

1 Topológia

Ak E je súvislá podmnožina metrického priestoru, $t, u \in E$, tak existuje konečná postupnosť bodov $t_0, \dots, t_k \in E$, $t_0 = t$, $t_k = u$, $d(t_i, t_{i+1}) < \varepsilon$.

1.1 Bairove kategórie

Podmnožina A topologického priestoru X sa nazýva *množina prvej Bairovej kategórie* (v X), ak existujú také podmnožiny $A_n \subset X$ ($n = 1, 2, \dots$) riedke v X , že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ak množina $A \subset X$ nie je prvej Bairovej kategórie v X , tak sa nazýva *množinou druhej Bairovej kategórie*.

Množina $A \subset X$ je *reziduálna* v topologickom priestore X , ak A je druhej Bairovej kategórie v X a $X \setminus A$ je množina prvej Bairovej kategórie v X .

Veta 1 (Bairova veta). *Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $X \neq \emptyset$. Potom X je množina druhej Bairovej kategórie v X .*

Veta 2 (Bairova veta o hustote). *Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $X \neq \emptyset$. Nech $X_k \subset X$ ($k = 1, 2, \dots$) sú riedke množiny. Potom množina $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ je hustá v X .*

A má *Bairovu vlastnosť*, ak existuje otvorená množina G tak, že $A \setminus G$ aj $G \setminus A$ sú prvej kategórie, t.j. $A = (G \setminus B) \cup C$, kde B a C sú prvej kategórie.

Spočítateľné zjednotenie množina, ktoré majú Bairovu vlastnosť má Bairovu vlastnosť. Ak A má Bairovu vlastnosť, tak aj komplement $X \setminus A$ má Bairovu vlastnosť. Všetky Borelovské množiny majú Bairovu vlastnosť.

Veta 3 (Banach Subgroup Theorem). *Ak G je vlastná podgrupa lineárneho topologického priestoru E , potom buď G je prvej kategórie alebo G nespĺňa Bairovu podmienku.*

1.2 Metrické priestory

Podmnožina M metrického priestoru (X, ρ) je *pórovitá* v $x \in X$, ak existuje $\alpha > 0$ tak, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje bod y v $B(x, \varepsilon)$ tak, že $B(y, \alpha\rho(x, y)) \cap M = \emptyset$. Ak α možno zvoliť ľubovoľne blízko k 1, tak M je *silno pórovitá* v x .

Množina M je (silno) pórovitá, ak je (silno) pórovitá v každom bode $x \in M$.

σ -pórovitá množina = zjednotenie spočítateľného systému pórovitých množín.

Lema 1 (Olevskii). *Nech M je konvexná riedka množina v Banachovom priestore X . Potom M je silne pórovitá.*

2 Hausdorffova miera

Uvedieme definíciu z [ŠŠN].

(X, d) bude stále predstavovať separabilný metrický priestor. Znakom $\mathcal{S}_n$ budeme označovať systém všetkých gúľ s priemerom nepresahujúcim $\frac{1}{n}$ a $\emptyset$. Nech $p \geq 0$. Definujme na $\mathcal{S}_n$ funkciu $\tau_n^{(p)}$ takto:

$$\tau_n^{(p)} = \begin{cases} 0, & \text{ak } E = \emptyset \\ (d(E))^p, & \text{ak } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Veta 4. *Nech pre $n = 1, 2, \dots$ sú $\mu_n^{*(p)}$ vonkajšie miery na systéme všetkých podmnožín množiny X indukované pomocou funkcií $\tau_n^{(p)}$ a systémov $\mathcal{S}_n$. Potom funkcia $\mu^{*(p)}$ definovaná tak, že pre $E \subset X$ platí $\mu^{*(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{*(p)}(E)$, je metrickou vonkajšou mierou. Nazývame ju Hausdorffova p -rozmerná vonkajšia miera.*

Mieru $\mu^{(p)}$ definovanú na systém $\mathcal{S}_{\mu^{(p)}}$ všetkých $\mu^{(p)}$ -merateľných množín nazývame *Hausdorffova p -rozmerná miera*.

Veta 5. Ak pre nejakú množinu $E \subset X$ je $\mu^{(p)}(E) < +\infty$, tak pre $p' > p$ platí $\mu^{(p')}(E) = 0$.

Definícia 1. Nech $E \subset X$, Hausdorffovou dimeziou množiny $E \subset X$ nazývame číslo

$$\dim E = \sup\{p : \mu^{(p)}(E) = +\infty\}.$$

Ak X je separabilný priestor, tak dimenzia každej spočítateľnej množiny je 0.

Veta 6. Nech $A \subset X$ je ľubovoľná množina. Potom existuje množina E typu G_δ tak, že $E \supset A$ a $\mu^{(p)}(E) = \mu^{*(p)}(A)$.

Veta 7. 1-dimenzionálna vonkajšia Hausdorffova miera pre metrický priestor $(-\infty, \infty)$ sa zhoduje s vonkajšou Lebesguovou mierou.

TODO? Je podmnožina množiny s Hausdorffovou dimeziou 0 tiež dimenzie 0?

3 Hustoty

3.1 Asymptotická hustota

Nech $A \subset \mathbb{N}$, označme $d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k)$, $\underline{d}(A) = \liminf d_n(A)$, $\overline{d}(A) = \limsup d_n(A)$. Ak $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, tak ich spoločnú hodnotu označujeme $d(A)$ a nazývame *asymptotická hustota* množiny A . (Teda $d(A) = \lim d_n(A)$, ak táto limita existuje.)

$$\overline{d}(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \underline{d}(A)$$

Ak existuje $d(A)$, tak existuje aj $d(\mathbb{N} \setminus A)$ a $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - d(A)$.

$$M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \Rightarrow \underline{d}(M) = \liminf \frac{k}{m_k},$$

$$\overline{d}(M) = \limsup \frac{k}{m_k}, d(M) = \lim \frac{k}{m_k}$$

Ak $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$ a $\sum a_k^{-1} < +\infty$, tak $d(A) = 0$.

Ak $\overline{d}(A) > 0$, tak množina A obsahuje ľubovoľne dlhú konečnú aritmetickú postupnosť. (Szemerédi) Problém, či množina P všetkých prvočísel obsahuje ľubovoľne dlhú aritmetickú postupnosť, je otvorený problém, ktorý je považovaný za veľmi obtiažny až beznádejný. ([BŠ])

It has been conjectured that 'positive density' could here be relaxed to 'positive logarithmic density', i.e. a sequence whose series of reciprocals, implying that the sequence of primes numbers contains arithmetic progressions of any length.

A proof of this result on primes was announced by Tao and Green in April 2004.

Veta 8 (Van der Waerden, 1927). Ak množina prirodzených čísel $A_1 \cup A_2$ obsahuje ľubovoľne dlhé aritmetické postupnosti, tak aspoň jedna z množín A_1, A_2 má tú istú vlastnosť.

Van der Waerdenov ideál = množiny, ktoré neobsahujú ľubovoľne dlhú aritmetickú postupnosť.

3.2 Logaritmicke hustota

$$\delta_n(A) = \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(k)}{k}, \text{ kde } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$\underline{\delta}(A) = \liminf \delta_n(A)$, $\bar{\delta}(A) = \limsup \delta_n(A)$, $\delta A = \lim \delta_n(A)$, ak táto limita existuje.

$$\underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(A) \leq \bar{d}(A)$$

Na základe formuly $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(\frac{1}{n})$ môžeme písať $\ln n$ namiesto S_n v definícii logaritmickej hustoty.

3.3 Rovnomerná hustota

$A(t+1, t+s) := \text{card}\{n \in A : t+1 \leq n \leq t+s\}$
 $\beta_s = \liminf A(t+1, t+s)$, $\beta^s = \limsup A(t+1, t+s)$
 $\underline{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta_s}{s}$, $\bar{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta^s}{s}$
 Ak $\underline{u}(A) = \bar{u}(A)$, tak je to rovnomerná hustota - $u(A)$.

$$\underline{u}(A) \leq \underline{d}(A) \leq \bar{d}(A) \leq \bar{u}(A)$$

Postupnosť $a_1 < a_2 < \dots$ prirodzených čísel sa nazýva *lakunárna*, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = \infty$.
 Lakunárna množina = konečná, alebo je množinou členov lakunárnej postupnosti. Ak A je lakunárna, tak $\bar{u}(A) = 0$.

Kompaktná submiera, je zobrazenie $m: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ také, že:

- (i) $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$
- (ii) $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$
- (iii) $m(\{a\}) = 0$
- (iv) Pre každé $\varepsilon > 0$ existujú množiny $A_1, \dots, A_k$ tak, že $A_1 \cup \dots \cup A_k = \mathbb{N}$ a $m(A_i) < \varepsilon$ pre $i = 1, \dots, k$

4 Konvergencia

4.1 Štatistická konvergencia

$$\text{st-lim } x_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \, d(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

$\text{st-lim } x_n = L \Leftrightarrow$ existuje konvergentná podpostupnosť y tak, že $\lim y = L$ a $d\{k \in \mathbb{N} : x_k = y_k\} = 0$ ($x_k = y_k$ pre skoro všetky k).

L_x = množina obyčajných hromadných bodov postupnosti x

Statistical limit point = existuje netenčná postupnosť konvergujúca k L .

Λ_x = statistical limit points of x

Statistical cluster point = pre každé $\varepsilon > 0$ množina $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \varepsilon\}$ nemá hustotu 0.

Γ_x = statistical cluster points

$$\Lambda_x \subset \Gamma_x \subset L_x$$

Ak x, y sú postupnosti a $x_k = y_k$ pre skoro všetky k , tak $\Lambda_x = \Lambda_y$, $\Gamma_x = \Gamma_y$.

Ak x je ľubovoľná postupnosť, tak existuje postupnosť y tak, že $L_y = \Gamma_x$ a $y_k = x_k$ pre skoro všetky k , navyše $\text{Rng}(y) \subset \text{Rng}(x)$.

Ak x je postupnosť komplexných čísel a L_x je množina hromadných bodov x , tak existuje natiahnutie w postupnosti x také, že každý hromadný bod postupnosti x je statistical limit point postupnosti w .

Veta 9. Ak (X, d) je kompaktný metrický priestor, $\xi = (x_n)$ je postupnosť taká, že $\lim d(x_n, x_{n+1}) = 0$, tak L_ξ je súvislá.

Veta 10. Ak X je metrický priestor, $\xi = (x_n)$ je postupnosť a $L_x \neq \emptyset$ je súvislá množina, tak existuje podpostupnosť $\eta = (y_n)$ tak, že $\lim d(y_n, y_{n+1}) = 0$, $L_\xi = L_\eta$.

Veta 11. Nech $x = (x_n)$ je ohraničená. Potom x štatisticky konverguje k číslu L práve vtedy, keď x je silno C -sumovateľná k L .

4.2 $\mathcal{I}$ -konvergenca

Netriviálny ideál $\mathcal{I}$ nazývame *prípustný*, (admissible) ak $\{x\} \in \mathcal{I}$ pre každé $x \in X$.

Definícia 2. Nech $\mathcal{I}$ je netriviálny ideál na $\mathbb{N}$. Postupnosť $x = (x_n)$ prvkov metrického priestoru $\mathcal{I}$ -konverguje k $L \in X$, ($L = \mathcal{I}\text{-}\lim x_n$) ak pre každé $\varepsilon > 0$ množina $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \varrho(x_n, t) \geq \varepsilon\}$ patrí do $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}_d = \{A \subset \mathbb{N}; d(A) = 0\}$ je prípustný ideál, $\mathcal{I}_d$ -konvergenca je štatistická konvergenca.

$\mathcal{I}_\delta$ - logaritmická štatistická konvergenca

$\mathcal{I}_u$ - rovnomerná štatistická konvergenca

$\mathcal{I}_c = \{A \subset \mathbb{N} : \sum_{a \in A} a^{-1} < +\infty\}$

Z $\mathcal{I}_c$ -konvergenzie vyplýva štatistická konvergenca.

Ak $\mathcal{I}$ je prípustný, tak z obvyklej konvergenzie vyplýva $\mathcal{I}$ -konvergenca.

Ak $\mathcal{I}$ je prípustný ideál, ktorý neobsahuje nekonečnú množinu, tak $\mathcal{I}$ -konvergenca koinciduje s obvyklou konverenciou.

Ak $\mathcal{I}$ je maximálny, tak každá postupnosť má limitu (konečnú alebo ∞). Špeciálne, každá ohraničená postupnosť má konečnú limitu.

4.3 $\mathcal{I}^*$ -konvergenca

Definícia 3. Postupnosť (x_n) $\mathcal{I}^*$ -konverguje ku L , ak existuje množina $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ tak, že vybraná podpostupnosť x_{m_k} konverguje ku L .

Ak $\mathcal{I}$ je prípustný ideál, tak $\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = L \Rightarrow \mathcal{I}\text{-}\lim x_n = L$.

$\mathcal{I}_d$ -konvergenca je ekvivalentná s $\mathcal{I}_d^*$ -konverenciou. $\mathcal{I}_\delta$ -konvergenca je ekvivalentná s $\mathcal{I}_\delta^*$ -konverenciou.

Definícia 4. Prípustný ideál $\mathcal{I}$ spĺňa podmienku (AP), ak pre každý spočítateľný systém $\{A_1, A_2, \dots\}$ po dvoch disjunktných množín z $\mathcal{I}$ existuje spočítateľný systém množín $B_j \subset \mathbb{N}$ taký, že $A_j \div B_j$ sú konečné a $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ patrí do $\mathcal{I}$. [Zrejme aj všetky $B_j \in \mathcal{I}$]

Ekvivalentné podmienky (pozri [BDK]):

(AP') Ako (AP) ale nepredpokladáme, že sú po 2 disjunktné.

Každý spočítateľný systém množín z $\mathcal{I}$ má pseudoprienik v $\mathcal{I}$ (t.j. existuje $A \in \mathcal{I}$ také, že všetky $A_n \setminus A$ sú konečné).

Pre ideál spĺňajúci túto podmienku sa tiež používa názov P-ideál.

TODO Ďalšia zaujímavá ekvivalentná podmienka je [GMZ, Theorem 6b] (ekvivalencia je dokázaná v [GMZ, Theorem ?])

Veta 12. Z $\mathcal{I}$ -konvergenzie vyplýva $\mathcal{I}^*$ -konvergenca práve vtedy, keď ideál $\mathcal{I}$ spĺňa podmienku (AP).

4.4 $\mathcal{I}$ -variácia

Variácia postupnosti $x = \text{Var } x = \sum |x_n - x_{n+1}|$.

Variácia na množine $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} = \text{Var } x|K = \sum |x_{k_n} - x_{k_{n+1}}|$

Postupnosť x má konečnú $\mathcal{I}$ -variáciu, ak existuje $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ taká, že $\text{Var } x|K < +\infty$.

4.5 Banachova limita

Ak limitu chápeme ako lineárny operátor z podpriestoru priestoru l_∞ , tak má tieto vlastnosti:

$$(i) \text{ LIM}(c.f + d.g) = c. \text{ LIM } f + d. \text{ LIM } g$$

$$(ii) f \geq 0 \Rightarrow \text{ LIM } f \geq 0$$

$$(iii) \text{ LIM } f = \text{ LIM } fs, \text{ kde } fs \text{ označuje posunutie postupnosti } f \text{ o jeden člen.}$$

(iv) Ak existuje limita $\lim f$ v obvyklom zmysle, tak $\text{LIM } f$ má tú istú hodnotu.

Lineárny operátor na priestore všetkých ohraničených postupností, ktorý má tieto vlastnosti, sa nazýva *Banachova limita*.

TODO z Connors-Grosse: jednoznačnosť Bl a almost convergence, citacia, strong matrix methods

TODO μ -statistical convergence

5 Priestory postupností

K-priestor - lineárny topologický priestor, všetky projekcie sú spojité.

FK-priestor - *K*-priestor, kde topológia je daná metrikou.

Veta 13 (Landau). Nech $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ak pre ľubovoľný rad $(x_k) \in \ell_q$ rad $\sum a_k x_k$ konverguje, tak $(a_k) \in \ell_p$.

Hölderova nerovnosť: $(x_k) \in \ell_p, (y_k) \in \ell_q \Rightarrow |\sum x_k y_k| \leq (\sum x_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum y_k^q)^{\frac{1}{q}}$

Metriky na priestore všetkých postupností:

Fréchetova metrika: $d_F(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$

Bairova metrika $d_B(a, b) = \frac{1}{\min\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq b_n\}}$ pre $a \neq b$.

Dindošova metrika (pre ohraničené postupnosti):

$d_D(a, b) = \sup\{|\frac{a_1 - b_1}{1}|, |\frac{a_1 + a_2 - b_1 - b_2}{2}|, |\frac{a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3}{1}|, \dots\}$

Pre $\varphi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $\varphi((a_n)_{n=1}^{\infty})$ je $d_E(a, b) = |\varphi(a) - \varphi(b)|$ pseudometrika, vynechaním postupností, ktoré končia samými jednotkami, dostaneme metrický priestor.

6 Metódy sumovateľnosti

$\mathcal{S}$ označuje priestor všetkých postupností, $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. $T: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ nech je lineárna transformácia. Znakom $\mathcal{F}(T)$ označíme množinu všetkých $x \in \mathcal{S}_1$, pre ktoré $Tx \in \mathcal{C}$ (Tx je konvergentná postupnosť). Limitu postupnosti Tx označujeme $T - \lim x$. Postupnosti $x \in \mathcal{F}(T)$ nazývame *T-limitovateľné*. Množinu $\mathcal{F}(T)$ voláme *konvergenčným poľom* lineárnej transformácie T .

Lineárna transformácia $T: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ sa nazýva *metódou limitovania*, ak $\mathcal{S}_1$ obsahuje všetky ohraničené postupnosti a pre každú ohraničenú postupnosť $x \in \mathcal{S}_1$ je Tx zasa ohraničená.

Metóda limitovania T' sa nazýva silnejšia než metóda T , ak $\mathcal{F}(T) \subsetneq \mathcal{F}(T')$.

Definícia 5. Lineárna transformácia $T: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ sa nazýva *regulárnou*, ak $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(T)$ a pre $x \in \mathcal{C}$

$$T - \lim \xi_k = \lim \xi_k.$$

Metóda sumovateľnosti (sumability) nekonečných radov = metóda limitovateľnosti pre postupnosť čiastočných súčtov.

Maticové metódy limitovania a sumovateľnosti:

$T = (a_{m,n})$ je nekonečná matica, ktorej členy sú reálne čísla. Ak $x = (x_k) \in \mathcal{S}$, zostrojíme rady

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} x_n.$$

Za predpokladu, že všetky tieto číselné rady konvergujú dostaneme číselnú postupnosť (t_m) , ktorú označíme znakom Tx .

Veta 14. Nech $T = a_{m,n}$ je nekonečná matica s reálnymi členmi.

Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby Tx existovalo pre každú ohraničenú postupnosť x je, aby Tx existovalo pre každú postupnosť $x = (x_k)$, $x_k \rightarrow 0$.

Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby Tx existovalo pre každú postupnosť $x = (x_k)$, $x_k \rightarrow 0$ je, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < +\infty.$$

Veta 15. Lineárna transformácia T definovaná maticou $(a_{m,n})$ zobrazuje každú ohraničenú postupnosť na ohraničenú postupnosť vtedy a len vtedy, keď existuje také $M_0 > 0$, že pre každé $m = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \leq M_0.$$

Veta 16. Lineárna transformácia T definovaná maticou $(a_{m,n})$ je regulárnou metódou limitovania práve vtedy, keď súčasne platí:

a) Existuje také $M > 0$, že pre každé $m = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \leq M;$$

b) Pre každé $n = 1, 2, \dots$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = 0$;

c) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = 1$.

Cesárova metóda: $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, t.j. $a_{m,n} = \frac{1}{m}$ pre $n \leq m$, inak 0.

Norlundova metóda: (p_m) je postupnosť nezáporných reálnych čísel, $P_m = p_1 + \dots + p_m$, $a_{m,n} = p_{m-n+1}/P_m$ pre $n \leq m$, 0 inak.

$$t_m = \frac{p_m x_1 + p_{m-1} x_2 + \dots + p_1 x_m}{P_m}$$

Norlundova metóda je regulárna práve vtedy, keď $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$.

Rieszova metóda

$$t_m = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{P_m}$$

Hovoríme, že (x_n) je (R, p_n) -sumovateľná ku ξ , tak $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \xi$.

Rieszova metóda je regulárna práve vtedy, keď $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \infty$.

Ak $p_n = 1$ pre každé n , dostaneme Cesárovu metódu.

Postupnosť (x_n) je silno $\alpha - (R, p_n)$ -sumovateľná ku ξ , ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} p_k |x_k - \xi|^\alpha = 0$.

Abelova metóda: Označme $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Ak existuje $\lim_{x \rightarrow 1^-} a_n x^n = s$, potom hovoríme, že postupnosť (s_n) je A-limitovateľná (rad $\sum a_n$ je A-sumovateľný) k číslu s .

Abelova metóda je regulárna. Ak je rad Cesárovsky sumovateľný, tak je sumovateľný Abelovou metódou k tomu istému súčtu.

Vety Tauberovho typu = ak rad je sumovateľný nejakou metódou a platí nejaké dodatočná podmienka, tak z toho vyplýva konvergencia tohto radu.

Veta 17. Nech rad $\sum a_n$ (s reálnymi členmi) je sumovateľný Abelovou metódou k súčtu s a nech $na_n \rightarrow 0$. Potom ten rad konverguje a má súčet s .

Veta 18 (Steinhaus). Nech T je regulárna metóda definovaná maticou $(a_{n,k})$. Potom existuje postupnosť núl a jednotiek nelimitovateľná metódou T .

Hovoríme, že postupnosť $x = (x_n)$ je silno C -sumovateľná k L , ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_1 - L| + \dots + |x_n - L|}{n} = 0$.

7 Exponent konverencie

Nech $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$. Položíme $\sigma(A) = 0$, ak A je konečná a $\sigma(A) = \inf\{t > 0; \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-t} < +\infty\}$

$$\sigma(A) = \limsup \frac{\log n}{\log a_n}$$

8 Zovšeobecnenia spojitosti

Definícia 6. Nech X a Y sú topologické priestory. Nech $f: X \rightarrow Y$. Hovoríme, že f je *kvázispojité* v bode $x_0 \in X$, ak pre každé okolie $U(x_0)$ bodu x_0 v X a pre každé okolie $V(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ v Y existuje taká neprázdna otvorená množina $G \subset U(x_0)$, že $f[G] \subset V(f(x_0))$. [Na rozdiel od spojitosti nepožadujeme $x \in G$.]

Veta 19 (Kempisty). Ak je funkcia viacerých premenných kvázispojité v každej premennej, tak je spojitá.

Definícia 7. Funkcia $f: X \rightarrow Y$ je *trochaspojité* v X ak pre každú otvorenú podmnožinu $G \subset Y$ takú, že $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ platí $\text{Int } f^{-1}(G) \neq \emptyset$

kvázispojité $\Rightarrow$ trochaspojité

Veta 20. $g: X \rightarrow Y$ je kvázispojité $\Leftrightarrow$ pre každú otvorenú neprázdnu podmnožinu $G \subset X$ je $f|_G$ trochaspojité.

Veta 21. Funkcia $f: X \rightarrow Y$ je trochaspojité $\Leftrightarrow$ pre každú podmnožinu M hustú v X platí, že $f[M]$ je hustá v $f[X]$.

Definícia 8. Funkcia $f: X \rightarrow Y$ je *slabospojité* v $x_0 \in X$, ak pre každé okolie $V = V(f(x_0))$ existuje okolie $U = U(x_0)$ tak, že $f[U] \subset \overline{V}$.

Ak Y je regulárny priestor, tak spojitost je ekvivalentná so slabou spojitostou.

9 Zovšeobecnenia konverencie

Postupnosť $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ kvázinormálne konverguje k $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ na X , ak pre každú postupnosť (ε_n) , takú že $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ existuje n_x tak, že pre každé $n \geq n_x$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.¹

Literatúra

- [BDK] M. Balcerzak, K. Dems, and A. KomisarSKI. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions.
- [BŠ] B. Balcar and P. Štěpánek. *Teorie množin*. Academia, Praha, 2001.
- [GMZ] G. Grekos, L. Mišík, and M. Ziman. $\mathcal{I}$ -convergence and property (T). 2006. preprint.
- [ŠŠN] M. Švec, T. Šalát, and T. Neubrunn. *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*. Alfa, Bratislava, 1987.

¹?Čo znamená index x v n_x ? Ako že to závisí od bodu x ?