Okrem toho príkladu, ktorý som sľúbil, som sem dal aj nejaké veľmi jednoduché kritérium, ktoré by malo zabezpečiť, že $\Gamma_x$ je súvislá.

K označeniu, ktoré budem používať: $L_x$ = obyčajné hromadné hodnoty, $\Lambda_x$ =statistical limit points, $\Gamma_x$ =statistical cluster points.

Ak $K \subseteq \mathbb{N}$, tak pre podpostupnosť postupnosti $x$ určenú indexovou množinou $K$ budem používať označenie $(x)_K$.

# 1 Príklad postupnosti s $\Gamma_x = \langle 0, 1\rangle$ takej, že $x_{n+1} - x_n \to 0$

Cieľom je zostrojiť postupnosť $x$ reálnych čísel takú, aby platilo $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ a súčasne aby $\Gamma_x$ bola súvislá a nie jednobodová.

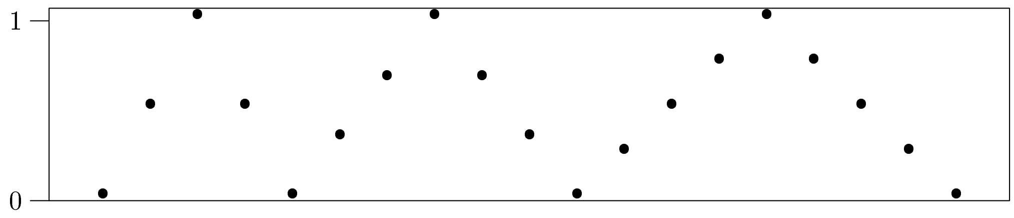
Postup, ktorý použijeme vychádza z jednej vety z článku [1].

**Lema 1.1 ([1, Theorem 2.8]).** *Ak $x$ je postupnosť komplexných čísel a $L_x$ je množina hromadných bodov $x$, tak existuje natiahnutie $w$ postupnosti $x$ také, že každý hromadný bod postupnosti $x$ je statistical limit point postupnosti $w$.*

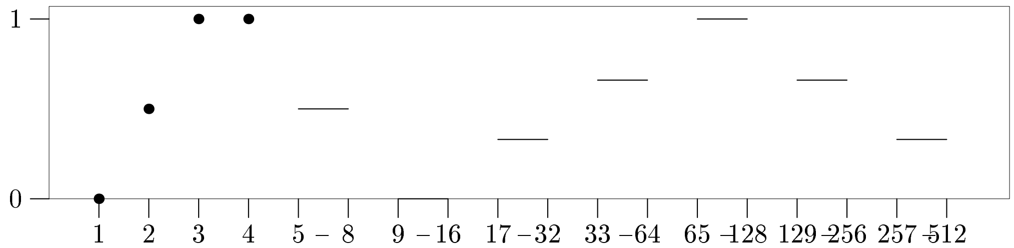
Pod natiahnutím sa rozumie postupnosť, ktorá má rovnaké členy, ako postupnosť $x$, tieto členy sú v rovnakom poradí ako v $x$, len sa môžu opakovať viackrát za sebou. V spomínanom článku sa vlastne ukáže (a možno to ľahko nahliadnuť), že natiahnutie z lemy 1.1 možno získať tak, že nová postupnosť bude mať vždy od indexu $2^k + 1$ po $2^{k+1}$ obsahovať $k$-ty člen pôvodnej postupnosti.

Z lemy 1.1 vyplýva, že ak najprv skonštruujeme postupnosť $y$ čísel z $\langle 0, 1\rangle$ takú, že $L_y = \langle 0, 1\rangle$, tak jej natiahnutím vieme dostať postupnosť takú, že $\Gamma_x = L_y = \langle 0, 1\rangle$.

Môžeme zvoliť napríklad $y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$




Natiahnutá postupnosť bude vyzerať takto $y_1, y_2, y_3, y_3, y_4, y_4, y_4, y_4, y_5, \ldots$, t.j. pre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ sa $x_n = y_{k+1}$.




$$\Gamma_x = L_y = \langle 0, 1\rangle$$

## 2 Postačujúca podmienka pre súvislosť

Tu by som chcel uviesť jednoduchú postačujúcu podmienku pre súvislosť $\Gamma_x$. Táto postačujúca podmienka je však taká, že súčasne zabezpečí platnosť $L_x = \Gamma_x$ a $x_n - x_{n+1} \to 0$, čiže potom to vyplýva už z tej podmienky pre množinu obyčajných hromadných hodnôt. Teda to nie je nič prevratné.

Ak máme danú postupnosť $x$ označme

$$M_n = \max\{|x_n - x_k| : n \leq k \leq 2n\} \tag{1}$$

Všimnime si, že pre postupnosť z predchádzajúceho príkladu platí:[1]

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \tag{2}$$

Zaujímalo by nás, či táto podmienka nezaručí súvislosť množiny $\Gamma_x$.

**Propozícia 2.1.** Ak postupnosť $x_n$ reálnych čísel spĺňa (2), tak každá hromadná hodnota postupnosti $x$ je súčasne statistical limit point tejto postupnosti.

*Dôkaz.* Nech $x$ je postupnosť a $t$ je hromadná hodnota $x$. Potom existuje podpostupnosť $(x)_K$, ktorá konverguje k $t$. Chceme nájsť netenkú postupnosť, ktorá konverguje k $t$.

Položme $L = \bigcup_{k\in K}\{k, k+1, \dots, 2k\}$. Pre každé $k \in K$ platí $L_{2k} \supseteq \{k, k+1, \dots, 2k\}$, čiže $\frac{|L_{2k}|}{2k} \geq \frac{1}{2}$, teda $d(L) \neq 0$. (To znamená, že podpostupnosť určená množinou $L$ je netenká.)

Už vieme, že $(x)_L$ je netenká podpostupnosť $x$. Ukážme ešte, že táto podpostupnosť konverguje k $t$. Nech $\varepsilon > 0$. Potom existuje $k_0 \in K$ také, že pre $k > k_0$, $k \in K$, je $|x_k - t| < \frac{\varepsilon}{2}$ a tiež existuje $n_0$ také, že pre $n > n_0$ je $M_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Označme $N = \max\{2k_0, 2n_0\}$. Ukážme, že pre $l \in L$ a $l \geq N$ platí $|x_l - t| < \varepsilon$.

$l$ patrí do množiny $\{k, \dots, 2k\}$ pre niektoré $k \in K$. Pretože $2k \geq l \geq 2k_0$, máme $k \geq k_0$, teda $|x_k - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Súčasne platí $k \geq n_0$ a $|x_k - x_l| \leq M_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$, čiže

$$|x_l - t| \leq |x_k - x_l| + |x_k - t| \leq \varepsilon.$$

□

**Dôsledok 2.1.** *Ak postupnosť $x$ spĺňa (2), tak $\Gamma_x = L_x$.*

*Dôkaz.* Predchádzajúca propozícia vlastne tvrdí, že $L_x \subseteq \Lambda_x$, súčasne vieme, že pre každú postupnosť platí $\Lambda_x \subset \Gamma_x \subset L_x$. □

**Dôsledok 2.2.** *Ak ohraničená postupnosť reálnych čísel spĺňa (2), tak $\Gamma_x$ je súvislá.*

*Dôkaz.* Z podmienky (2) vyplýva, že $x_n - x_{n+1} \to 0$, teda $L_x$ je súvislá. Podľa dôsledku 2.1 je $\Gamma_x = L_x$. □

Ešte si všimnime, že konštantu 2 v (2) možno nahradiť ľubovoľným reálnym číslom $c > 1$.

## Literatúra

[1] J.Zeager: *Statistical limit point theorems,* IJMMS, vol.23, No.11 (2000), 741-752.

[1] Pre $n$ totiž čísla $n+1, \dots, 2n$ ležia na rovnakom „schodíku“ ako $n$ alebo na nasledujúcom a výška „schodov“ pre $n$ idúce do $\infty$ klesá k 0.