Exponent konvergencie a hustoty postupností prirodzených čísel

28. februára 2005

Úvod

Nech $0 < r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \leq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Potom existuje také reálne číslo $\tau \in [0, +\infty]$, že pre každé $\sigma > \tau$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^{-\sigma} < +\infty$ (konverguje) a pre každé σ, $0 \leq \sigma \leq \tau$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^{-\sigma} = +\infty$ (diverguje) (pozri [10]). Číslo τ sa nazýva exponent konvergencie postupnosti $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ V prácach [3], [4] a [13] sa exponent konvergencie študuje ako reálna funkcia definovaná na triede neklesajúcich postupností reálnych čísel.[1]

V tomto článku sa zameriame na štúdium exponentu konvergencie postupností prirodzených čísel. To nám umožní študovať túto otázku v súvislosti s rôznymi typmi hustôt týchto postupností (v prvej časti práce). Využijeme známu metódu dyadických hodnôt množín prirodzených čísel a pomocou nej budeme pri použití pojmu exponentu konvergenciu študovať istú reálnu funkciu g definovanú na intervale $(0, 1]$.

Definície a označenia

Nech $A = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$, $a_k \in \mathbb{N}$ $(k = 1, 2 \ldots)$ je postupnosť prirodzených čísel. Budeme ju stotožňovať s množinou

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$$

jej členov. Podľa predošlého existuje také $\tau \geq 0$, že pre $\sigma > \tau$ je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-\sigma} < +\infty$ a pre σ, $0 \leq \sigma < \tau$ je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-\sigma} = +\infty$. Toto číslo τ budeme nazývať exponentom konvergencie postupnosti A a teda $\tau = \tau(A)$.

$$\tau(A) = \inf\{t > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-t} < +\infty\} \tag{1}$$

[1] V prvom zošite so seminára: strana 2, 20, 23.

Je známe ([10, str. 40]), že pre $\tau(A)$ platí[2]

$$\tau(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log a_n}.$$

Príklady:
$A = \{1, 2^k, 3^k, \ldots\} \Rightarrow \tau(A) = \frac{1}{k}$
$A = \{1!, 2!, 3!, \ldots\} \Rightarrow \tau(A) = 0.$

Pre ďalšie potreby pripomenieme pojem asymptotickej hustoty a rovnomernej hustoty postupností (množín) prirodzených čísel. Ak $A = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, $a_1 < a_2 < \ldots$, $a_k \in \mathbb{N}$ tak znakom $A(p+1, p+s)$ $(p, s \in \mathbb{N})$ označíme počet prvkov množiny $A \cap [p+1, p+s]$. Potom čísla

$$\underline{d}(A) = \liminf_{s\to\infty} \frac{A(1,s)}{s}, \overline{d}(A) = \limsup_{s\to\infty} \frac{A(1,s)}{s},$$

nazývame dolnou resp. hornou asymptotickou hustotou množiny A (postupnosti A). Ak $\underline{d}(A) = \overline{d}(A) =: d(A)$, tak číslo $d(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{A(1,s)}{s}$ nazývame asymptotickou hustotou množiny A (pozri [9, str. 70–71]). Namiesto $A(1, s)$ píšeme aj $A(s)$. Ďalej je dobre známe, že

$$\underline{d}(A) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{a_k}, \overline{d}(A) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} \tag{2}$$

a ak existuje $d(A)$, tak

$$d(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{a_k}. \tag{2*}$$

Položme

$$\alpha_s = \liminf_{p\to\infty} A(p+1, p+s),$$
$$\alpha^s = \limsup_{p\to\infty} A(p+1, p+s).$$

Potom existujú

$$\underline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha_s}{s}, \overline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha^s}{s}$$

a nazývajú sa dolná resp. horná rovnomerná hustota množiny (postupnosti) A. Ak $\underline{u}(A) = \overline{u}(A) =: u(A)$, tak $u(A)$ nazývame rovnomerná hustota množiny (postupnosti) A (pozri [2]).

Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ platí

$$\underline{u}(A) \le \underline{d}(A) \le \overline{d}(A) \le \overline{u}(A) \tag{3}$$

Ak $x \in (0, 1]$ a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$ je jeho nekonečný dyadický rozvoj, tak kladúc $A_x = \{n : \varepsilon_n(x) = 1\}$ dostaneme priradenie $x \mapsto A_x$, ktoré je bijektívnym zobrazením intervalu $(0, 1]$ na triedu $\mathcal{U}$ všetkých nekonečných množín $A \subset \mathbb{N}$.

[2] Na workshope profesor Grekos spomínal exponenciálnu hustotu, $\varepsilon A = \lim \log A(n)/\log n$. Vidíme, že $\overline{\varepsilon} A = \tau(A)$. Možno by mohli byť zaujímavé v tejto súvislosti známe výsledky o exponenciálnej hustote.

Píšeme aj $\rho(A_x) = x$, vo všeobecnosti ak $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$, tak $\rho(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k} \in (0,1]$. Číslo $\rho(A)$ sa nazýva dyadické číslo množiny A.

Pri pevnom n sa interval $(0,1]$ rozpadá na 2^n intervalov (n-tého poradia)

$$i_n^{(j)} = \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right],$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Dyadický rozvoj každého čísla z $i_n^{(j)}$ začína tou istou n-ticou prvých číslic $\varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_n^0$. Stručne hovoríme, že $i_n^{(j)}$ patrí k n-tici $\varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_n^0$ (ε_k^0 je 0 alebo 1, $k = 1, 2, \ldots, n$).

1 Exponent konvergencie a hustoty postupností prirodzených čísel

Nech $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 < a_2 < \ldots$, $a_k \in \mathbb{N}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Potom (pozri [10, str. 40])

$$\tau(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log a_n}.$$

Tento fakt dáva tušiť, že existuje nejaká súvislosť medzi veľkosťou exponentu konvergencie a jej hustotami.

Všimnime si, že $n \le a_n$, preto pre každú nekonečnú množinu A ($A \in \mathcal{U}$)

$$\tau(A) \le 1. \tag{4}$$

Ak každej množine $A \in \mathcal{U}$ priradíme číslo $\tau(A)$, dostaneme tak zobrazenie $\tau \colon \mathcal{U} \to [0,1]$.

Veta 1.1. *(i) Ak $\underline{d}(A) > 0$, tak $\tau(A) = 1$.*

(ii) Ak $\tau(A) < 1$, tak $d(A) = 0$.

S výrokom (i) je ekvivalentný výrok (v): Ak $\tau(A) < 1$, tak $\underline{d}(A) = 0$. Preto (ii) je vlastne zosilnením výroku (v).

(Ako dôsledok dostávame, že $\tau(A) < 1$, tak $\delta(A) = 0$.)

Dôkaz: strana 6, 7

M. Mačaj: Nemôže súčasne platiť $d(A) = 0$ a $\tau(A) = 1$. Kontrapríklad: množina P všetkých prvočísel. (k-te prvočíslo je rádovo $k \log k$.)

Veta 1.2. *Platí $\tau[\mathcal{U}] = [0,1]$.*

Dôkaz: strana 8.

Preskúmame súvis exponentu konvergencie s rovnomernou hustotou.

Propozícia 1.1. *Ak $\underline{u}(A) > 0$, tak $\tau(A) = 1$.*

Dôkaz. Ak $\underline{u}(A) > 0$, tak $\underline{d}(A) > 0$ a tvrdenie vyplýva z Vety 1.1 (i). □

V súvislosti s vetou 1.1 (ii) poznamenajme, že ak $\tau(A) < 1$, tak ešte nemusí platiť $u(A) = 0$. Pre $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{10^k + 1, \ldots, 10^k + k\}$ platí $\tau(A) = 0$ a pritom $\underline{u}(A) = 0$, $\overline{u}(A) = 1$.

$A = \{11, 101, 102, 1001, 1002, 1003, \ldots\}$. Čísla $a_{\frac{k(k-1)}{2}+1} = 10^k+1, \ldots, a_{\frac{k(k+1)}{2}} = 10^k + k$, čiže tieto členy sú medzi 10^k a 10^{k+1}.

$\frac{\log n}{log a_n} \leq \frac{\log \frac{k(k+1)}{2}}{\log 10^k} \leq \frac{2\log(k+1)}{k} \to 0 \Rightarrow \tau(A) = 0$

$\frac{n}{a_n} \leq \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{10^k} \to 0 \Rightarrow d(A) = 0 \Rightarrow \underline{u}(A) = 0$

$\frac{A(10^k+1, 10^k+k)}{k} = 1 \Rightarrow \underline{u}(A) = 0$

Logaritmická hustota: Z vety 1.1 tiež ľahko vyplýva, že $\tau(A) < 1 \Rightarrow \delta(A) = 0$.

Otázky: Súvislosť exponentu konvergencie s gap-density.

2 Exponent konvergencie a Baireov priestor rastúcich postupností

Znakom $(\mathcal{U}, \rho)$ označíme Baireov priestor rastúcich postupností prirodzených čísel ([1, str. 185], [7, str. 15]). Ak $X = (x_n)_{n=1}^\infty, Y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{U}$, tak $\rho(X,Y) = 0$, keď $X = Y$ a

$$\rho(X,Y) = \frac{1}{\min\{n : x_n \neq y_n\}},$$

keď $X \neq Y$.

Ľahko možno overiť, že $(\mathcal{U}, \rho)$ je úplný metrický priestor.

Pomocou pojmu exponent konvergencie možno na $\mathcal{U}$ definovať funkciu $\tau\colon \mathcal{U} \to [0,1]$,

$$\tau(X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log x_n}$$

pre $X = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{U}$.

Zobrazenie τ je surjektívne zobrazenie priestoru $\mathcal{U}$ na interval $[0,1]$ (pozri Vetu 1.2).

Pri pevnom $n \geq 2$ položme

$$\tau_n(X) = \frac{\log n}{\log x_n}.$$

Lema 2.1. *Funkcia τ_n $(n \geq 2)$ je spojitá na $\mathcal{U}$.*

Dôkaz. Nech $A = (a_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{U}$. Uvážme, že funkcia τ_n $(n \geq 2)$ je konštantná v guli $B(A, \frac{1}{n}) = \{X = (x_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{U} : \rho(X,A) < \frac{1}{n}\}$. Z toho je tvrdenie už zrejmé. □

Poznámka: Z predošlej lemy možno odvodiť, že funkcia τ, $\tau(X) = \limsup_{n\to\infty} \tau_n(X)$ pre $X \in \mathcal{U}$ patrí nanajvýš do druhej Bairovej triedy B_2 (pozri [8, str. 429, Veta 3].[3])

Lema 2.2. *Funkcia τ je nespojitá v každom bode priestoru $\mathcal{U}$.*

Dôkaz: strany 12–14.

Veta 2.1. *Funkcia $\tau\colon \mathcal{U} \to [0,1]$ patrí presne do druhej Baireovej triedy B_2.*

[3] Tam je to robené pre funkcie definované na $\mathbb{R}$, ale určite sa to dá rozšíriť na metrické priestory. TODO: skús nájsť inde.

Dôkaz. Podľa poznámky za Lemou 2.1 patrí buď do B_1 alebo do B_2 (do B_0 nepatrí, lebo je všade nespojitá). Keby patrila do B_1, tak množina jej bodov nespojitosti by bola prvej kategórie v $\mathcal{U}$. To je v spore s Lemou 2.2. □

Na záver tejto časti ešte preskúmame štruktúru priestoru $(\mathcal{U}, \rho)$ z hľadiska veľkosti exponentu konvergencie prvkov z $\mathcal{U}$.

Položme

$$\mathcal{U}_0 = \{X = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{U} : \tau(X) < 1\},$$
$$\mathcal{U}_1 = \{X = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{U} : \tau(X) = 1\}.$$

Veta 2.2. *Množina $\mathcal{U}_0$ je prvej Baireovej kategórie hustá v $\mathcal{U}$.*

Dôsledok 2.1. *Množina $\mathcal{U}_1$ je reziduálna v $\mathcal{U}$.*

Dôkaz vety 2.2: strana 15, využije sa Veta 2 z [12]. Iný dôkaz vety 2.2 môže byť založený na Vete 1.1 (*ii*).

Keď už vieme, že funkcia prvej Bairovej kategórie, ľahko zistíme Borelovu triedu množiny $\mathcal{U}_0$. Podľa [5, §27] je zobrazenie $f\colon X \to Y$, kde X, Y sú metrické priestory a Y je navyše separabilný, Bairovej triedy α práve vtedy, keď vzor ľubovoľnej uzavretej množiny je multiplikatívnej Borelovej triedy α, ekvivalentne vzor každej otvorenej množiny je z aditívnej Borelovej triedy α. $\mathcal{U}_0 = \tau^{-1}(0,1)$, preto $\mathcal{U}_0$ je typu $G_{\delta\sigma}$. Komplement tejto množiny, čiže množina $\mathcal{U}_1$, je typu $F_{\sigma\delta}$.[4]

2.1 Pórovitosť

Zaujímala by nás aj pórovitosť množiny $\mathcal{U}_0$.[5] Pripomeňme najprv niektoré základné pojmy súvisiace s pórovitosťou.

Nech (Y, d) je ľubovoľný metrický priestor. Potom označme

$$\gamma(y, r, M) = \sup\{t > 0 : (\exists z \in Y)(B(z,t) \subseteq B(y,r)) \wedge (B(z,t) \cap M = \emptyset)\}.$$

Hodnoty $\overline{p}(y, M) = \limsup\limits_{r \to 0^+} \frac{\gamma(y,r,M)}{\gamma}$ a $\underline{p}(y, M) = \liminf\limits_{r \to 0^+} \frac{\gamma(y,r,M)}{\gamma}$ nazývame hornou a dolnou pórovitosťou množiny M v bode y. Ak $\overline{p}(y, M) = \underline{p}(y, M)$, tak sa spoločná hodnota označuje $p(y, M)$ a nazýva pórovitosť množiny M v bode y. Čísla $\overline{p}(y, M)$, $\underline{p}(y, M)$, $p(y, M)$ vždy ležia v intervale $[0, 1]$.

Množina M sa nazýva porous (very porous) v y ak $\overline{p}(y, M) > 0$ ($\underline{p}(y, M) > 0$). Ak $0 < c \leq 1$, tak M je c-porous (very c-porous) v y, ak $\overline{p}(y, M) \geq c$ ($\underline{p}(y, M) \geq c$). Množina M sa nazýva strongly porous v y, ak $\underline{p}(y, M) = 1$ ($\Leftrightarrow$ $\overline{p}(y, M = 1)$).

Ak niektorá s týchto vlastností platí pre všetky $y \in Y$, hovoríme, že Y je porous, very porous... Ak M je spočítateľným zjednotením množín, ktoré majú danú vlastnosť, voláme ju σ-porous, σ-very porous...

Každá množina, ktorá je pórovitá v Y je riedka. Každá σ-pórovitá množina je prvej Bairovej kategórie.

Na dôkaz σ-pórovitosti využijeme postup využitý v článku [6] pri dôkaze Theorem 2.2. Vlastne uvedený postup možno využiť bezo zmeny, treba si len uvedomiť, ktoré predpoklady sú v spomínanom dôkaze nevyhnutné.

[4]TODO Nejaký iný spôsob, ako ukázať, že to nie je prvej Borelovej triedy?

[5]Keďže každá pórovitá množina je riedka, $\mathcal{U}_0$ nie je pórovitá (v celom priestore).

Predpokladajme, že máme dané funkcie $h_n\colon \mathcal{U} \to [0,1]$ pre $n \geq 2$, pričom $h_n(A)$ závisí len od prvých n členov $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ postupnosti A. Ďalej nech

$$\begin{aligned} h(A) &= \limsup h_n(A), \\ \mathcal{V}_0 &= \{A \in \mathcal{U} : h(A) < 1\}, \\ \mathcal{V}_1 &= \{A \in \mathcal{U} : h(A) = 1\}. \end{aligned}$$

(Tieto podmienky sú splnené pre funkcie τ_n ako aj pre funkcie h_n z [6].) Definujme podobne ako v [6] pre $m = 2, 3, \ldots$ a $p = 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{T}_m = \{A \in \mathcal{U} : h(A) < 1 - \frac{1}{m}\}$$

$$\mathcal{T}_{m,p} = \{A \in \mathcal{U} : \forall_{n \geq p} h_n(A) < 1 - \frac{1}{m}\}$$

Zrejme platí

$$\mathcal{V}_0 = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{T}_m$$

$$\mathcal{T}_m \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{T}_{m,p}$$

Veta 2.3. *Množina $\mathcal{V}_0$ je σ-1-pórovitá na $\mathcal{V}_1$.*[6]

Dôkaz. Ak $A \in \mathcal{V}_1$, tak $\limsup\limits_{n \to \infty} h_n(A) = 1$, čiže existuje postupnosť $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$\lim_{k \to \infty} h_{n_k}(A) = 1.$$

Voľbou dostatočne veľkého k vieme dosiahnuť, že $n_k > p$ a $h_{n_k}(A) > 1 - \frac{1}{m}$. Potom pre každú postupnosť $C \in B(A, \frac{1}{n_k})$ tiež platí $h_{n_k}(C) > 1 - \frac{1}{m}$ (pretože prvých n_k členov postupností A a C je rovnakých). Z toho dostaneme, že

$$B(A, \frac{1}{n_k}) \cap \mathcal{T}_{m,p} = \emptyset.$$

Preto $\overline{p}(A, \mathcal{T}_{m,p}) = 1$. □

Dôsledok 2.2. *Množina $\mathcal{U}_0$ je σ-1-pórovitá na $\mathcal{U}_1$.*

Samozrejme, zostávajú tu ďalšie zaujímavé otázky týkajúce sa pórovitosti.

3 Funkcia $g(x) = \tau(A_x)$ a jej vlastnosti

Súvis medzi číslami $x \in [0,1]$ a priradenými množinami $A_x = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n(x) = 1\}$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k}$, nás vedie k vyšetrovaniu vlastností funkcie $g\colon (0,1] \to [0,1]$, $g(x) = \tau(A_x)$ pre $x \in (0,1]$. Pritom odvodíme aj isté metrické výsledky, ktoré dopĺňajú výsledky z predošlej časti práce.

Najprv uvedieme jednoduché vlastnosti funkcie g.

[6] Myslí sa tým, že existuje postupnosť množín 1-pórovitých v každom bode $\mathcal{V}_1$, ktorých zjednotením je $\mathcal{V}_0$. Čiže voľba postupnosti množín nezávisí od výberu bodu z $\mathcal{V}_1$, v ktorom skúmame pórovitosť.

Propozícia 3.1. *Pre každý interval $I \subseteq (0,1]$ platí $g[I] = [0,1]$.*

Dôkaz: 17,18

Teda funkcia g nadobúda všetky svoje hodnoty na každom intervale. Z tohoto faktu ihneď vyplýva

Propozícia 3.2.

(i) Funkcia g má Darbouxovu vlastnosť.

(ii) Funkcia g je nespojitá v každom bode intervalu $(0,1]$.

Naskytá sa prirodzená otázka do ktorej Bairovej triedy patrí funkcia g.

Veta 3.1. *Funkcia g patrí presne do druhej Bairovej triedy B_2 na $(0,1]$.*

Dôkaz: strany 19–21

Propozícia 3.3. *Zobrazenie $h\colon (\mathcal{U}, d_B) \to ((0,1\rangle, |\cdot|)$ definované ako $h(A_x) = x$ je spojité.*[7]

Dôkaz. Ak $d_B(A_x, A_y) < \frac{1}{n}$, tak x aj y ležia v tom istom intervale n-tého poradia a platí $|x-y| < \frac{1}{2^n}$. □

Poznámka: Keďže sme ukázali, že $g \in B_2$ a $\tau\colon \mathcal{U} \to [0,1]$ možno vyjadriť ako $\tau = g \circ h$, vyplýva z Propozície 3.3, že τ je najviac druhej Bairovej triedy.

Ešte sa zmienime o hladinových množinách funkcie $g(x) = \tau(A_x)$.

Pre $t \in \mathbb{R}$ položme

$$E(t) = \{x \in (0,1] : g(x) = \tau(A_x) < t\}.$$

Potom pre $t > 1$ je $E(t) = (0,1]$, pre $t \le 0$ zase $E(t) = \emptyset$.

Veta 3.2. *Pre $t \le 1$ platí* $\dim E(t) = 0$.

Dôkaz: 22, [7]

Dôsledok 3.1. *Pre $t \le 1$ platí $\lambda(E_t) = 0$.*

Uvážme, že ak položíme $F(1) = \{x \in [0,1] : g(x) = \tau(A_x) = 1\}$, tak

$$(0,1] = E(1) \cup F(1), \tag{5}$$

pričom $E(1) \cap F(1) = \emptyset$.

Veta 3.3.

(i) Platí $\lambda(E_1) = 0$, $\lambda(F(1)) = 1$.

(ii) Funkcia g je ekvivalentná na intervale $(0,1]$ s funkciou identicky rovnou 1.

[7] Pôvodne som myslel, že je to homeomorfizmus, to však neplatí.

4 Exponent konvergencie a subaditívne miery

Množinová funkcia $m\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ sa nazýva *submiera,* ak

(i) $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

(ii) $m(A\cup B) \leq m(A) + m(B)$,

(iii) $m(\{a\}) = 0$

Ak navyše pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú množiny $A_1,\dots,A_n$ také, že $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \mathbb{N}$ a $m(A_i) < \varepsilon$ pre $i = 1,\dots,k$.

Pomocou exponentu konvergencie možno definovať subaditívnu mieru μ_τ na $2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tak, že položíme $\mu_\tau(A) = 0$ pre každú konečnú podmnožinu $A \subseteq \mathbb{N}$ a pre nekonečné kladieme $\mu_\tau(A) = \tau(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log a_n}$.

Propozícia 4.1.

(i) Funkcia μ_τ je subaditívna.

(ii) Funkcia μ_τ je monotónna.

Propozícia 4.2. *Pre ľubovoľné 2 množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ platí* $\mu_\tau(A,\cup B) = \max\{\mu_\tau(A), \mu_\tau(B)\}$.

Propozícia 4.3. *Submiera μ_τ nie je kompaktná.*

TODO (moje otázky): Aký vzťah je medzi d_B a d_F na $\mathcal{U}$?
Dá sa vymyslieť nejaká pekná metrika na $\mathcal{U}$, aby $A_x \mapsto x$ bol homeomorfizmus. (Intervaly $\left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+k}{2^n}\right)$ tvoria bázu $(0,1)$. Stačilo by asi, aby po prenesení topológie z $\mathcal{U}$ boli tieto otvorené.)

Literatúra

[1] P. S. Alexandrov. *Úvod do obecní theorie množin a funkcí.* NČSAV, Praha, 1954.

[2] T. C. Brown and A. R. Sember. The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, XII:1–6, 1990.

[3] P. Kostyrko. Note to the exponent of convergence. *Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Com.*, 34:29–38, 1979.

[4] P. Kostyrko and T. Šalát. On the exponent of convergence. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, XXXI:187–194, 1982.

[5] K. Kuratowski. *Topologie I.* PWN, Warszawa, 1958.

[6] M. Mačaj, L. Mišík, T. Šalát, and J. Tomanová. On a class of densities of sets of positive integers. *Acta Math. Univ. Comeniane*, 72:213–221, 2003.

[7] J.-I. Nagata. *Modern General Topology.* Morth-Holland Publ. Comp., Amsterdam, London - Groningen - New York, 1968.

[8] I. P. Natanson. *Theory of functions of a real variable.* Moskva, 1957.

[9] H. H. Ostmann. *Additive Zahlentheorie I.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.

[10] G. Pólya and G. Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Nauka, Moskva, 1978.

[11] B. J. Powell and T. Šalát. Convergence of subseries of the harmonic series and asymptotic densities of sets of positive integers. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 50(6):60–70, 1991.

[12] T. Šalát. Remarks on the Riemann's theorem on divergent series. *Mat.-fyz. Čas. SAV*, 5:94–100, 1955.

[13] T. Šalát. On exponent of convergence of subsequences. *Czechosl. Math. J.*, 34(109):362–370, 1984.