) X je kompaktný.

(ii) Pre každý topologický priestor Y je zobrazenie $p : X \times Y \rightarrow Y$ uzavreté.

(iii) Pre každý normálny topologický priestor Y je zobrazenie $p : X \times Y \rightarrow Y$ uzavreté.

Ukážeme len (i) $\Rightarrow$ (ii). (Túto implikáciu sme použili v predchádzajúcom dôkaze.)

Na jej dôkaz využijeme nasledovnú jednoduchú lemu:

Lema: Nech A je kompaktný topologický priestor, Y ľubovoľný topologický priestor a $y \in Y$.

Potom pre každú otvorenú množinu $W \subset X \times Y$ obsahujúcu $A \times \{y\}$ existujú otvorené množiny $U \subset X$ a $V \subset Y$ také, že $A \times \{y\} \subset U \times V \subset W$.

Dôkaz: (Lema) Pre každý $x \in A$ má (x, y) okolie tvaru $U_x \times V_y \subset W$.

$$A \times \{y\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \times V_y.$$

Z kompaktnosti A máme existenciu otvoreného podpokrytia.

$$A \times \{y\} \subset \bigcup_{x=1}^k U_{x_i} \times V_{x_i}$$

$$\text{Stačí položiť } U := \bigcup_{x=1}^k U_{x_i} \text{ a } V := \bigcap_{x=1}^k V_{x_i}.$$

Dôkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nech X je kompaktný topologický priestor a $F = \bar{F} \subset X \times Y$.

Vezmime $y \notin p(F)$.

$X \times \{y\} \subset X \times Y \setminus F$, z čoho na základe predchádzajúcej lemy vyplýva, že existuje okolie V bodu y také, že $(X \times V) \cap F = \emptyset$.

Máme teda $p(F) \cap V = \emptyset$.

Ukázali sme, že $Y \setminus p(F)$ je otvorená, čiže $p(F)$ je uzavretá množina.

