

Ak $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je zobrazenie také, že $\sum g(n) = +\infty$, tak $\mathcal{I}_g = \{A \subset \mathbb{N} : \sum_{a \in A} g(n) < +\infty\}$ sa nazýva Ulamov ideál.

Problém 1. Platí nasledujúce zovšeobecnenie Olivierovej vety: Ak $\sum a_n^{g(n)} < +\infty$ a $\sum a_n < \infty$, tak $\mathcal{I}_g$ -lim $na_n = 0$?

Veta 1 (Olivier). Ak $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ a $\sum a_n < +\infty$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Funkcia $g(n) = 1$ spĺňa predpoklad $\sum g(n) = +\infty$. Budeme sa snažiť ukázať, že pre túto funkciu neplatí uvedené zovšeobecnenie Olivierovej vety.

Platí $\mathcal{I}_g = \mathcal{I}_f$, pretože $\sum_{n \in A} g(n) < +\infty$ práve vtedy, keď A je konečná množina. $\mathcal{I}_g$ -konvergencia je teda obyčajná konvergencia.

Chceme nájsť postupnosť (a_n) tak, aby $\sum a_n < +\infty$ (potom aj $\sum a_n^{g(n)} = \sum a_n < +\infty$) a súčasne $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$.¹ Podľa Olivierovej vety takáto postupnosť nemôže byť monotónna.

Definujme postupnosť (a_n) takto:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{ak } n \text{ nie je druhá mocnina prirodzeného čísla,} \\ \frac{1}{n} & \text{ak } n = k^2 \text{ pre nejaké prirodzené číslo } k. \end{cases}$$

$$\sum a_n = \sum_{n \neq k^2} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=k^2} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$ lebo pre $n = k^2$ máme $na_n = 1$ a čísla takéhoto tvaru tvoria neohraničenú podpostupnosť v $\mathbb{N}$.

¹Zrejme príklad nejakej takejto postupnosti by mohol byť aj v článku kde je dokázaná Olivierova veta, alebo v nejakom súvisiacom článku.