1 Úvod[1]

Najprv uvedieme niektoré známe pojmy a tvrdenia z analýzy a z algebry, ktoré budeme neskôr potrebovať.

Ideál I okruhu A nazývame *prvoideál*, ak

$$\forall a,b \in A : ab \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I.$$

Ideál I okruhu A nazývame *maximálny*, ak $I \neq A$ a ak pre každý ideál J $I \subset J \subset A$ implikuje $J = I$ alebo $J = A$.

Ideál I komutatívneho okruhu A s 1 je maximálny $\Leftrightarrow$ A/I je pole.
Ideál I komutatívneho okruhu A s 1 je prvoideál $\Leftrightarrow$ A/I je obor integrity.

Propozícia 1.1. *Nech $(C,+,\cdot)$ je okruh s jednotkou a nech A je maximálny ideál v C. Potom A je prvoideál.*[2]

Propozícia 1.2 (AC). *Každý vlastný ideál okruhu je obsiahnutý v nejakom maximálnom ideále.*

Pripomeňme ešte niektoré známe fakty o kompaktnosti.

Hovoríme, že systém množín je centrovaný, ak každý konečný podsystém má neprázdny prienik. Topologický priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín v X má neprázdny prienik.

Metrický priestor (X,d) je kompaktný $\Leftrightarrow$ (X,d) je úplný a totálne ohraničený (totálne ohraničený znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-sieť).

Je známym dôsledkom axiómy výberu, že každý centrovaný systém je obsiahnutý v nejakom ultrafiltre. Z toho môžeme získať duálne tvrdenie pre ideály:

Propozícia 1.3 (AC). *Nech $\{U_i; i \in I\}$ je systém podmnožín množiny X, z ktorého sa nedá vybrať konečné pokrytie X. Potom tento systém možno doplniť na maximálny ideál na množine X.*

2 Maximálne ideály v $C(0,1)$

Všetky spojité funkcie z uzavretého intervalu $\langle 0,1\rangle$ spolu s obvyklým sčitovaním a násobením funkcií tvoria okruh s jednotkou, budeme ho označovať C. Maximálne ideály tohto okruhu sú práve ideály tvaru

$$A_p = \{f \in C; f(p) = 0\},$$

kde $p \in \langle 0,1\rangle$.

Tento výsledok dokážeme dvoma spôsobmi, postup z článku [1] sa opiera o kompaktnosť priestoru $\langle 0,1\rangle$, zatiaľčo v dôkaze z [4] sa využíva úplnosť a totálna ohraničenosť. Najprv uvedieme dôkaz z [4], dôkaz podobný ako v [1] urobíme všeobecnejšie - pre ľubovoľný kompaktný hausdorffovský topologický priestor.

Veta 2.1. *Ideál $A \subseteq C$ je maximálny práve vtedy, keď $A = A_p$ pre nejaké $p \in \langle 0,1\rangle$.*

Dôkaz. Ak A je vlastný ideál, tak každý prvok $f \in A$ sa musí v nejakom bode vynulovať. (Inak by $f.\frac{1}{f} = 1 \in A$.) Tiež si všimnime, že ak súčet dvoch nezáporných funkcií sa nuluje v nejakom bode p, tak každá z týchto dvoch funkcií nadobúda v bode p hodnotu 0.

Je zrejmé, že A_p je ideál v C. Ukážeme, že tento ideál je maximálny. Postupujme nepriamo, nech by existoval vlastný ideál B tak, že $A_p \subsetneq B \subsetneq C$. Potom existuje $f \in B \backslash A_p$, t.j. $f(p) \neq 0$. Potom $f^2 \in B$ a $f^2(p) > 0$.

[1] `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/trf.html`

[2] V okruhu bez 1 to nemusí platiť, napríklad (4) v $2\mathbb{Z}$.

Funkcia $g\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x-p|$ $(x \in \langle 0,1\rangle)$ patrí do A_p, teda aj do B. Položme $h(x) = f^2(x) + g(x)$. Funkcia h patrí do B a $h > 0$. Potom aj $h.\frac{1}{h} = 1 \in B$, a teda $B = C$, čiže B nie je vlastný ideál.

Nech A je maximálny ideál v $C(0,1)$. Ukážeme, že existuje p, také, že $A = A_p$. Nech $n \in \mathbb{N}$ a pre $1 \leq i \leq n$ nech h_i je nezáporná funkcia z C taká, že

$$h_i(x) = 0 \text{ práve vtedy, keď } \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}.$$

Zrejme platí

$$h_1(x) \dots h_n(x) = 0,$$

čiže $h_1 \dots h_n \in A$, preto niektorá z funkcií $h_1, \dots, h_n$ patrí do A. (A je prvoideál.) Tú funkciu h_i, pre ktorú $h_i \in A$, označíme ako f_n.

Máme pre každé $n \in \mathbb{N}$ nezápornú funkciu $f_n \in A$ takú, že $f_n^{-1}(0) = \langle a_n, b_n\rangle$ a $b_n = a_n + \frac{1}{n}$. Ak $m < n$, $f_m, f_n \in A$, tak $f_m + f_n \in A$. Preto existuje $x_{m,n}$ tak, že $f_m + f_n(x_{m,n}) = 0$. Z toho vyplýva, že $f_m(x_{m,n}) = 0$, $f_n(x_{m,n}) = 0$. Potom $x_{m,n} \in \langle a_n, b_n\rangle \cap \langle a_m, b_m\rangle$ a $\langle a_n, b_n\rangle \cap \langle a_m, b_m\rangle \neq \emptyset$, na základe čoho platí

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{m}, |b_n - b_m| \leq \frac{1}{m}.$$

Postupnosti (a_n), (b_n) sú cauchyovské, preto (vďaka úplnosti $\langle 0,1\rangle$) majú limitu. Keďže, dĺžka intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ je $\frac{1}{n}$, majú obe postupnosti spoločnú limitu, označme ju p.

Nech teraz $f \in A$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^2 + f_n \in A$. Teda existuje bod x_n taký, že $f^2(x_n) + f(x_n) = 0$. Potom $x_n \in \langle a_n, b_n\rangle$ a $f_n(x_n) = 0$. Pretože $x_n \to p$, zo spojitosti f dostaneme $f(p) = 0$. □

Postup z predchádzajúceho dôkazu môžeme použiť pre ľubovoľný metrický priestor.

Veta 2.2. *Nech X je úplný a totálne ohraničený metrický priestor a nech $C(X)$ je okruh spojitých reálnych funkcií na X. A je maximálny ideál v $C(X)$, tak práve vtedy, keď $A = A_p$ pre nejaké $p \in X$.*

Dôkaz. To, že A_p je maximálny ideál, sa dá ukázať rovnako ako v predchádzajúcom dôkaze, iba namiesto funkcie $|x-p|$ použijeme funkciu $d(x,p)$.

Vďaka totálnej ohraničenosti pre každé $n \in \mathbb{N}$, existuje konečná $\frac{1}{n}$-sieť, čiže pokrytie $B_{x_1,\frac{1}{n}}, \dots, B_{x_k,\frac{1}{n}}$ priestoru X. Zvolíme $h_i(x) = max\{0, d(x_i,x) - \frac{1}{n}\}$ a podobne ako v predchádzajúcom dôkaze zostrojíme postupnosť f_n. Nulová množina f_n bude nejaká uzavretá guľa v X, pričom polomery týchto gúľ konvergujú k 0 a ich stredy tvoria cauchyovskú postupnosť. Zvyšok dôkazu prebieha rovnako ako v predchádzajúcom prípade. □

3 Maximálne ideály v okruhoch spojitých funkcií

Pre ľubovoľný topologický priestor X budeme označovať ako $C(X,R)$ okruh všetkých spojitých funkcií z X do R a $C^*(X,R)$ okruh všetkých ohraničených spojitých funkcií do R. (Pre kompaktné priestory tieto okruhy splývajú.)

Vety hovoriace o maximálnych ideáloch v $C(X,R)$ a $C^*(X,R)$ možno nájsť v článkoch [6], [8], tiež v knihe [7].

Opäť platí, že ak $f \in A$, kde A je vlastný ideál v niektorom z týchto okruhov, tak f sa musí v nejakom bode vynulovať. Inak by sme totiž dostali $g = f^2 \in A$ a $1 = g.\frac{1}{g} \in A$, čiže ideál A nie je vlastný.

Veta 3.1. *Nech X je kompaktný T_2-priestor. Potom A je maximálny ideál v okruhu $C(X,R)$ ($C^*(X,R)$) práve vtedy, keď existuje $p \in X$ také, že*

$$A = A_p = \{f \in C(X,R); f(p) = 0\}.$$

Dôkaz. Je zrejmé, že A_p je ideál. Najprv ukážeme, že je to maximálny ideál.

Definujme $\Phi_p\colon C(X,R) \to R$ predpisom $\Phi_p(f) = f(p)$. Ľahko sa overí, že Φ_p je okruhový homomorfizmus. Keďže $C(X,R)$ obsahuje všetky konštantné funkcie, Φ_p je surjektívny. Pritom platí $\mathrm{Ker}\Phi_p = A_p$. Podľa vety o faktorovom izomorfizme potom $C(X,R)/A_p \cong R$, teda A_p je maximálny ideál.

Ešte treba ukázať, že každý maximálny ideál v $C(X,R)$ má takýto tvar. Nech by A bol taký ideál v $C(X,R)$, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnom A_p.

To znamená, že pre každé $p \in X$ existuje $f_p \in A$ tak, že $f_p(p) \neq 0$. Potom

$$f_p^2(p) > 0 \text{ a } f_p \in A.$$

Zo spojitosti f_p vyplýva, že $f_p > 0$ aj na nejakom okolí U_p bodu p. Z kompaktnosti priestoru X vyplýva, že existuje konečné podpokrytie $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_n}\}$ pokrytia $\{U_p, p \in X\}$. Definujme

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{p_j}^2(x).$$

Zrejme $g \in A$ a súčasne $g > 0$ na celom priestore X, lebo $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_n}\}$ je pokrytie. Potom $g.\frac{1}{g} = 1 \in A$ a $A = C$, čiže A nie je vlastný ideál, čo je spor. $\square$

Podmienku o kompaktnosti nemôžeme vo všeobecnosti vynechať. Nech X je nekompaktný Tichonovovský (=T_2 a úplne regulárny) priestor. Potom existuje centrovaný systém F_i, $i \in I$, uzavretých množín taký, že $\bigcap F_i = \emptyset$. Potom $\{f\colon X \to R : (\exists i \in I); f[F_i] = 0\}$ je vlastný ideál a nie je obsiahnutý v A_p. (Vďaka úplnej regulárnosti dostaneme existenciu funkcie f takej, že $f(p) = 1$, $f[F_i] = 0$.) Pre Tichonovovské priestory je teda kompaktnosť ekvivalentná s podmienkou z vety 3.1.

Pre každý Tichonovovský priestor existuje Stone-Čechova kompaktifikácia βX priestoru X. βX je kompaktný hausdorffovský priestor, ktorý má tú vlastnosť, že každú spojitú funkciu $f\colon X \to Z$, Z je kompaktný, možno jednoznačne spojito rozšíriť na $\overline{f}\colon \beta X \to Z$. Teda aj pre každú ohraničenú funkciu $f\colon X \to R$ má jediné spojité rozšírenie $\overline{f}$. Priradenie $f \mapsto \overline{f}$ je bijekcia medzi $C^*(X,R)$ a $C^*(\beta X,R)$. Súčasne zachováva operácie, je to teda izomorfizmus. Samozrejme izomorfizmus zachováva aj maximálne ideály, t.j. maximálne ideály v $C^*(X,R)$ budú práve ideály tvaru $A_p = \{f : \overline{f}(p) = 0\}$ pre $p \in \beta X$.

Podobná charakterizácia platí aj v $C(X,R)$:

Veta 3.2 (Geľfand-Kolmogorov). *Nech X je Tichonovovský priestor. Potom $A \subset C(X,R)$ je maximálny ideál práve vtedy, keď existuje jediný bod $p \in \beta X$ taký, že*

$$A = A_p = \{f \in C(X,R); p \in \overline{f^{-1}(0)}\}.$$

Označme ako $I(X)$ množinu všetkých maximálnych ideálov $C(X)$ pre kompaktný priestor X a definujme uzáver $\overline{B}$ podmnožiny $B \subset I(X)$ tak, že

$$J \in \overline{B} \;\Leftrightarrow\; \bigcap\{J' | J' \in B\} \subseteq J.$$

Zobrazenie $p \mapsto A_p$ je bijekcia medzi X a $I(X)$. Môžeme overiť, že pre $p \in X$ a $A \subseteq X$ platí

$$p \in \overline{A} \text{ v } X \;\Leftrightarrow\; A_p \in \overline{\{A_q; q \in A\}} \text{ v } I(X).$$

Teda $I(X)$ je priestor homeomorfný s X.

Z uvedeného vyplýva, že dva kompaktné hausdorffovské topologické priestory sú homeomorfné práve vtedy, keď okruhy $C(X)$ a $C(Y)$ sú izomorfné.

Ak X je ľubovoľný Tichonovovský priestor, môžeme zaviesť na $I(X)$ topológiu tým istým spôsobom. Možno ukázať, že $I(X)$ je kompaktný a je homeomorfný s βX. (Ukázali sme už, že $C(X) \cong C(\beta X)$, preto aj $I(X) \cong I(\beta X) \cong \beta X$.) Získali sme teda iný popis Stone-Čechovej kompaktifikácie βX.

4 Maximálne ideály v priestoroch (okruhoch) postupností

Ak $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ sú postupnosti reálnych čísel, potom definujeme $x + y = (x_n + y_n)$, $xy = (x_n y_n)$. Pri takto definovaných operáciách je množina s všetkých reálnych postupností okruh s jednotkou $\overline{1} = 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ a množina $l = l^{(1)}$ všetkých $x = (x_n)$ pre ktoré $\sum |x_n| < +\infty$ je okruh bez jednotky. Množina všetkých ohraničených postupností l_∞ je okruh s jednotkou.

Najprv ukážeme ako vyzerajú maximálne ideály v okruhoch s a l_∞.

Postupnosti sú spojité funkcie z $\mathbb{N}$ s diskrétnou topológiou do priestoru R. Teda $s = C(\mathbb{N}, R)$ a $l_\infty = C^*(\mathbb{N}, R)$. Teda veta 3.1 a 3.2 nám poskytujú popis maximálnych ideálov v týchto priestoroch. Je známy popis priestoru $\beta\mathbb{N}$ pomocou ultrafiltrov. Z neho možno získať charakterizáciu maximálnych ideálov v s a l_∞. My dokážeme o niečo všeobecnejšie tvrdenia iným spôsobom bez použitia $\beta\mathbb{N}$.

Pripomeňme najprv pojem $\mathcal{I}$-konvergencie. Nech $\mathcal{I}$ je ideál na $\mathbb{N}$. Postupnosť x_n $\mathcal{I}$-konverguje k L, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| > \varepsilon\} \in \mathcal{I}$. Označenie: $\mathcal{I}\text{-}lim x_n = L$.

Ak $\mathcal{I}$ je ideál, tak k nemu duálny filter budeme označovať $\mathcal{F}(\mathcal{I})$. Podmienka $\mathcal{I}\text{-}lim x_n = L$ je ekvivalentná s tým, že $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ pre každé ε.

Propozícia 4.1. *Ak $\mathcal{I}$ je maximálny ideál, tak pre každú ohraničenú postupnosť existuje práve jedna $\mathcal{I}$-limita.*

Dôkaz pozri v [9].

Propozícia 4.2. *Ideál A v l_∞ je maximálny práve vtedy, keď existuje maximálny ideál $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ tak, že*

$$A = A_\mathcal{I} = \{x \in l_\infty; \mathcal{I}\text{-}\lim x_n = 0\}.$$

Dôkaz. $A_\mathcal{I}$ je ideál. Najprv ukážeme, že je maximálny. Podľa propozície 4.1 existuje $\mathcal{I}\text{-}lim x_n$ pre každú postupnosť $(x_n) \in l_\infty$. Čiže môžeme definovať zobrazenie $\Phi_\mathcal{I} \colon l_\infty \to \mathbb{R}$ tak, že $\Phi_\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}\text{-}lim x_n$. Zrejme $A_\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\Phi_\mathcal{I}$ a $l_\infty / A_\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Pretože l_∞ obsahuje všetky konštantné postupnosti, $\Phi_\mathcal{I}$ je surjektívne. Teda $A_\mathcal{I}$ je maximálny ideál.

Ešte treba ukázať, že každý maximálny ideál má takýto tvar. Nech by A bol ideál, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnom $A_\mathcal{I}$. Nech $M(\mathbb{N})$ je množina všetkých maximálnych ideálov na $\mathbb{N}$. Potom pre každý maximálny ideál $\mathcal{I} \in M(\mathbb{N})$ existuje taká postupnosť $(x_n) \in A$, že $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = L > 0$. Teda existuje $V_\mathcal{I} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ tak, že $x_n > \frac{L}{2}$ pre každé $n \in V_\mathcal{I}$.

Stačí ukázať, že existuje konečný počet maximálnych ideálov $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ tak, že množiny $V_{\mathcal{I}_1}, \ldots, V_{\mathcal{I}_k}$ pokryjú celé $\mathbb{N}$. Ak totiž označíme x^i tú postupnosť, pre ktorú $x_n^i > \frac{L_i}{2}$ na $V_{\mathcal{I}_i}$, tak postupnosť $(z_n) = (x_n^1 + \ldots + x_n^k)$ spĺňa $z_n > L = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{2} > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Potom $\frac{1}{z_n} < \frac{1}{L}$, čiže aj $(\frac{1}{z_n}) \in l_\infty$. Z toho dostávame, že $z_n \cdot \frac{1}{z_n} = \overline{1} \in A$ a ideál A nie je maximálny.

Predpokladajme, že neexistuje taká konečná množina maximálnych ideálov $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$, že množiny $V_{\mathcal{I}_1}, \ldots, V_{\mathcal{I}_k}$ pokryjú celé $\mathbb{N}$. Potom systém $\{V_\mathcal{I}; \mathcal{I} \in M(\mathbb{N})\}$ možno doplniť na maximálny ideál $\mathcal{I}_0$ (propozícia 1.3). Lenže potom $V_{\mathcal{I}_0} \in \mathcal{I}_0$ a súčasne $V_{\mathcal{I}_0} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_0)$, čo je spor. $\square$

Predchádzajúcu propozíciu by sme mohli zovšeobecniť na ľubovoľný podokruh l_∞, ktorý obsahuje jednotku a s každou invertovateľnou postupnosťou (x_n) (t.j. odrazenou od 0) obsahuje aj postupnosť $\left(\frac{1}{x_n}\right)$, pretože nič iné sme v dôkaze nepoužili.

Všimnime si, že ideály $A_\mathcal{I}$ zahŕňajú aj ideály tvary $\mathcal{I}_m = \{(x_n) \in R; x_m = 0\}$. Stačí za $\mathcal{I}$ zobrať maximálny ideál všetkých množín, ktoré neobsahujú m.

Pre ľubovoľnú postupnosť $x = (x_n)$ označme $Z_x = \{n \in \mathbb{N}; x_n = 0\}$ množinu všetkých tých indexov, na ktorých má táto postupnosť nulovú hodnotu.

Propozícia 4.3. *Nech R je podokruh okruhu s, ktorý obsahuje $\overline{1}$ a* *(i) ak $(x_n) \in R$ je postupnosť taká, že $x_n > 0$ pre všetky n, tak aj postupnosť $\left(\frac{1}{x_n}\right) \in R$,*

(ii) pre každú podmnožinu $M \subseteq \mathbb{N}$ existuje v R postupnosť $y = (y_n)$ tak, že $Z_y = M$.

Potom ideál A v R je maximálny práve vtedy, keď existuje ultrafilter $\mathcal{F}$ na $\mathbb{N}$ tak, že

$$A = \widetilde{A}_{\mathcal{F}} = \{x \in s; Z_x \in \mathcal{F}\}.$$

Dôkaz. Najprv overme, že A je ideál. Nech $x, y \in A$, $z \in s$. Potom $Z_x = Z_{-x} \in \mathcal{F}$, $Z_x \cap Z_y \subset Z_{x+y} \in \mathcal{F}$, $Z_x \subset Z_{x.z} \in \mathcal{F}$, čiže aj $-x, x+y, x.z \in A$.
$\overline{1} \notin A$, čiže A je vlastný ideál.
Teraz ukážeme, že A je maximálny ideál. Nech by $A \subsetneq B \subsetneq s$, B je ideál. Potom existuje $x \in B \setminus A$, t.j. $Z_x \notin \mathcal{F}$. Pretože $\mathcal{F}$ je ultrafilter, $\mathbb{N} \setminus Z_x \in \mathcal{F}$. Postupnosť y taká, že $Z_y = \mathbb{N} \setminus Z_x$ patrí do A. Potom $(z_n) = (y_n^2 + x_n^2)$ má všetky členy kladné a $\overline{1} = (z_n \cdot \frac{1}{z_n}) \in B$, čo je spor s predpokladom, že B je vlastný ideál.
Ešte treba ukázať, že každý ideál je obsiahnutý v ideále tvaru $\widetilde{A}_{\mathcal{F}}$. Ak B je ľubovoľný ideál v R, tak $\{Z_x; x \in B\}$ je zrejme centrovaný systém. (Ak by $Z_x \cap Z_y = \emptyset$, tak $x_n^2 + y_n^2 > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a opäť dostaneme jednotkovú postupnosť.) Tento centrovaný systém možno doplniť na ultrafilter $\mathcal{F}$ a platí $B \subseteq \widetilde{A}_{\mathcal{F}}$. □

Poznamenajme, že pre ultrafilter $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N}; m \in A\}$ dostaneme maximálny ideál $\mathcal{I}_m = \{(x_n) \in R; x_m = 0\}$.

Dôsledok 4.4. *Ideál A v s je maximálny práve vtedy, keď existuje ultrafilter $\mathcal{F}$ na $\mathbb{N}$ tak, že*

$$A = \widetilde{A}_{\mathcal{F}} = \{x \in s; Z_x \in \mathcal{F}\}$$

Nech $\mathcal{I}$ je prípustný ideál na množine $\mathbb{N}$. Ako obvykle $F(\mathcal{I})$, $F(\mathcal{I}^*)$ budeme označovať konvergenčné polia $\mathcal{I}$-konvergencie a $\mathcal{I}^*$-konvergencie. Je zrejmé, že obe tieto konvergenčné polia sú uzavreté vzhľadom na násobenie a rozdiel, sú to teda podokruhy okruhu s. Takisto sa ľahko overí, že $\mathcal{I}\text{-}lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\mathcal{I}\text{-}lim x_n}$, $\mathcal{I}^*\text{-}lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\mathcal{I}^*\text{-}lim x_n}$. Ak $M \subseteq \mathbb{N}$ a definujeme postupnosť (y_n) tak, že $y_n = 0$ pre $n \in M$ a $y_n = \frac{1}{n}$, tak táto postupnosť patrí do R. (Obvyklá konvergencia implikuje $\mathcal{I}$ aj $\mathcal{I}^*$-konvergenciu.) To znamená, že $F(\mathcal{I})$ a $F(\mathcal{I}^*)$ vyhovujú predpokladom predchádzajúcej propozície.

Dôsledok 4.5. *Ideál A v $F(\mathcal{I})$ $(F(\mathcal{I}^*))$ je maximálny práve vtedy, keď existuje ultrafilter $\mathcal{F}$ na $\mathbb{N}$ tak, že*

$$A = \widetilde{A}_{\mathcal{F}} = \{x \in s; Z_x \in \mathcal{F}\}.$$

Poznámka 4.6. Ideály v $F(\mathcal{I})$ by sme mohli vyšetrovať pomocou vety 3.2 zavedením vhodnej topológie na množine $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Definujme na tejto množine topologický priestor $A(\mathcal{I})$ tak, že všetky prvky $\mathbb{N}$ sú izolované a okolia ∞ sú práve množiny $\{\infty\} \cup F$, kde $F \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$. Funkcia $f\colon A(\mathcal{I}) \to \mathbb{R}$ je spojitá práve vtedy, keď postupnosť $f(n)$ $\mathcal{I}$-konverguje k $f(\infty)$. Okruh $F(\mathcal{I})$ je teda izomorfný s okruhom $C(A(\mathcal{I}), R)$. Priestory $A(\mathcal{I})$ však nie sú kompaktné, teda by sme museli skúmať ich Stone-Čechove kompaktifikácie.

Pre okruh l položme

$$\mathcal{J}_m = \{x = (x_n) \in l : x_m = 0\}.$$

Propozícia 4.7. *$\mathcal{J}_m$ je maximálny ideál v l.*

Dôkaz. Nech $y \in A \setminus \mathcal{J}_m$, $\mathcal{J}_m \subsetneq A \subseteq l$, A je ideál. Ukážeme, že potom každé $z = (z_n) \in l$ patrí do A (a tak $A = l$.)
Nech $z = (z_n) \in l$. Keďže $y \notin \mathcal{J}_m$, máme $y_m \neq 0$. Do $\mathcal{J}_m$ (a teda aj do A) patrí

$$-y_1, -y_2, \ldots, -y_{m-1}, 0, -y_{m+1}, \ldots$$

no potom aj ich súčet

$$0, 0, \dots, 0, y_m, 0, 0, \dots$$

patrí do A. Potom do A bude patriť aj súčin tejto postupnosti s postupnosťou

$$0, 0, \dots, 0, \frac{z_m}{y_m}, 0, 0, \dots$$

Teda

$$0, 0, \dots, 0, z_m, 0, 0, \dots \in A,$$

súčasne

$$z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, 0, z_{m+1}, z_{m+2}, \dots \in A.$$

Sčítaním dostaneme $z = (z_n) \in A$. Teda $A = l$. □

Príklad 4.8. Nech $A = \{(x_n) \in l : x_n \neq 0$ len pre konečný počet $n\}$. Zrejme A je ideál v l a A nie je podmnožina žiadneho z ideálov $\mathcal{I}_m$. Teda aj v l existujú ideály rôzne od $\mathcal{I}_m$.

Ďalším takým ideálom by mohol byť ideál $\widetilde{A}_{\mathcal{F}}$.

Poznámka 4.9. Každý z ideálov $A_{\mathcal{I}}$, $\widetilde{A}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{J}_m$ je evidentne prvoideál. Pre $A_{\mathcal{F}}$ je to triviálne a vyplýva z Propozície 1.1, pre $\mathcal{J}_m$ sa to ľahko overí.

Označme c množinu všetkých konvergentných postupností. Položme

$$\mathcal{I}_m = \{(x_n) \in c; x_m = 0\}.$$

Propozícia 4.10. *Ideály v c sú práve ideály tvaru $\mathcal{I}_m$ a ideál*

$$A = \{(x_n); \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Dôkaz. Na množine $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ zaveďme topológiu tak, že všetky prvky $\mathbb{N}$ sú izolované body a okolia bodu ∞ sú práve doplnky konečných množín. (Je to vlastne jednobodová kompaktifikácia diskrétneho priestoru na množine $\mathbb{N}$.) Konvergentné postupnosti sú v jednojednoznačnej korešpondencii so spojitými funkciami z tohto priestoru do $\mathbb{R}$. (Hodnota funkcie v bode ∞ je rovná limite postupnosti.) Navyše je tento priestor kompaktný a z vety 3.1 dostaneme uvedený výsledok. □

5 Ďalšie problémy

(I) Možno výsledok článku rozšíriť na okruhy $M(X)$ reálnych ohraničených funkcií na priestore X?

(II) Všetky $\mathcal{I}$-konvergentné postupnosti v l_∞ tvoria okruh (podokruh okruhu reálnych ohraničených postupností). Čo všetko možno povedať a dokázať o ideáloch v $F(\mathcal{I})$ (=množina všetkých $\mathcal{I}$-konvergentných postupností)?

(III) Skúmať ďalšie ideály v l_∞:

$$V_0 = \{x = (x_n) \in l_\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$
$$\overline{V_0} = \{x = (x_n) \in l_\infty : \operatorname*{limstat}_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

Skúmať vlastnosti faktorových okruhov l_∞ podľa V_0, $\overline{V_0}$. Vyšetriť topologickú polohu V_0 vo $\overline{V_0}$. Ľahko sa ukáže, že V_0, $\overline{V_0}$ sú uzavreté podpriestory Banachovho priestoru l_∞ so suprémovou normou. (Treba ukázať, že ak $\operatorname{limstat} x_n^{(i)} = L$ a $(x^{(i)}) \rightrightarrows (x_n)$, tak $\operatorname{limstat} x_n = 0$.)

(I) Ohraničené funkcie na množine X sú vlastne spojité ohraničené funkcie z topologického priestoru X_d na množine X s diskrétnou topológiou. Teda maximálne ideály sú $A = \widetilde{A}_p$ (z vety 3.2) pre $p \in \beta X_d$.

V [3] sú charakterizované maximálne ideály okruhu všetkých funkcií $Fun(F, X)$ (X - ľubovoľná množina, F - pole) ako $\{f : X \to Y; f^{-1}(0) \in \mathcal{F}\}$, kde $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X.

Literatúra

[1] K.Bachratá: *The Maximal Ideals of* $C(0, 1)$, Zborník VŠDS v Žiline, 1992.

[2] B.Balcar, P.Štěpánek: *Teorie množin,* , Academia, Praha, 1986.

[3] A.D.Bell: *Modern algebra.* (`www.uwm.edu/~adbell`)

[4] S.Carlson: *Cauchy sequences and function rings.* American Mathematic Monthly 88 (1981), 700-701.

[5] R.Engelking: *General Topology,* PWN, Warsaw, 1977.

[6] I.M.Geľfand, A.N.Kolmogorov: *On rings of continuous functions on topological spaces.* C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 22 (1939), 11-15.

[7] L.Gillman, M.Jerison: *Rings of continuous functions.*

[8] L.Gillman, M.Henriksen, M.Jerison: *On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff.* Proceedings of the AMS, Vol. 5, No. 3, (Jun., 1954), 447–455.

[9] P.Kostyrko, M.Máčaj, T.Šalát: *Statistical convergence and* $\mathcal{I}$*-convergence*

[10] J.Nagata: *Modern General Topology,* North-Holland, Amsterdam, 1968.

[11] W.Burgess: *Rings of continuous functions.* (Lecture notes, `www.mathstat.uottawa.ca/profs/Burgess/`)