

Olevskii lema and ℓ_m^q

Problém: Skúmame pórovitosť ℓ^q v ℓ^p pre $1 \leq q < p$. Problém je motivovaný nasledujúcou vetou:

Theorem 1 ([2]). Ak $1 \leq q < p$ tak $\ell^q \subseteq \ell^p$, ℓ^q je hustá v ℓ^p , ℓ^q je prvej kategórie v ℓ^p .

Lemma 1 ([1]). Konvexná riedka podmnožina v Banachovom priestore je silne pórovitá.

$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ je Banachov priestor

$(\|x\|_p = (\sum x_k^p)^{\frac{1}{p}})$ označuje obvyklú normu na ℓ^p .

Všimnime si, že $\sum |x_k|^q \leq m \Leftrightarrow \|x\|_q \leq m^{\frac{1}{q}}$.

Z toho sa dá ľahko ukázať, že množina

$$\ell_m^q = \{x \in \ell_q : \sum |x_k|^q \leq m\} = \{x \in \ell_q : \|x\|_q \leq m^{\frac{1}{q}}\}$$

je konvexná. Platí totiž pre $x, y \in \ell_m^q$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_q \leq \left\| \frac{x}{2} \right\|_q + \left\| \frac{y}{2} \right\|_q = \frac{\|x\|_q}{2} + \frac{\|y\|_q}{2} \leq m^{\frac{1}{q}}$$

(z trojuholníkovej nerovnosti v ℓ_q , resp. Minkowského nerovnosti).

Treba ešte ukázať, že množiny ℓ_m^q sú riedke v ℓ^p . Najprv si uvedomme, že ℓ_m^q sú uzavreté. Zrejme

$$x \in \ell_m^q \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \leq m \Leftrightarrow (\forall n) \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq m.$$

$$(\Rightarrow) \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \leq m$$

$(\Leftarrow)$ Ak pre všetky n sú čiastočné súčty najviac m , tak ani ich limita nepresiahne m .) Preto

$$\ell_m^q = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \ell^q; \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq m\}$$

Priradenie k -tej súradnice je spojitá funkcia z ℓ^p do $\mathbb{R}$, absolútna hodnota je spojitá funkcia, konečný súčet spojitých funkcií je opäť spojitá funkcia, teda $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|^q$ je spojitá. Preto množiny $\{x \in \ell^q; \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq m\}$ sú uzavreté a ℓ_m^q je prienik uzavretých množín, teda je tiež uzavretá.

Uzavretá množina je riedka práve vtedy, keď je brehová (má prázdne vnútro). Stačí ukázať, že ℓ^q je brehová, lebo $\ell_m^q \subset \ell^q$. Zvoľme ľubovoľný prvok $x \in \ell^q$ a $r > 0$. V guli $B(x, r)$ nájdeme prvok z $\ell^p \setminus \ell^q$, preto x nemôže ležať vo vnútri ℓ^q .

Nech z je ľubovoľný prvok z $\ell^p \setminus \ell^q$, napríklad $z = (z_k)$, kde $z_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}$ ($\sum \frac{1}{k^{\frac{p}{q}}} < +\infty$ lebo $\frac{p}{q} > 1$).

Položme $y_k = x_k + \frac{r|z_k|}{2\|z\|_p} \cdot \text{sgn } x_k$. Potom $|y_k - x_k| = \frac{r|z_k|}{2\|z\|_p}$ a $\|y - x\|_p = \frac{r}{2\|z\|_p} (\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \frac{r}{2}$. Teda $y \in B(x, r)$.

Súčasne $\sum |y_k|^q \geq \left(\frac{r}{2\|z\|_p}\right)^q \sum |z_k|^q = +\infty$, teda $y \notin \ell^q$.

Ukázali sme, že každá z množín ℓ_m^q je konvexná a riedka. Z Olevského lemy (Lemma 1) potom vyplýva, že ℓ_q je σ -silno pórovitá.

Literatúra

- [1] V. Olevskii: A Note on Banach-Steinhaus theorem, Real Analysis Exchange 17 (1991-92), 399–401.
- [2] T. Šalát: Remark on ℓ^p spaces, AFRNUC 36 (1980), 64–73.