Verzia: 25. júna 2002

Zatiaľ som nepísal poznámky z diferenciálnej a algebraickej topológie, ale na stránke sú poznámky z týchto predmetov, ktoré som používal pri príprave na skúšku.

1 Topológia

Topologické priestory, axiómy oddeliteľnosti (regulárne, úplne regulárne, normálne priestory). Spojité funkcie. Základné topologické konštrukcie (topologický súčin a súčet, faktorový priestor). Súvislé, lokálne kompaktné a kompaktné priestory. Konvergencia v topologických priestoroch (pomocou filtrov a sietí). Metrizovateľné priestory, metrizácia topologických priestorov.

1.1 Topologické priestory

Definícia 1. Nech X je množina. Systém $\mathcal{T}$ podmnožín množiny X taký, že

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) ak $U, V \in \mathcal{T}$, tak aj $U \cap V \in \mathcal{T}$,

(iii) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre každé $i \in I$, tak aj $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

sa nazýva *topológia* na množine X. Dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor.*

Množiny patriace do $\mathcal{T}$ voláme *otvorené,* ich doplnky sú *uzavreté* množiny.

Príklad 1. Triviálnymi príkladmi sú diskrétny (každá množina je otvorená) a indiskrétny topologický priestor (otvorené sú len $\emptyset$ a X).

Každý metrický priestor určuje topológiu. (Topológiu danú metrikou d značíme $\mathcal{T}_d$.)

Kofinitná topológia = otvorené množiny sú doplnky konečných množín.

$(R, \mathcal{T}_z)$, kde $\mathcal{T}_z = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); (\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)(x - \varepsilon, x\rangle \subseteq U\}$.

Sierpińského topologický priestor: $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$

Topológiu možno zadať aj tak, že zadáme množinu uzavretých množín.

Definícia 2. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$. $\overline{A} = \cap\{F : A \subseteq F,\ F \text{ je uzavretá v } X\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A v X.

Tvrdenie 1.

(i) $A \subseteq \overline{A}$.

(ii) $\overline{A}$ *je uzavretá množina.*

(iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(iv) A *je uzavretá* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

(v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(vi) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Topológiu možno zadať aj tak, že zadáme operátor uzáveru. (Musí spĺňať podmienky (i), (iii), (v), (vi) z predchádzajúceho tvrdenia.)

Definícia 3. Podmnožina A topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *hustá,* ak $\overline{A} = X$.

Priestor sa nazýva *separabilný,* ak v ňom existuje spočítateľná hustá podmnožina.

Pre $A \subseteq X$ sa $A^\circ = \bigcup\{U \in \mathcal{T}; U \subseteq A\}$ nazýva *vnútro množiny* A. Platí $X^\circ = X$, $A^\circ \subseteq A$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. Naopak, ak je daný operátor $\mathrm{nt}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ spĺňajúci uvedené vlastnosti, možno pomocou neho definovať topológiu na X tak, aby $\operatorname{int} A = A^\circ$.

Definícia 4. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$. *Okolím* bodu A nazývame ľubovoľnú podmnožinu $U \subseteq X$ takú, že $a \in U$ a existuje $V \in \mathcal{T}$ taká, že $a \in V \subseteq U$.

Veta 1. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$, $a \in X$. Potom $a \in \overline{A} \Leftrightarrow$ pre každé okolie V bodu a $V \cap A \neq \emptyset$.*

Definícia 5. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$. Potom systém $\mathcal{B}(a)$ okolí bodu a sa nazýva *bázou okolí* (bázou systému okolí) bodu a, ak pre každé okolie V bodu a existuje $U \in \mathcal{B}(a)$ také, že $U \subseteq V$.

Definícia 6. Hovoríme, že $(X, \mathcal{T})$ vyhovuje *1. axióme spočítateľnosti,* ak pre každý bod $a \in X$ existuje spočítateľná báza okolí.

Definícia 7. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *bázou topológie* $\mathcal{T}$, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

$(X, \mathcal{T})$ vyhovuje *2. axióme spočítateľnosti,* ak existuje spočítateľná báza topológie.

Veta 2. *Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je bázou topológie $\mathcal{T}$ vtedy a len vtedy, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V \subseteq U$.*

Veta 3. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie. Potom platí*

(i) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(ii) Ak $V, W \in \mathcal{B}$, tak pre každý bod $x \in V \cap W$ existuje množina $U \in \mathcal{B}$ taká, že $x \in U \subseteq V \cap W$.

Obrátene, ak nejaký systém $\mathcal{B}$ spĺňa tieto podmienky, je bázou nejakej topológie.

Tvrdenie 2. *Ak priestor X má spočítateľnú bázu topológie, tak vyhovuje prvej axióme spočítateľnosti.*

Nech $\mathcal{B}$ je báza topologického priestoru X. Potom $A \subseteq X$ je hustá práve vtedy, keď $A \cap U \neq \emptyset$ pre všetky $U \in \mathcal{B}$.

Definícia 8. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *subbázou* topológie $\mathcal{T}$, ak $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{V \in \mathcal{P}(X); (\exists W_1, \dots, W_k \in \mathcal{S}) V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i\}$ je bázou topológie $\mathcal{T}$.

$\mathcal{S}$ je subbáza nejakej topológie na X práve vtedy, keď $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

1.2 Spojité funkcie

Definícia 9. Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva *spojité,* ak vzor $f^{-1}(U)$ každej otvorenej množiny v Y je otvorená množina v X.

Zloženie spojitých zobrazení je spojité. Zúženie spojitého zobrazenia na podpriestor je spojité. Ak A je podpriestor X, tak vloženie A do X je spojité zobrazenie. Konštantné zobrazenie je spojité.

Ekvivalentné podmienky ku spojitosti: Vzor uzavretej množiny je uzavretá. Vzor bázovej množiny je otvorená. Pre každé $A \subseteq X$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Definícia 10. Bijekcia $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizmus,* ak f aj f^{-1} sú spojité.

Definícia 11. Zobrazenie $f: X \to Y$ sa nazýva *otvorené (uzavreté)*, ak pre každú otvorenú (uzavretú) množinu $U \subseteq X$ je $f[U]$ otvorená (uzavretá) v Y.

Definícia 12. Spojité zobrazenie $m: X \to Y$ sa nazýva *vnorenie,* ak $m: X \to m[X]$ je homeomorfizmus.

1.3 Základné topologické konštrukcie

Definícia 13. Nech $(X, \mathcal{T})$ je *topologický priestor* a $A \subseteq X$. Potom topologický priestor na množine A s topológiou $\mathcal{T}_A = \{U \cap A; U \in \mathcal{T}\}$ (tzv. *relatívna topológia*) je *topologický podpriestor* priestoru $(X, \mathcal{T})$.

Tvrdenie 3. *Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický priestor, Y je množina a $f: X \to Y$ je zobrazenie. Potom $\mathcal{T}_f = \{V \in \mathcal{P}(Y); f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ je topológia na Y. $\mathcal{T}_f$ sa nazýva* faktorová topológia. *Platí:*

(i) $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ *je spojité.*

(ii) Ak $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T})$ *je spojité, tak* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_f$.

(iii) Ak $g: (Y, \mathcal{T}_f) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *je zobrazenie a* $g \circ f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *je spojité, tak g je spojité.*

Definícia 14. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, E je relácia ekvivalencie na X, X/E je rozklad X na triedy ekvivalencie a $p: X \to X/E$, $p(x) = E(x)$. Potom $(X/E, \mathcal{T}_p)$ sa nazýva *faktorovým priestorom* priestoru $(X, \mathcal{T})$, označujeme $(X, \mathcal{T})/E$.

Spojité zobrazenie $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ sa nazýva *faktorové,* ak je surjektívne a pre každé $V \in \mathcal{P}(Y)$ platí $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow V \in \mathcal{T}_Y$. (Podmnožina Y je otvorená práve vtedy, keď jej vzor v zobrazení f je otvorená množina v X.)

Tvrdenie 4. *(i) Ak* $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *je faktorové zobrazenie, tak* $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$.

(ii) Ak $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *je faktorové zobrazenie a E_f je relácia ekvivalencie určená zobrazením f (t.j. $(x, y) \in E_f \Leftrightarrow f(x) = f(y)$), tak* $\overline{f}: (X, \mathcal{T}_X)/E_f \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, $\overline{f}(E_f(x)) = f(x)$, *je homeomorfizmus.*

Tvrdenie 5. *Ak spojité zobrazenie $f: X \to Y$ je surjektívne a otvorené (uzavreté), tak je faktorové.*

Definícia 15. Nech $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém topologických priestorov (I je množina.) Nech $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\mathcal{B} = \{W \in \mathcal{P}(X);$ existujú $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ a $U_i \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ pre $i \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)\}$. Nech $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{B}$ je topológia na X určená bázou $\mathcal{B}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *topologickým súčinom* topologický priestorov $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Veta 4 (Vlastnosti topologického súčinu). *(i) Projekcie p_α sú spojité.*

(ii) Ak $\mathcal{T}'$ je topológia na $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ taká, že pre každé $\alpha \in I$ je $p_\alpha: (\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \mathcal{T}') \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je spojité, tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. (T.j. $\mathcal{T}$ je najhrubšia taká topológia, pre ktorú sú všetky p_a spojité.)

Tvrdenie 6. *Ak pre každé $\alpha \in I$ je X_α T_i-priestor ($i = \{0, 1, 2\}$), tak aj $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je T_i-priestor.*

Tvrdenie 7. *Ak f je zobrazenie topologického priestoru Y do topologického súčinu $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, tak f je spojité práve vtedy, keď $p_\alpha \circ f$ je spojité pre všetky $\alpha \in I$.*

Dôsledok 1. *Nech X_α, $\alpha \in I \neq \emptyset$, je systém topologických priestorov a pre každé $\alpha \in I$ je $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ je spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f\colon Y \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ také, že $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ pre každé $\alpha \in I$.*

Dôsledok 2. *Nech X_α, Y_α, $\alpha \in I \neq \emptyset$, sú systémy topologických priestorov a pre každé $\alpha \in I$ je $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y_\alpha$ spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f\colon \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ také, že $f_\alpha \circ p_\alpha = p'_\alpha \circ f$. Označujeme ho $f =: \prod_{\alpha\in I} f_\alpha$.*

Definícia 16. Nech I je neprázdna množina a $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém topologických priestorov. Nech $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ a $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X); U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\})$ je otvorená v $X_\alpha \times \{\alpha\}$ pre každé $\alpha \in I\}$. Používa sa označenie $(X,\mathcal{T}) = \sum\limits_{\alpha\in I} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = \bigoplus\limits_{\alpha\in I} X_\alpha = \coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. $(X,\mathcal{T})$ sa nazýva *topologický súčet* priestorov X_α.

1.4 Axiómy oddeliteľnosti

Definícia 17. Nech $(X,\mathcal{T})$ je topologický priestor.

(i) X sa nazýva *T_0-priestor,* ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existuje otvorená množina U taká, že $a \in U$, $b \notin U$ alebo otvorená množina V taká, že $b \in V$, $a \notin V$.

(ii) X sa nazýva *T_1-priestor,* ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existujú otvorené množiny U, V také, že $a \in U$, $b \notin U$, $a \notin V$, $b \in V$.

(iii) X sa nazýva *T_2-priestor (hausdorffovský priestor),* ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$, existujú otvorené množiny U, V také, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Tvrdenie 8. *X je T_1-priestor práve vtedy, keď všetky jednobodové množiny sú v X uzavreté.*

Tvrdenie 9. *Nech $(X,\mathcal{T})$ je T_i-priestor ($i = 0, 1, 2$) a $(Y,\mathcal{T}_Y)$ je podpriestor $(X,\mathcal{T})$. Potom aj $(Y,\mathcal{T}_Y)$ je T_i-priestor.*

Definícia 18. Priestor X sa nazýva *regulárny,* ak pre každú uzavretú množinu A v X a pre každé $c \in X \setminus A$ existujú otvorené množiny U, V v X tak, že $c \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Regulárny T_1-priestor sa nazýva *T_3-priestor.*

Priestor X sa nazýva *úplne regulárny,* ak pre každú uzavretú množinu A v X a $c \in X \setminus A$ existuje spojité zobrazenie $f\colon X \to \langle 0,1\rangle$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$, $f(c) = 1$. Úplne regulárny T_1-priestor sa nazýva *$T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.*

Priestor X sa nazýva *normálny,* ak pre každé uzavreté disjunktné podmnožiny A, B v X existujú otvorené množiny U, V v X tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Normálny T_1-priestor je *T_4-priestor.*

Tvrdenie 10. *Nech X je priestor a pre každé $c \in X$ $\mathcal{B}_c$ je báza okolí c, ktorej prvky sú otvorené. Potom X je regulárny $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každé $U \in \mathcal{B}_c$ existuje $V \in \mathcal{B}_c$ také, že $\overline{V} \subseteq U$.*

Tvrdenie 11. *Každý T_3-priestor je T_2-priestor. Ak X je úplne regulárny ($T_{3\frac{1}{2}}$) priestor, tak X je regulárny (T_3) priestor. Každý T_4-priestor je T_3-priestor.*

Veta 5 (Urysohnova lema). *Ak X je normálny priestor, A, B sú uzavreté disjunktné podmnožiny v X, tak existuje spojité zobrazenie $f\colon X \to \langle 0,1\rangle$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$.*

Veta 6. *Každý T_4-priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.*

Tvrdenie 12. *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie v X. Potom X je úplne regulárny $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každé $U \in \mathcal{S}$ také, že $c \in U$ existuje spojité zobrazenie $f\colon X \to [0,1]$ tak, že $f(c) = 1$ a $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$.*

Veta 7. *Každý podpriestor/topologický súčin regulárnych/úplne regulárnych/T_3/$T_{3\frac{1}{2}}$ priestorov je regulárny/...*

Veta 8. *Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor práve vtedy, keď existuje množina A tak, že X je homeomorfný nejakému podpriestoru $[0,1]^A$ (tzv. Tichonovova kocka).*

Regulárny priestor, ktorý nie je T_2: dvojprvkový indiskrétny.
Normálny, ktorý nie je úplne regulárny: Sierpińského priestor.
Priestor P_2 na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ je daný bázou okolí:
$\mathcal{B}(A) = \{O_\varepsilon(A), \varepsilon > 0\}$, $O_\varepsilon(A) = \{(x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$ pre $A = [a, b]$, $b \neq 0$
$\mathcal{B}(A) = \{P_\varepsilon(A), \varepsilon > 0\}$, $P_\varepsilon(A) = \{(x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\} \cup \{A\}$ pre $A = [a, 0]$
P_2 je príklad T_2-priestoru, ktorý nie je regulárny.
P_3: ako P_2, len báza okolí bodu $(a, 0)$ je $\mathcal{B}(c, 0) = \{T_\varepsilon(c, 0), \varepsilon > 0\}$, $T_\varepsilon(c, 0) = O_\varepsilon((c, \varepsilon)) \cup \{(c, 0)\}$
P_3 je úplne regulárny priestor, ktorý nie je normálny.

1.5 Súvislosť

Definícia 19. Topologický priestor X je *súvislý,* ak jediné obojaké (t.j. otvorené aj uzavreté) množiny v X sú $\emptyset$ a X. *Súvislá množina* je množina, ktorá ako topologický podpriestor tvorí súvislý priestor. (Ekvivalentná definícia súvislého topologického priestoru: nedá sa napísať ako zjednotenie svojich dvoch neprázdnych disjunktných otvorených podmnožín.)

Tvrdenie 13. *Ak $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ a A je súvislá množina, tak aj B je súvislá.*

Definícia 20. *Komponent súvislosti* priestoru X je súvislá podmnožina X, ktorá je maximálna (vzhľadom na inklúziu).

$C_a = \bigcup\{A \in \mathcal{P}(X); A$ je súvislá a $a \in A\}$ - komponent súvislosti bodu a.

Tvrdenie 14. *Komponenty súvislosti tvoria rozklad topologického priestoru.*

Tvrdenie 15. *Spojitý obraz súvislého topologického priestoru je súvislý.*

Súvislosť sa nezachováva pre topologické súčty a podpriestory. Prenáša sa na topologický súčin, spojitý obraz a faktorový priestor (lebo to je tiež spojitý obraz).

Definícia 21. Topologický priestor X sa nazýva *lineárne súvislý,* ak ľubovoľné jeho dva body možno spojiť cestou. (T.j. pre každé $a, b \in X$ existuje spojité zobrazenie $f\colon \langle 0, 1\rangle \to X$ také, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.)

Každý lineárne súvislý priestor je súvislý. Priestor $\overline{X}$, kde $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x}));\ x \in \mathbb{R}\}$, je príklad priestoru, ktorý je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

Definícia 22. Priestor sa nazýva *lokálne súvislý,* ak pre každý bod $a \in X$ existuje báza okolí, ktoré sú všetky súvislé množiny v X.

Nie každý súvislý priestor je lokálne súvislý a nie každý lokálne súvislý priestor je súvislý.

1.6 Kompaktné priestory

Definícia 23. Priestor X sa nazýva *lindelöffovský,* ak z každého otvoreného pokrytia X sa dá vybrať spočítateľné podpokrytie.

Priestor X sa nazýva *kompaktný,* ak z ľubovoľného otvoreného pokrytia X možno vybrať konečné podpokrytie X. Podmnožina A priestoru X sa nazýva *kompaktná,* ak podpriestor určený A je kompaktný priestor.

Tvrdenie 16. *Ak X je regulárny, lindelöffovský, tak X je normálny.*

Tvrdenie 17. *Ak A je uzavretá podmnožina kompaktného priestoru, tak A je kompaktná.*

Ak A je kompaktná podmnožina T_2-priestoru, tak A je uzavretá.

Tvrdenie 18. *Ak X je T_2-priestor, A, B sú kompaktné podmnožiny v X, $A \cap B = \emptyset$, tak existujú otvorené množiny U, V v X, pre ktoré $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.*

Dôsledok 3. *Ak X je kompaktný T_2-priestor, tak je normálny (T_4).*

Každý podpriestor kompaktného T_2-priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Tvrdenie 19. *Ak $f\colon X \to Y$ je spojité a surjektívne a X je kompaktný, tak aj Y je kompaktný.*

Definícia 24. Systém $\mathcal{S} \neq \emptyset$ podmnožín množiny X sa nazýva *centrovaný,* ak pre ľubovoľný neprázdny konečný podsystém $\mathcal{S}'$ systému $\mathcal{S}$ platí $\bigcap_{F\in\mathcal{S}'} F \neq \emptyset$.

Tvrdenie 20. *Nech X je topologický priestor. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *X je kompaktný.*

(ii) *Pre ľubovoľný centrovaný systém $\mathcal{S}$ uzavretých podmnožín X platí, že $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S \neq \emptyset$.*

(iii) *Pre ľubovoľný centrovaný systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} \overline{S} \neq \emptyset$.*

Veta 9 (Tichonovova). *Ak $(X_\alpha, \alpha \in I)$ je systém kompaktných priestorov, tak ich topologický súčin $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ je kompaktný priestor.*

Veta 10. *Topologický priestor X je kompaktný priestor $\Leftrightarrow$ X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom priestoru $[0,1]^A$ pre vhodné A.*

Definícia 25. Priestor X sa nazýva *lokálne kompaktný,* ak pre každé $a \in X$ existuje báza okolí, ktoré sú všetky kompaktné.

Tvrdenie 21. *T_2-priestor X je lokálne kompaktný práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ existuje kompaktné okolie a.*

Každý kompaktný T_2-priestor je lokálne kompaktný.

Ak Y je uzavretý (otvorený) podpriestor lokálne kompaktného priestoru X, tak Y je lokálne kompaktný.

$\mathbb{R}$ je lokálne kompaktný, ale nie je kompaktný.

Kompaktifikácie

Definícia 26. Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. Usporiadanú dvojicu (e, Y) nazveme kompaktifikáciou priestoru X, ak platí:

(i) Y je kompaktný T_2-priestor,

(ii) $e\colon X \hookrightarrow Y$ je vnorenie,

(iii) $\overline{e[X]} = Y$, t.j. $e[X]$ je hustá v Y.

Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. Kompaktifikácia $(b_X, \beta X)$ sa nazýva *Stone-Čechova kompaktifikácia* priestoru X, ak pre každé spojité zobrazenie $f\colon X \to [0,1]$ existuje práve jedno spojité zobrazenie $\overline{f}\colon \beta X \to [0,1]$ tak, že $f = \overline{f} \circ b_x$, t.j. komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "b_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Tvrdenie 22. *Pre každý $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor existuje Stone-Čechova kompaktifikácia.*

Nech X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor a $(b_X, \beta X)$ je jeho Stone-Čechova kompaktifikácia. Potom pre ľubovoľný kompaktný T_2-priestor K a spojité zobrazenie $f\colon X \to K$ existuje práve jedno spojité zobrazenie $\overline{f}\colon \beta X \to K$ také, že $\overline{f} \circ b_X = f$.

Tvrdenie 23. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je lokálne kompaktný T_2-priestor, $a \notin X$. Nech $X^* = X \cup \{a\}$, $\mathcal{T}^* = \{U \in \mathcal{P}(X^*), a \in U, X - U$ je kompaktná v $(X, \mathcal{T})\} \cup \mathcal{T}$. Potom $(X^*, \mathcal{T}^*)$ je kompaktný T_2-priestor, $(X, \mathcal{T})$ je otvorený podpriestor. Ak $(X, \mathcal{T})$ nie je kompaktný, tak X je hustá v $(X^*, \mathcal{T}^*)$. Teda je to kompaktifikácia priestoru $(X, \mathcal{T})$ – tzv.* jednobodová (Alexandrovova) kompaktifikácia.

1.7 Konvergencia v topologických priestoroch

Konvergencia pomocou filtrov

Definícia 27. Neprázdny systém $\mathcal{F}$ podmnožín množiny X sa nazýva *filter,* ak platí

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) Ak $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tak $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(iii) Ak $F \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq G \subseteq X$, tak $G \in \mathcal{F}$.

Filter $\mathcal{U}$ sa nazýva *ultrafilter* na X, ak pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na X platí: Ak $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, tak $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Nech $\mathcal{F}$ je filter na X. Potom systém $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ sa nazýva *báza filtra* $\mathcal{F}$, ak platí: Pre každé $F \in \mathcal{F}$ existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq F$.

Tvrdenie 24. *Ak $\mathcal{H}$ je báza nejakého filtra $\mathcal{F}$ na X, tak platí*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{H}$

(ii) Ak $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, tak existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq H_1 \cap H_2$.

Systém $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva báza filtra, *ak platí (i) a (ii). Filter určený bázou $\mathcal{H}$ je $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{U \subseteq \mathcal{P}(X); (\exists H \in \mathcal{H}) H \subseteq U\}$.*

Definícia 28. Nech X je topologický priestor, $\mathcal{F}$ je filter na X, $\mathcal{B}$ je báza filtra na X a $c \in X$.

(i) Hovoríme, že *filter $\mathcal{F}$ konverguje* k c v X, ak $\mathcal{F}$ obsahuje všetky okolia bodu c.

(ii) Hovoríme, že *báza filtra $\mathcal{B}$ konverguje* k c v X, ak $\mathcal{F}_B$ konverguje k c, t.j. pre každé okolie U bodu c existuje prvok $B \in \mathcal{B}$ tak, že $B \subseteq U$.

(iii) Bod c sa nazýva *hromadným bodom filtra $\mathcal{F}$*, ak pre každé okolie U bodu c a každý $F \in \mathcal{F}$ $U \cap F \neq \emptyset$. (T.j. $c \in \overline{F}$ pre všetky $F \in \mathcal{F}$).

(iv) Podobne sa definuje *hromadný bod bázy filtra* ako hromadný bod $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Tvrdenie 25. *Nech X je topologický priestor.*

(i) Ak $\mathcal{F} \to c$ v X, $\mathcal{G}$ je filter a $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, tak $\mathcal{G} \to c$.

(ii) Filter $\mathcal{F}_{\{c\}}$ generovaný bázou filtra $\{c\}$ konverguje k c.

(iii) Ak $\mathcal{F} \to c$, tak c je hromadný bod $\mathcal{F}$.

(iv) Ak c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$, tak existuje filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ tak, že $\mathcal{G} \to c$.

Tvrdenie 26. *Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom platí:*

(i) $c \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje báza filtra $\mathcal{F}$ na A tak, že $\mathcal{F} \to c$ v X.

(ii) A je uzavretá $\Leftrightarrow$ pre každú bázu filtra $\mathcal{F}$ na A platí $\lim \mathcal{F} \subseteq A$.

(iii) X je T_2-priestor $\Leftrightarrow$ každý filter (báza filtra) má najviac jednu limitu.

(iv) Ak $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X a c je hromadný bod $\mathcal{F}$, tak $\mathcal{F} \to c$.

Konvergencia pomocou sietí

Definícia 29. Usporiadaná dvojica $(A, \leq)$ sa nazýva *usmernená množina,* ak $A \neq \emptyset$ je neprázdna množina, $\leq$ je kváziusporiadanie na A (t.j. relácia $\leq$ je reflexívna a tranzitívna) a pre ľubovoľné $a, b \in A$ existuje c z A tak, že $a \leq c$ aj $b \leq c$.

Definícia 30. Nech Σ je usmernená množina, X je topologický priestor. Potom zobrazenie $s\colon \Sigma \to X$, $s(\sigma) = x_\sigma$ sa nazýva *sieťou* v priestore X. Označuje sa $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$.

Definícia 31. Hovoríme, že bod $c \in X$ je *hromadný bod siete* $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, ak pre každé okolie U bodu c a každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \geq \sigma$ tak, že $x_{\sigma'} \in U$. Bod c sa nazýva *limitou siete* $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, ak pre každé okolie U bodu c existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre každé $\sigma \geq \sigma_0$ $x_\sigma \in U$. Označenie: $c \in \lim S$, $\lim S = c$, $S \to c$.

Tvrdenie 27. *Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $c \in X$. Potom $c \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v A tak, že $S \to c$.*

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité $\Leftrightarrow$ pre každé $c \in X$ a každú sieť $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ v X, ktorá konverguje k c, platí $(f(x_\sigma), \sigma \in \Sigma) = f \circ S \to f(c)$.

Definícia 32. Nech $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, $S' = (y_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma')$ sú siete v X. Potom S' sa nazýva *podsieť (zjemnenie)* siete S, ak existuje zobrazenie $\varphi\colon \Sigma' \to \Sigma$ také, že

(i) pre každé $\sigma_0 \in \Sigma$ existuje $\sigma_0' \in \Sigma'$ tak, že pre $\sigma' \geq \sigma_0'$ platí $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$,

(ii) pre každé $\sigma' \in \Sigma'$ $y_{\sigma'} = x_{\varphi(\sigma')}$

Tvrdenie 28. *Ak sieť $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma) \to c$ v X a $S' = (x_{\varphi(\sigma')}, \sigma' \in \Sigma')$ je podsieť siete S, tak aj $S' \to c$.*

Ak c je hromadný bod siete $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$, tak existuje podsieť $S' = (x_{\varphi(\sigma')}, \sigma' \in \Sigma')$ siete S tak, že $S' \to c$.

Súvis medzi sieťami a filtrami

Tvrdenie 29. *Nech $S = (x_\sigma, \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X. Položme $\mathcal{F}_S = \{A \in \mathcal{P}(X); (\exists \sigma_0 \in \Sigma)(\forall \sigma \geq \sigma_0) x_\sigma \in A\}$. Potom $\mathcal{F}_S$ je filter v X a $S \to c \Leftrightarrow \mathcal{F}_S \to c$.*

Nech $\mathcal{F}$ je filter v X, $\Sigma = (\{(x, A); A \in \mathcal{F}; x \in A\}, \leq)$, $(x, A) \leq (y, B) \Leftrightarrow B \subseteq A$. Potom $S_\mathcal{F} = (y_{(x,A)}, (x, A) \in \Sigma)$, kde definujeme $y_{(x,A)} = x$, je sieť v X a pre každé $c \in X$ platí $\mathcal{F} \to c \Leftrightarrow S_\mathcal{F} \to c$.

1.8 Metrizácia topologických priestorov

Definícia 33. Priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *metrizovateľný,* ak existuje metrika d na X tak, že $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Tvrdenie 30. *Ak d je metrika na X, tak $d' \colon X \times X \to \mathbb{R}$, $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ je metrika na X a $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.*

Tvrdenie 31. *Podpriestor metrizovateľného priestoru je metrizovateľný. Topologický súčet metrizovateľných priestorov je metrizovateľný.*

Faktorový priestor metrizovateľného nemusí byť metrizovateľný: $p \colon \mathbb{R} \to \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ - faktorizáciou dostaneme indiskrétny priestor.

Tvrdenie 32. *Ak $((X_n, \mathcal{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je systém metrizovateľných priestorov, tak $\prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n, \mathcal{T}_n)$ je metrizovateľný priestor.*

Dôsledok 4. *Priestor $[0, 1]^\mathbb{N}$ je metrizovateľný.*

Veta 11 (Urysohn). *Ak X je regulárny T_1-priestor so spočítateľnou bázou topológie, tak X je metrizovateľný.*

Definícia 34. Zobrazenie $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ sa nazýva *pseudometrika,* ak spĺňa rovnaké vlastnosti ako má metrika s výnimkou tej, že môže platiť $d(x, y) = 0$ aj pre $x \neq y$.

Tvrdenie 33. *Ak (X, d) je (pseudo)metrický priestor, tak zobrazenie $d \colon (X, \mathcal{T}_d) \times (X, \mathcal{T}_d) \to \mathbb{R}$ je spojité.*

Definícia 35. Pre $A \neq \emptyset$ definujeme $d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$. Ak $B \neq \emptyset$, tak $d(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}$.

Tvrdenie 34. *Nech d je pseudometrika na X, $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $d \colon (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie a $\emptyset \neq A \subseteq X$. Potom zobrazenie $f_A \colon (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, $f_A = d(x, A)$ je spojité.*

Definícia 36. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín X. Potom $\mathcal{S}$ sa nazýva *lokálne konečný (diskrétny),* ak pre každé $a \in X$ existuje otvorené okolie U_a bodu a tak, že $\{S \in \mathcal{S}, S \cap U_a \neq \emptyset\}$ je konečná (jednoprvková alebo prázdna – $\operatorname{card}\{S \in \mathcal{S}, S \cap U_a \neq \emptyset\} \leq 1$). $\mathcal{S}$ sa nazýva *σ-lokálne konečný (σ-diskrétny),* ak je zjednotením spočítateľného systému lokálne konečných (diskrétnych) systémov.

Definícia 37. Nech $\mathcal{U}$ je pokrytie priestor X. Potom pokrytie $\mathcal{V}$ sa nazýva zjemnením $\mathcal{U}$, ak pre každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $V \subseteq U$. Označujeme $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

Veta 12. *Ak (X, d) je metrický priestor, tak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$ existuje σ-diskrétne otvorené pokrytie také, že $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.*

Veta 13. *Ak (X, d) je metrický priestor, tak $(X, \mathcal{T}_d)$ má σ-diskrétnu bázu.*

Veta 14. *Nech X je metrizovateľný (metrický) priestor. Potom sú ekvivalentné*

(i) X má spočítateľnú bázu,

(ii) X je separabilný,

(iii) X je lindelöffovský.

Dôsledok 5. *Každý kompaktný metrizovateľný priestor má spočítateľnú bázu.*

Dôsledok 6. *X je kompaktný, metrizovateľný $\Leftrightarrow$ X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom priestoru $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*

Veta 15. *Nech $\mathcal{S}$ je lokálne konečný systém podmnožín priestoru X. Potom platí*

(i) $\overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \overline{S}$

(ii) Ak pre každé $S \in \mathcal{S}$ je S uzavretá v X, tak aj $\bigcup \mathcal{S}$ je uzavretá v X.

Veta 16. *Ak X je regulárny a má σ-lokálne konečnú bázu $\mathcal{B}$, tak X je normálny.*

Dôsledok 7. *Každý metrizovateľný priestor je normálny.*

Veta 17. *Nech X je T_0-priestor a $(\rho_i, i \in \mathbb{N})$ je systém pseudometrík na X, ktorý má nasledujúce vlastnosti:*

(i) $\forall i \in \mathbb{N} \forall x, y \in X \ \rho_i(x, y) \leq 1$

(ii) $\forall i \in \mathbb{N} \ \rho_i \colon (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *je spojité zobrazenie.*

(iii) Pre každú uzavretú množinu A a každé $x \notin A$ existuje $i \in \mathbb{N}$ $\rho_i(x, A) > 0$.

Potom zobrazenie $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x, y)$ *je metrika na X a $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Veta 18. *Nech X je regulárny T_1-priestor. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) X je metrizovateľný.

(ii) X má σ-diskrétnu bázu. (Bing)

(iii) X má σ-lokálne konečnú bázu. (Nagata)

2 Topológia II

Takto vyzerala otázka týkajúca sa topológie na malej analýze.
Topologické priestory. Otvorené a uzavreté množiny, okolia, husté množiny a pod. Spojité zobrazenia, homeomorfné zobrazenia, otvorené a uzavreté zobrazenia. Spojitý obraz kompaktných a súvislých množín.

Definícia 1. Systém podmnožín množiny X $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na X, ak

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) $A_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

Dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor* ak $\mathcal{T}$ je topológia na X.

Príklady topologických priestorov:
$(X, \{\emptyset, X\})$ - indiskrétny topologický priestor
$(X, \mathcal{P}(X))$ - diskrétny topologický priestor
$(X, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : X \setminus U$ je konečná$\}$ - kofinitná topológia
Každý metrický priestor určuje topológiu.

Definícia 2. Množiny patriace do $\mathcal{T}$ nazývame *otvorené* a ich doplnky *uzavreté* množiny.

Tvrdenie 1.

(i) $\emptyset$ a X sú uzavreté,

(ii) prienik ľubovoľného systému uzavretých množín je uzavretá množina,

(iii) zjednotenie konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina.

Definícia 3. Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$. $\overline{A} = \cap\{F : A \subseteq F,\ F$ je uzavretá v $X\}$ sa nazýva *uzáver* množiny A v X.

Tvrdenie 2.

(i) A je uzavretá $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,

(ii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(iii) $A \subseteq \overline{A}$,

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definícia 4. Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $Y \subseteq X$, tak $\mathcal{T}^* = \{G \cap Y : G \in \mathcal{T}\}$ je topológia na Y a nazýva sa *relatívnou topológiou* indukovanou na Y topológiou $\mathcal{T}$. $(Y, \mathcal{T}^*)$ sa nazýva *topologický podpriestor* priestoru X.

Definícia 5. Nech X je topologický priestor a $x \in V \subseteq X$. V sa nazýva *okolie* bodu x, ak existuje otvorená množina U taká, že $x \in U \subseteq V$.

Veta 1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ *každé okolie bodu x má neprázdny prienik s A (pretína množinu A).*

2.1 Typy bodov a množín v topologických priestoroch

Definícia 6. Bod p topologického priestoru X sa nazýva *izolovaný bod* priestoru X, ak množina $\{p\}$ je otvorená v X. Bod $p \in A \subseteq X$ je *izolovaný bod* množiny A, ak je izolovaný v topologickom podpriestore A priestoru X.

Definícia 7. Bod $p \in X$ je *hromadný bod* množiny $A \subseteq X$, ak ľubovoľné okolie bodu p obsahuje bod množiny A rôzny od p. Množina všetkých hromadných bodov množiny A sa označuje $D(A)$ a nazýva sa *derivácia množiny* A.

Tvrdenie 3. *Nech X je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom platí:*

(i) $\overline{A} = A \cup D(A)$,

(ii) množina A je uzavretá práve vtedy, keď $D(A) \subseteq A$ (A obsahuje všetky svoje hromadné body.)

Definícia 8. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$. Potom množina $\operatorname{Int} A = \cup\{G \colon G \subseteq A, G \in \mathcal{T}\}$ sa nazýva *vnútro* množiny A a množina $H(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ *hranica* množiny A. Prvky množiny $\operatorname{Int} A$ nazývame *vnútorné body* a prvky množiny $H(A)$ nazývame *hraničné body* množiny A.

Tvrdenie 4. *(i) A je otvorená $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$,*

(ii) $A \subseteq \operatorname{Int} A \cup H(A)$,

(iii) ak A je uzavreté, tak $A = \operatorname{Int} A \cup H(A)$.

(iv) $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$

(v) $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup H(A)$

Definícia 9. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *hustá* (v X), ak $\overline{A} = X$.

Tvrdenie 5. *Množina $A \subseteq X$ je hustá v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina G otvorená v X má neprázdny prienik s množinou A.*

Definícia 10. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *perfektná*, ak $A = D(A)$.

Veta 2. *Množina $A \subseteq X$ je perfektná práve vtedy, keď A je uzavretá a nemá izolované body.*

Definícia 11. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva *riedka* (v priestore X), ak $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Veta 3. *Množina $A \subseteq X$ je riedka v X práve vtedy, keď každá neprázdna množina $G \subseteq X$ obsahuje takú neprázdnu otvorenú podmnožinu $H \subseteq G$, že $H \cap A = \emptyset$.*

2.2 Báza topológie, báza okolí

Definícia 12. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém množín $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *báza topológie* $\mathcal{T}$, ak každá množina z $\mathcal{T}$ je zjednotením množín z $\mathcal{B}$.

Tvrdenie 6. *Nutná a postačujúca podmienka na to, aby $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bola báza nejakej topológie na X sú:*

(i) $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{B}} A = X$,

(ii) ak $A, B \in \mathcal{B}$ a $p \in A \cap B$, tak existuje taká množina $V \in \mathcal{B}$, že $p \in V \subseteq A \cap B$.

Definícia 13. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *priestor so spočítateľnou bázou*, ak existuje spočítateľná báza $\mathcal{B}$ pre topológiu $\mathcal{T}$. Hovoríme potom, že X spĺňa *druhú axiómu spočítateľnosti.*

Definícia 14. Topologický priestor X sa nazýva *separabilný*, ak v X existuje hustá spočítateľná podmnožina.

Tvrdenie 7. *Ak X je priestor so spočítateľnou bázou, tak X je separabilný.*

Pre metrické priestory platí aj obrátená implikácia.

Definícia 15. Hovoríme, že systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ je *subbáza* topológie $\mathcal{T}$, ak systém pozostávajúci zo všetkých konečných prienikov množín z $\mathcal{S}$ tvorí bázu topológie $\mathcal{T}$.

Definícia 16. Nech X je topologický priestor a $p \in X$. Množina $\mathcal{B}$ okolí bodu p sa nazýva *báza okolí* bodu p, ak $p \in B$ pre všetky $B \in \mathcal{B}$ a pre každé okolie V bodu p existuje množina $B \in \mathcal{B}$ taká, že $B \subseteq V$.

Definícia 17. Ak $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ sú topologické priestory, tak $(\prod X_i, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T}$ je určená subbázou $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i)\colon U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$ (p_i označujeme projekcie z karteziánskeho súčinu $\prod X_i$ na množinu X_i) sa nazýva *topologický súčin* topologických priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. (Teda báza topológie topologického súčinu obsahuje množiny tvaru $\prod_{i \in I} V_i$, pričom $V_i \in \mathcal{T}_i$ pre všetky $i \in I$ a $V = X_i$ pre všetky $i \in I$ až na konečný počet.)

2.3 Zobrazenia topologických priestorov

Definícia 18. Nech $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{S})$ sú topologické priestory a $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je

(i) *spojité*, ak pre každú otvorenú množinu $U \subseteq Y$ je jej vzor $f^{-1}(U)$ otvorená v X,

(ii) *homeomorfizmus*, ak f je bijekcia a f aj f^{-1} sú spojité,

(iii) *uzavreté*, ak obraz každej uzavretej množiny je uzavretá,

(iv) *otvorené* , ak obraz každej otvorenej množiny je otvorená.

Tvrdenie 8. *Nech X a Y sú topologické priestory, $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) f je spojité,

(ii) vzor každej uzavretej množiny v zobrazení f je uzavretá množina,

(iii) pre každú podmnožinu $A \subseteq X$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Tvrdenie 9. *Ak X a Y sú topologické priestory a $f\colon X \to Y$ je bijekcia, tak sú ekvivalentné podmienky:*

(i) f je homeomorfizmus,

(ii) f je spojité a otvorené,

(iii) f je spojité a uzavreté.

2.4 Súvislý topologický priestor

Definícia 19. Topologický priestor X sa nazýva *súvislý*, ak nie je zjednotením svojich dvoch neprázdnych uzavretých disjunktných podmnožín.

Veta 4. *Ak $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$ je spojité, surjektívne a $(X,\mathcal{T})$ je súvislý, tak aj $(Y,\mathcal{S})$ je súvislý. (Spojitý obraz súvislého topologického priestoru je súvislý.)*

2.5 Kompaktný topologický priestor

Definícia 20. Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak každé jeho otvorené pokrytie obsahuje konečné podpokrytie.

Definícia 21. Hovoríme, že systém množín je *centrovaný*, ak každý jeho konečný podsystém má neprázdny prienik.

Tvrdenie 10. *Topologický priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín má neprázdny prienik.*

Tvrdenie 11. *Uzavretá podmnožina kompaktného topologického priestoru je kompaktná.*

Tvrdenie 12. *Kompaktný podpriestor hausdorffovského priestoru je uzavretý.*

Veta 5. *Spojitý obraz kompaktného topologického priestoru je kompaktný.*

Veta 6 (Tichonovova). *Ak X_γ, $\gamma \in \Gamma$ sú kompaktné topologické priestory, tak ich topologický súčin $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ je kompaktný.*

3 Diferenciálna topológia

Diferencovateľné variety a funkcie. Dotyková varieta. Vloženie kompaktných variet do $\mathbb{R}^n$. Veta o lokálnej inverzii. Vektorové fibrácie. Veta o transverzalite.

4 Algebraická topológia

Homotopia a homotopické zobrazenia, fundamentálna grupa. Fundamentálna grupa kružnice. Geometrické a reťazové komplexy. Singulárne a simpliciálne homológie.

4.1 Homotópia

Definícia 1. Nech $f, g\colon X \to Y$ sú spojité zobrazenia. Hovoríme, že f je *homotopné* s g ($f \simeq g$, f sa dá homotopicky zdeformovať na g), ak existuje spojité zobrazenie $H\colon X \times I \to Y$ také, že $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ pre každé $x \in X$.

H je *homotópia* od f ku g.

Vlastne: $\forall t \in I$ H definuje spojité zobrazenie $h_t\colon X \to Y$; $h_t(x) = H(x,t)$.
To, že H je spojité znamená to, že systém zobrazení $\{h_t\}_{t\in I}$ je spojitý.
To, že H je homotópia od f ku g znamená, že $h_0 = f$ a $h_1 = g$.

Definícia 2. Ak $f, g\colon X \to Y$ sú spojité zobrazenia, také, že pre dáku podmnožinu $A \subset X$ máme $f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A$, hovoríme, že f a g sú *homotopné rel A*, ak existuje homotópia $H\colon X \times I \to Y$ taká, že $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ a $H(a,t) = f(a) = g(a)$ pre $\forall a \in A, t \in I$.

H=*homotópia rel A* od f ku g.

Označujeme $f \simeq g(relA)$.

Tvrdenie 1. *Na triede spojitých zobrazení z X do Y (pre dané X, Y) je relácia $\simeq$ reláciou ekvivalencie.*

Definícia 3. Triedy ekvivalencie $\simeq$ sa nazývajú *homotopické triedy* zobrazení z X do Y.

Veta 1. *Spojité zobrazenie $f\colon S^n \to X$ sa dá rozšíriť na spojité zobrazenie $F\colon D^{n+1} \to X \Leftrightarrow$ f je homotopné s konštantným zobrazením; $f \simeq const$.*

Definícia 4. Zobrazenie, ktoré je homotopné s konštantným zobrazením sa tiež nazýva *nulahomotopné* (alebo homotopné s nulou).

Veta 2. *Nech $f, g\colon X \to Y$, nech $A \subset X$ a $f|_A = g|_A$. Nech $h\colon Y \to Z$ je ľubovoľné spojité zobrazenie. Ak $f \simeq g(relA)$, tak aj $h \circ f \simeq h \circ g(relA)$.*

Nech $f, g\colon X \to Y$, nech $A \subset X$ a $f|_A = g|_A$. Ak $k\colon W \to X$ a $f \simeq g(relA)$, tak $f \circ k \simeq g \circ k(rel\ k^{-1}(A))$

Definícia 5. Zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva *homotopická ekvivalencia*, ak existuje spojité zobrazenie $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$. (g sa tiež zvykne volať ľavé homotopicky inverzné zobrazenie ku f a naopak, f a g sú navzájom homotopicky inverzné.)

Priestory X, Y sú *homotopicky ekvivalentné* (=*majú ten istý homotopický typ*), ak existuje homotopická ekvivalencia $f\colon X \to Y$. Budeme označovať $X \sim Y$ (v literatúre aj $X \cong Y$).

Platí: Topologicky ekvivalentné topologické priestory sú homotopicky ekvivalentné (homeomorfizmus je homotopická ekvivalencia).

Tvrdenie 2. *Relácia homotopickej ekvivalencie je relácia ekvivalencie na triede topologických priestorov.*

$\mathbb{R}^n \sim \{x\}$
$\mathbb{R}^n - \{0\} \sim S^{n-1}$

Definícia 6. Ak A je topologický podpriestor X a $i : A \hookrightarrow X$ a $r\colon X \to A$ je (spojité) také, že $r \circ i = id_A$ (t.j. $r|_A \equiv id_A$), tak r sa nazýva *retrakcia* (stiahnutie) priestoru X na podpriestor A. (A je *retrakt* X.)

Ak $r\colon X \to A$ je retrakcia taká, že $i \circ r \simeq id_X$, tak r sa nazýva *deformačná retrakcia.* (A je *deformačný retrakt* priestoru X).

Ak $i \circ r \simeq id_X(relA)$, tak r je *silná deformačná retrakcia.*

Definícia 7. Priestor X sa nazýva *kontraktibilný* (stiahnuteľný), ak pre dáke $x \in X$ platí, že $\{x\}$ je deformačným retraktom priestoru X.

Tvrdenie 3. *Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow$ X je homotopicky ekvivalentný s jednobodovým priestorom.*

Tvrdenie 4. *Priestor X je kontraktibilný $\Leftrightarrow id_X \simeq const$.*

Tvrdenie 5. *Nech $f\colon X \to S^n$, $n \geq 1$ je spojité zobrazenie také, že $f(X) \neq S^n$. Potom $f \simeq const$.*

Tvrdenie 6. *$CX = X \times I/X \times \{1\}$ je kontraktibilný.*

4.2 Fundamentálna grupa topologického priestoru

Definícia 8. $\Omega(X, x_0)$ = množina všetkých ciest v X, ktoré začínajú aj končia v x_0. Prvky z $\Omega(X, x_0)$ sa nazývajú *slučky.*

Veta 3. *Nech $c, d\colon I \to X$ sú cesty také, že $c(1) = d(0)$ a nech $c', d'\colon I \to X$ sú cesty také, že $c'(1) = d'(0)$. Ak $c \simeq c'(rel\{0,1\})$ a $d \simeq d'(rel\{0,1\})$, tak $c * d \simeq c' * d'(rel\{0,1\})$.*
Okrem toho: $c^- \simeq c'^- rel\{0,1\}$

Dôsledok 1. *Na množine homotopických tried $rel\{0,1\}$ slučiek priestoru X v bode x_0 predpis $[c]\cdot[d] = [c * d]$ dobre definuje binárnu operáciu.*

Lema 1. *Nech $c\colon I \to X$ je cesta. Nech $\alpha\colon I \to I$ je spojité zobrazenie také, že $\alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1$. Potom $c \circ \alpha \simeq c(rel\{0,1\})$.*

Definícia 9. Nech $c, d\colon I \to X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0,1)$. Potom definujeme novú cestu $c *_q d$.

$$c *_q d(t) = \begin{cases} c(\frac{t}{q}) & t \in < 0, q > \\ d(\frac{t-q}{1-q}) & t \in < q, 1 > \end{cases}$$

Veta 4. *Nech $c, d\colon I \to X$ sú 2 cesty v X také, že $c(1) = d(0)$. Nech $q \in (0,1)$. Potom $(c *_q d) \circ \alpha = c * d$ pre vhodné $\alpha\colon I \to I$; $\alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1$. Čiže $c *_q d \simeq c * d(rel\{0,1\})$.*

Veta 5. *Nech c, d, f sú také cesty v X, že sa dajú skladať. Potom: $(c*d)*f \simeq c*(d*f)rel\{0,1\}$.*

Dôsledok 2. *Operácia $\cdot$ na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek v $x_0 \in X$ definovaná pomocou spájania ciest je asociatívna.*
$([c]\cdot[d])\cdot[f] = [c]\cdot([d]\cdot[f])$ pre ľubovoľné $c, d, f \in \Omega(X, x_0)$.

Veta 6. *Nech $c\colon I \to X$ je cesta v X a nech $c(0)$ resp. $c(1)$ sú konštantné cesty v $c(0)$ resp. $c(1)$. Potom*
$c(0) * c \simeq c\ rel\{0,1\}$,
$c * c(1) \simeq c\ rel\{0,1\}$.

Dôsledok 3. *Konštantná slučka v $x_0 \in X$ je neutrálnym prvkom operácie $\cdot$ na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek v $x_0 \in X$.*

Veta 7. *Pre ľubovoľnú cestu $c\colon I \to X$.*
$c * c^- \simeq c(0)\ rel\{0,1\}$
$c^- * c \simeq c(1)\ rel\{0,1\}$

Dôsledok 4. *Pre $c \in \Omega(X, x_0)$ máme, že $[c^-] = [c]^{-1}$.*

Veta 8. *Nech X je topologický priestor, pevne zvoľme $x_0 \in X$. Ak na množine homotopických tried rel{0,1} slučiek priestoru X v bode x_0 definujeme operáciu $\cdot$ predpisom $[c]\cdot[d] = [c * d]$, tak dostaneme z tejto množiny grupu; označme ju $\pi(X, x_0)$.*

Definícia 10. Grupa $\pi(X, x_0)$ sa nazýva *fundamentálna grupa* priestoru X v bode x_0 (s referenčným (bázovým) bodom x_0).

4.3 Závislosť $\pi(X, x_0)$ od x_0

Definícia 11. Ak $r\colon I \to X$ je cesta v X, $r(0) = x_1$, $r(1) = x_0$, definujeme $\alpha_r\colon \Omega(X, x_0) \to \Omega(X, x_1)$, $\alpha_r(c) = r * c * r^-$. Toto zobrazenie indukuje zobrazenie fundamentálnych grúp:
$\alpha_r\colon \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1)$
$\alpha_r[c] = [r * c * r^-]$

Tvrdenie 7. $\alpha_r\colon \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1)$
1. je homomorfizmus grúp
2. je izomorfizmus grúp
3. α_r závisí od homotopickej triedy $rel\{0, 1\}$ cesty r.
4. Ak $s\colon I \to X$ je cesta z x_1 do x_0, tak α_r a α_s sa líšia o vnútorný automorfizmus grupy $\pi(X, x_1)$ (Teda ak $\pi(X, x_1)$ je komutatívna, tak máme $\alpha_r = \alpha_s$, t.j. izomorfizmus $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$ nezávisí od výberu cesty z x_0 do x_1 (ak taká cesta existuje).)

Dôsledok 5. *Ak priestor X je lineárne súvislý, tak pre ľubovoľné $x_0, x_1 \in X$ máme $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$. (vo všeobecnosti tento izomorfizmus nie je kanonický - závisí od homotopickej triedy rel{0,1}) Potom $\pi(X, x_0)$ označujeme $\pi(X)$.*

Lema 2. *Nech $c, d\colon I \to X$ sú uzavreté cesty a nech $H\colon I \times I \to X$ je homotópia od c ku d taká, že $H(0, s) = H(1, s)$ $\forall s \in I$ (=t.j. cez uzavreté cesty). Nech $h\colon I \to X$ je cesta definovaná ako $h(s) = H(0, s)$ pre $s \in I$. Potom $\alpha_h([d]) = [c]$.*

Definícia 12. Pre spojité zobrazenie $f\colon X \to Y$, definujeme $\pi(f)\colon \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$, $\pi(f)([c]) = [f \circ c]$.

Tvrdenie 8. *$\pi(f)\colon \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$ je homomorfizmus grúp. Ak $g\colon Y \to Z$ je spojité, tak $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$. T.j. ak diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

komutuje, tak komutuje aj

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\pi(f)"] \arrow[dr, "\pi(g\circ f)"'] & \pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\pi(g)"] \\ & \pi(Z, gf(x_0)) \end{tikzcd}$$

. Okrem toho $\pi(id_X) = id_{\pi(X,x_0)}$.

Veta 9. *Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ sú spojité zobrazenia, nech $x_0 \in X$. Nech $f \simeq g$ a $H\colon X \times I \to Y$ je homotópia od f ku g. Definujme cestu $h\colon I \to Y$, $h(s) = H(x_0, s)$. (cesta z $f(x_0)$ do $g(x_0)$) Potom $\alpha_h \circ \pi(g) = \pi(f)$ a α_h je izomorfizmus.*

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\pi(g)"] \arrow[dr, "\pi(f)"'] & \pi(Y, g(x_0)) \arrow[d, "\alpha_h \cong"] \\ & \pi(Y, f(x_0)) \end{tikzcd}$$

Dôsledok 6. *$\pi(g)$ je izomorfizmus $\Leftrightarrow$ $\pi(f)$ je izomorfizmus.*

Veta 10. *Nech X, Y majú ten istý homotopický typ. Potom ich fundamentálne grupy sú izomorfné.*

Dôsledok 7. *Fundamentálna grupa ľubovoľného kontraktibilného priestoru je triviálna.*

Tvrdenie 9. *Nech X, Y sú topologické priestory, nech $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Potom $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.*

4.4 Fundamentálna grupa kružnice

Veta 11. $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Lema 3. *Označme $\Phi\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\Phi(t) = e^{2\pi i t}$ Nech $c\colon I \to S^1$ je ľubovoľná slučka v bode $1 \in S^1$. Potom existuje jediná cesta $\tilde{c}\colon I \to \mathbb{R}$ taká, že: $\tilde{c}(0) = 0$ a $\Phi \circ \tilde{c} = c$. ($\tilde{c}$ sa nazýva zdvih cesty c do $\mathbb{R}$.)*

Tvrdenie 10. *V situácii z predchádzajúcej lemy je $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$.*

Veta 12. *Nech $c, d \in \Omega(S^1, 1)$ sú homotopné $rel\{0,1\}$. Nech $H\colon I \times I \to S^1$ je homotópia $rel\{0,1\}$ od c ku d. Potom existuje jediná homotópia $rel\{0,1\}$ $\tilde{H}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ od $\tilde{c}$ ku $\tilde{d}$ taká, že $\Phi \circ \tilde{H} = H$.*

Dôsledok 8. *Ak $[c] = [d] \in \pi(S^1, 1)$, tak $\tilde{c} \simeq \tilde{d}(rel\{0,1\})$, a preto $\tilde{c}(1) = \tilde{d}(1)$. Teda predpis $[c] \mapsto \tilde{c}(1)$ dobre definuje zobrazenie $\chi\colon \pi(S^1) \to \mathbb{Z}$.*

Tvrdenie 11. *χ je izomorfizmus grúp.*

Tvrdenie 12. *S^1 nie je retraktom gule D^2.*

Tvrdenie 13. *Torus T má fundamentálnu grupu $\pi(T) \cong \mathbb{Z}^2$.*

4.5 Reťazcové komplexy

Definícia 13. Postupnosť $G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je *exaktná* v G, ak $Ker(\beta) = Im(\alpha)$.

Postupnosť $\dots G_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} G_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \dots$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi je *exaktná*, ak každá postupnosť $G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_{n+2}$ je exaktná v G_{n+1}. ($\forall n \in \mathbb{Z}$).

Exaktná postupnosť $0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 0$ abelovských grúp a homomorfizmov medzi nimi sa nazýva *krátka exaktná postupnosť*.

Definícia 14. Δ_q = *q-rozmerný štandardný simplex* = konvexný obal koncových bodov bázových vektorov $e_0, \dots e_q$ v $\mathbb{R}^{q+1} = \{(t_0, \dots, t_q); t_i \geq 0, \sum\limits_{i=0}^{q} t_i = 1\}$.

Body $e_0, \dots, e_q$ sa volajú vrcholy Δ_q.

Množina $\{(t_0, \dots, t_q) \in \Delta_q;\ t_i = 0\}$ pre dáke i sa nazýva *i-ta stena* simplexu Δ_q, leží oproti vrcholu e_i.

Definujeme zobrazenie $d_q^i\colon \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ $d_q^i(t_0, \dots, t_{q-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{q-1})$ pre každé $i = 0, \dots, q$. (tzv. stenové zobrazenie)

Lema 4. *$i, j \in \{0, 1, \dots, q\}$ také, že $j < i$ máme $d_q^i \circ d_{q-1}^j = d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}$.*

Definícia 15. *Singulárny q-rozmerný simplex* topologického priestoru X je spojité zobrazenie $f\colon \Delta_q \to X$.
$S_q(X)$:= voľná abelovská grupa generovaná množinou všetkých q-simplexov priestoru X pre $q \geq 0$ a $S_q(X) := 0$ pre $q < 0$.

Definujme homomorfizmus $\partial_q^i\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, $\partial_q^i(f) = f \circ d_q^i$ pre $i = 0, \dots, q$.

Definujeme *hraničný operátor*: $\partial_q\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, $\partial_q = \sum\limits_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_q^i$, ak $q \geq 0$, inak $\partial_q = 0$.

Veta 13. $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$ *pre všetky* $q \in \mathbb{Z}$.

Definícia 16. Prvky z $S_q(X)$ sa volajú *q-rozmerné singulárne reťazce* priestoru X.

Definícia 17. Postupnosť $S(X) = (S_q(X), \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ sa nazýva *singulárny reťazcový komplex* topologického priestoru X.

Pre spojité zobrazenie $f: X \to Y$ definujeme $S_q(f): S_q(X) \to S_q(Y)$, $S_q(f)(T) = f \circ T$ pre $q \geq 0$, pre $q < 0$ je $S_q(f)$ nulové zobrazenie.

Veta 14. *Ak* $f: X \to Y$ *je spojité, tak diagram*

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "S_q(f)"] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "S_{q-1}(f)"] & S_{q-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "S_{q-2}(f)"] & {} \\ \arrow[r] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"] & S_{q-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & S_{q-2}(Y) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

komutuje, t.j. $\forall q \in \mathbb{Z}$ *máme* $S_{q-1}(f) \circ \partial_q = \partial_q \circ S_q(f)$.

Tvrdenie 14. *Ak* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *sú spojité, tak* $S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f)$ *a* $S_q(id_X) = id_{S_q(X)}$.

Definícia 18. *Reťazcový komplex* je postupnosť $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, kde K_q sú abelovské grupy a $\partial_q: K_q \to K_{q-1}$ je homomorfizmus grúp (pre všetky $q \in \mathbb{Z}$) taký, že $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Ak $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ sú dva reťazcové komplexy, tak *homomorfizmom reťazcových komplexov* z K do L rozumieme postupnosť $f = (f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ homomorfizmov $f_q: K_q \to L_q$ takých, že $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Stručne hovoríme o homomorfizme reťazcových komplexov $f: K \to L$. (∂_q sa aj tu volá *hraničný operátor*).

Tvrdenie 15. *Je jasné, že ak* $f: K \to L$, $g: L \to M$ *sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak aj* $g \circ f: K \to M$ *je homomorfizmus reťazcových komplexov,* $id_K: K \to K$ *je tiež homomorfizmus reťazcových komplexov.*

Definícia 19. $\mathcal{K}$=kategória všetkých reťazcových komplexov a homomorfizmov medzi nimi.

Definícia 20. Reťazcový komplex E taký, že $E_0 = \mathbb{Z}$ a $E_q = 0$ pre $q \neq 0$ sa nazýva *augmentačný komplex.*

Definícia 21. Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ je reťazcový komplex. Potom označme $Z_q(K) := Ker(\partial_q)$, $B_q(K) := Im(\partial_{q+1})$.

Tvrdenie 16. $B_q(K)$ *je podgrupa grupy* $Z_q(K)$.

Definícia 22. $Z_q(K)$=*grupa q-cyklov* reťazcového komplexu K. $B_q(K)$=*grupa q-hraníc* reťazcového komplexu K.

Definícia 23. Ak $K = (K_q, \partial_q)$ je reťazcový komplex, tak faktorová grupa $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ sa nazýva *q-ta grupa homológií* (q-ta homologická grupa) komplexu K. Jej prvky označujeme $[c] \in H_q(K)$.

Definícia 24. Relácia ekvivalencie na grupe $Z_q(K)$ určená podrupou $B_q(K)$ sa nazýva *homológia.*
$c, d \in Z_q(K):\ c \simeq d \Leftrightarrow c - d \in B_q(K) \Leftrightarrow c - d = \partial_{q+1}(a)$ pre dáke $a \in K_{q+1}$. Hovorí sa vtedy, že c a d sú homologické.

Tvrdenie 17. *Nech $K = (K_q, \partial_q)_{q \in Z}$, $L = (L_q, \partial_q)_{q \in Z}$ sú reťazcové komplexy, nech $f \colon K \to L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov. Potom:*
$f_q(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$
$f_q(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$

Veta 15. *Ak $f \colon K \to L$ je homomorfizmus reťazcových komplexov, tak predpis $[c] \mapsto [f_q(c)]$ dobre definuje homomorfizmus grúp $H_q(f) \colon H_q(K) \to H_q(L)$.*

Definícia 25. Homomorfizmus $H_q(f) \colon H_q(K) \to H_q(L)$ z predchádzajúcej vety sa nazýva *homomorfizmus homologických grúp indukovaný homomorfizmom reťazcových komplexov* $f \colon K \to L$.

Tvrdenie 18. *Ak $f \colon K \to L$, $g \colon L \to M$ sú homomorfizmy reťazcových komplexov, tak pre každé $q \in \mathbb{Z}$ máme:*
$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$
$H_q(id_K) = id_{H_q(K)}$
Máme teda kovariantný funktor $H \colon \mathcal{K} \to GradAb$.

4.6 Singulárne homologické grupy topologických priestorov

Definícia 26. Nech X je topologický priestor. Potom *q-ta singulárna grupa homológií priestoru X* sa definuje ako $H_q(X) := H_q(S(X))$ pre $\forall q \in \mathbb{Z}$. Ak $f \colon X \to Y$ je spojité zobrazenie, tak máme homomorfizmus singulárnych reťazcových komplexov $S(f) \colon S(X) \to S(Y)$; definujeme homomorfizmus singulárnych grúp homológií ako $H_q(f) := H_q(S(f)) \colon H_q(X) \to H_q(Y)$. $H_q(f)$ sa nazýva *homomorfizmus singulárnych grúp homológií* indukovaný spojitým zobrazením $f \colon X \to Y$.
Samozrejme $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$, $H_q(id_X) = id_{H_q(X)}$, teda $H_q \colon Top \to Ab$ a $H \colon Top \to GradAb$.

Tvrdenie 19. *Ak P je jednobodový priestor, tak*

$$H_q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ ak } q = 0 \\ 0 & , \text{ ak } q \neq 0 \end{cases}$$

Veta 16. *Nech X je lineárne súvislý priestor. Potom $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Dôsledok 9. *Nech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém komponentov lineárnej súvislosti priestoru X. Potom $H_q(X) \cong \prod\limits_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha)$.*

Dôsledok 10. $H_0(X) \cong \bigoplus\limits_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$

Dôsledok 11. *X je lineárne súvislý $\Leftrightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$*

Tu by mal byť prehľad nejakej literatúry z topológie (všeobecnej, diferenciálnej, algebraickej).

Literatúra

[1] R.Engelking: *General Topology*

[2] M.Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov* (www…)

[3] K.P.Hart: *Set Theoretic Methods in General Topology* (www.cs.vu.nl/˜kphart)

[4] A.Hatcher: *Algebraic Topology* (www...)

[5] A.McCluskey, B.McMaster: *Topology Course Lecture Notes* (Toto možno nájsť na Topology Atlase, kde je tiež veľa ďalších vecí z topológie: www.at.yorku.ca)

[6] J.Nagata: *Modern General Topology*

[7] E.H.Spanier: *Algebraic Topology*

[8] O.Y.Viro, O.A.Ivanov, N.Y.Netsvetaev, V.M.Kharlamov: *Elementary Topology - A First Course. Textbook in Problems* (www.math.uu.se/˜oleg)