

Verzia: 25. júna 2002

Def: Nech $U \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená a nech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** triedy C^k ($k \geq 0 \in \mathbb{N}$) na U (stručne $f \in C^k(U)$), ak f má na U spojité všetky možné parciálne derivácie až do rádu k (vrátane).

Funkcia f , ktorá je na U triedy C^k pre každé $k \in \mathbb{N}$ sa nazýva **nekonečnediferencovateľná** (hladká) funkcia na U . ($f \in C^\infty(U)$)

Def: Nech $U \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená a nech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$. Potom hovoríme, že zobrazenie f je **diferencovateľné** triedy $C^k(U)$, ak všetky parciálne funkcie zobrazenia f , t.j. všetky $f_i = r_i \circ f$ sú z $C^k(U)$.

Def: Lokálne euklidovský priestor dimenzie d je Hausdorffovský topologický priestor M , taký, že každý jeho bod má otvorené súvislé okolie homeomorfné s otvorenou podmnožinou v $\mathbb{R}^d$.

Ak M je d -rozmerný lokálne euklidovský priestor $x \in M$ a $U \ni x$ je otvorená a súvislá množina v M , ktorá je prostredníctvom homeomorfizmu $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ homeomorfná s otvorenou podmnožinou $\varphi(U)$ v $\mathbb{R}^d$, tak (U, φ) sa nazýva **lokálny súradnicový systém** okolo bodu x (so začiatkom v bode x).

Funkcia $r_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **i-ta súradnicová funkcia**.

U = **súradnicové okolie**

φ = **lokálne súradnicové zobrazenie**

Def: Nech M^d je d -rozmerný lokálne euklidovský priestor. Potom **diferencovateľná štruktúra triedy** C^k ($k \geq 1$) na M^d je systém $\mathcal{F} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$; $\alpha \in A$ lokálnych súradnicových systémov na M taký, že:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M^d$

2. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k$ na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \forall \alpha, \beta \in A$.

3. $\mathcal{F}$ je maximálny systém lokálnych súradnicových systémov s týmito vlastnosťami. Teda ak (U, φ) je lokálny súradnicový systém, taký, že $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^k$ pre $\forall \alpha \in A$, tak $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Diferencovateľná štruktúra triedy C^∞ sa nazýva aj **C^∞ -štruktúra (hladká štruktúra)** na M^d .

Tvrdenie: Nech M^d je d -rozmerný lokálne euklidovský priestor a nech $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\} \neq \emptyset$ je systém lokálnych súradnicových systémov na M^d , ktorý má vlastnosti 1 a 2. Potom existuje jednoznačne určený systém $\mathcal{F}$, že $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$ je už diferencovateľná štruktúra triedy C^k na M^d . (splňa 3)

Def: Nech M^d je d -rozmerný lokálne euklidovský priestor so spočítateľnou bázou topológie a nech $\mathcal{F}$ je diferencovateľná štruktúra triedy C^k na M^d . Potom $(M^d, \mathcal{F})$ sa nazýva d -rozmerná **diferencovateľná varieta** triedy C^k .

Zadať štruktúru diferencovateľnej variety triedy C^k na lokálne euklidovskom priestore M so spočítateľnou bázou topológie znamená určiť na M nejakú diferencovateľnú štruktúru triedy C^k .

Diferencovateľná varieta triedy C^∞ sa nazýva aj **hladká varieta**.

d -rozmerný lokálne euklidovský priestor so spočítateľnou bázou topológie sa nazýva aj **topologická varieta**.

Def: Nech $(M, \mathcal{F}_M), (N, \mathcal{F}_N)$ sú C^k -variety. Spojité zobrazenie $f : M \rightarrow N$ je v bode $x \in M$ **diferencovateľné triedy** C^k ($k \geq 1$), ak pre ľubovoľné $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M, (V, \psi) \in \mathcal{F}_N, x \in U, f(x) \in V$ je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ triedy C^k .

f sa nazýva **diferencovateľné triedy** C^k na M , ak je diferencovateľné triedy C^k v každom $x \in M$.

Diferencovateľné zobrazenie triedy C^∞ sa nazýva **hladké**.

Def: Nech M, N sú C^∞ -variety. **Difeomorfizmus** z M na N je C^∞ -zobrazenie také, že $f^{-1} : N \rightarrow M$ existuje a je tiež C^∞ .

Def: C^∞ -štruktúry $\mathcal{F}_M, \tilde{\mathcal{F}}_M$ na C^∞ -variete M sú ekvivalentné, ak existuje difeomorfizmus $f : (M, \mathcal{F}_M) \rightarrow (M, \tilde{\mathcal{F}}_M)$.

Def: Nech $X \neq \emptyset$ je topologický priestor a nech $W \subset X$. **Pokrytie množiny** W je systém $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, kde A je indexová množina, pričom platí, že $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset W$.

Def: Jeho **podpokrytie** je systém $\{U_\alpha; \alpha \in A'\} A' \subset A$.

Def: Pokrytie nazývame **otvorené**, ak pre každé $\alpha \in A$ je U_α otvorená množina.

Def: **Zjemnenie pokrytia** $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ je pokrytie $\{V_\beta; \beta \in B\}$ také, že pre každé $\beta \in B \exists \alpha \in A: V_\beta \subset U_\alpha$.

Def: Pokrytie $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ priestoru X sa nazýva **lokálne konečné**, ak pre každé $x \in X$ existuje otvorené okolie U_x také, že $U_x \cap U_\alpha \neq \emptyset$ iba pre konečne veľa α .

Def: Topologický priestor nazývame **parakompaktný**, ak je hausdorffovský a každé jeho otvorené pokrytie má lokálne konečné zjemnenie.

Pr: 1. Každý kompaktný, hausdorffovský je parakompaktný.

Dohoda: V ďalšom sa pod pojmom kompaktný priestor bude rozumieť kompaktný, T2.

Pr: 2. Priestor, ktorý nie je kompaktný, ale je parakompaktný – $\mathbb{R}^n$.

Def: Topologický priestor je lokálne kompaktný, ak každý jeho bod má otvorené okolie, ktorého uzáver je kompaktný.

Pr: 1. $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ je lokálne kompaktný priestor

Pr: 2. Lokálne euklidovský priestor je lokálne kompaktný priestor, diferencovateľné variety triedy $C^k(C^\infty)$.

Veta: Nech $X \neq \emptyset$ je hausdorffovský lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou topológie. Potom X je parakompaktný. Špeciálne: Každá $C^\infty(C^k)$ varieta je parakompaktná.

Platí aj silnejšie tvrdenie pre X : Každé jeho otvorené pokrytie má spočítateľné lokálne konečné zjemnenie také, že uzáver každej množiny toho zjemnenia je kompaktný.

Lema: Nech X je priestor s vlastnosťami v predpokladoch vety. Potom existuje spočítateľný systém otvorených podmnožín $G_i \subset X$, $i = 1, 2, \dots$ taký, že $G_i \subset G_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$, $\overline{G_i}$ je kompaktná množina a $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i = X$.

Dôkaz:

- Existuje spočítateľná báza $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ taká, že $\overline{U_\alpha}$ je kompaktná.

- Nech $B = \{B_j; j \in \mathbb{N}\}$ je ľubovoľná spočítateľná báza topol. priestoru X . Potom $B^c = \{B_{j_k}; \overline{B_{j_k}} \text{ je kompaktný} \}$ je neprázdny systém.

X je lokálne kompaktný priestor, teda pre každý bod $x \in X$ existuje otvorené okolie U také, že $\overline{U}$ je kompaktná množina. Keďže systém B tvorí bázu topológie (spočítateľnú) $\exists j \in \mathbb{N}: x \in B_j \subseteq U$. Potom, ale $\overline{B_j} \subseteq \overline{U}$ a $\overline{B_j}$ je uzavretá podmnožina kompaktnej množiny U , teda tiež kompaktná.

- B^c je bázou rovnakej topológie ako systém B

Nech $x \in X$ je ľubovoľný bod a nech $x \in U$ je ľubovoľné jeho otvorené okolie a nech K je otvorené okolie, ktorého uzáver je kompaktný. Potom $K \cap U$ je otvorené okolie bodu x , teda $\exists j \in \mathbb{N}: B \ni B_j \subset K \cap U$, $B_j \in B^c$, pretože $\overline{B_j} \subset \overline{K}$, čo je kompaktné.

Def: Nech M^d je d -rozmerná C^∞ -varieta a nech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia na M . Potom **nosič funkcie** f je $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$.

Def: Nech M^d je d -rozmerná C^∞ -varieta. Potom **hladký rozklad jednotky** je systém hladkých funkcií $\varphi_i; i \in I$ takých, že

1. $\varphi_i \geq 0$
2. Systém nosičov φ_i je lokálne konečný
3. $\sum \varphi_i(x) = 1 \forall x \in M$

Ak $U_\alpha; \alpha \in A$ je otvorené pokrytie variety M , tak hovoríme, že rozklad jednotky je **podriadený** tomuto pokrytiu, ak pre každé $i \in I$ existuje $\alpha \in A$ také, že $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_\alpha$.

Špeciálne hovoríme, že rozklad jednotky je podriadený pokrytiu $U_i; i \in I$ s tou istou indexovou množinou, ak $\forall i \in I \text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$.

Lema: Existuje nezáporná hladká funkcia $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že $\varphi(x) = 1 \forall x \in \overline{C(1)} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; |x_i| \leq 1\}$ a $\varphi(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^d - C(2)$.

Veta: Nech M^d je C^∞ -varieta a nech $U_\alpha; \alpha \in A$ je ľubovoľné otvorené pokrytie. Potom existuje spočítateľný hladký rozklad jednotky $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ podriadený pokrytiu $U_\alpha; \alpha \in A$, pričom $\text{supp}(\varphi_i)$ je kompaktný pre každé $i \in I$.

Tvrdenie: Nech M^d je C^∞ -varieta a nech $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ sú uzavreté disjunktné podmnožiny v M . Potom existuje C^∞ -funkcia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že $f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$.

Def: Ak f, g sú reálne funkcie, definované a hladké na nejakom okolí bodu $p \in M^d$, tak $f \sim g$, ak existuje také otvorené okolie U bodu p , že $f|_U = g|_U$.

$\sim$ je relácia ekvivalencie na množine funkcií definovaných a hladkých na okoliach bodu $p \in M^d$.

$\tilde{f}$ = trieda ekvivalencie reprezentovaná funkciou f definovanou a hladkou na nejakom okolí bodu p .

$\tilde{F}_p$ = množina všetkých tried ekvivalencie

Prvky z $\tilde{F}_p$ sa nazývajú **zárodky(germy)** hladkých funkcií. $\tilde{F}_p$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ a je to aj okruh s jednotkou - tzv. reálna algebra. Pre ľubovoľné $\tilde{f} \in \tilde{F}_p$ je dobre definovaná hodnota $\tilde{f}(p) = f(p)$.

$F_p = \{\tilde{f} \in \tilde{F}_p, \tilde{f}(p) = 0\}$

F_p je vektorový podpriestor $\tilde{F}_p$ a je to ideál v algebre $\tilde{F}_p$

F_p^2 = množina všetkých konečných lineárnych kombinácií súčinov dvojíc prvkov F_p , je to ideál v F_p , a

teda aj v $\tilde{F}_p$.

Def: Nech M je C^∞ -varieta a $p \in M$. **Dotykový vektor** k M v bode p definujeme ako reálny lineárny operátor derivovania na algebre $\tilde{F}_p$. Teda dotykový vektor $\vec{v}$ k M v bode p je operátor:

$\vec{v} : \tilde{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ taký, že

1. je lineárny $\vec{v}(\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha\vec{v}(\tilde{f}) + \beta\vec{v}(\tilde{g})$
2. $\vec{v}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \vec{v}(\tilde{f}) \cdot g(p) + \vec{v}(\tilde{g}) \cdot f(p)$.

Def: Označme M_p množinu všetkých dotykových vektorov k M v bode p . Potom $M_p \neq \emptyset$, lebo $\vec{0} \in M_p$. Na M_p definujeme sčítanie a násobenie:

$$(\vec{v} + \vec{w})(\tilde{f}) = \vec{v}(\tilde{f}) + \vec{w}(\tilde{f})$$

$$(\alpha\vec{v})(\tilde{f}) = \alpha(\vec{v}(\tilde{f}))$$

Potom M_p je reálny vektorový priestor. Vektorový priestor M_p sa nazýva **dotykový (tangenciálny) vektorový priestor** k hladkej variете M v bode p .

Veta: $\dim M_p = \dim M$ pre $p \in P$

Tvrdenie: Ak M je C^∞ -varieta a $p \in M$, tak dotykový priestor $M_p \cong (F_p/F_p^2)^*$.

Lema: Nech $\tilde{v} \in M_p$ a $(\tilde{c})$ je germ konštantnej funkcie. Potom $\vec{v}(\tilde{c}) = 0$.

Tvrdenie: $\dim(F_p/F_p^2) = \dim(M)$

Lema: Nech $g : U \rightarrow \mathcal{R}$ je C^∞ -funkcia, kde U je otvorená podmnožina v $\mathcal{R}^d$. Nech $p \in U$. Potom pre každý bod $q \in U$ máme:

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)(q_i - p_i) + \sum_{i,j} (q_i - p_i)(q_j - p_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(q-p)) dt$$

Def: Nech (U, φ) je lokálny súradnicový systém okolo $p \in M^d$, označme $X_i = r_i \circ \varphi_i, i = 1, \dots, n$.

Definujeme operátor $\frac{\partial}{\partial X_i}|_p$ na $\tilde{F}_p$ takto:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}|_p = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \in R$$

Tvrdenie: $\frac{\partial}{\partial X_i}|_p \in M_p$

Tvrdenie: Dotykové vektory $\frac{\partial}{\partial X_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial X_d}|_p \in M_p$ sú lineárne nezávislé (a teda v M_p tvoria bázu, keďže $\dim(M_p) = d$).

$M_p^* \cong F_p/F_p^2$ - **kodotykový(kotangenciálny) vektorový priestor** k variете M v bode p

$[X_i - X_i(p)]$ je báza F_p/F_p^2

Tvrdenie: Nech (U, φ) je lokálny súradnicový systém okolo $p \in M^d$, $X_i = r_i \circ \varphi$. Potom každý dotykový

vektor $\vec{v} \in M_p$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako $\vec{v} = \sum_{i=1}^d \vec{v}(X_i) \frac{\partial}{\partial X_i}|_p$.

TODO: Závislosť bázy od voľby l.s.s..

Veta a definícia: Nech $f : M^d \rightarrow N^k$ je C^∞ -zobrazenie medzi C^∞ -varietami. Nech $p \in M$. Potom zobrazenie

$$df_p : M_p \rightarrow N_{f(p)}$$

$$df_p(\vec{v})(g) := \vec{v}(g \circ f)$$

je dobre definované lineárne zobrazenie; nazýva sa **diferenciál** zobrazenia f v bode p . **Def:** Zobrazenie

$$df_p^* : N_{f(p)}^* \rightarrow M_p^*$$

medzi kodotykovými priestormi

$$df_p^*(l)(\vec{v}) = l(df_p(\vec{v}))$$

sa nazýva **kodiferenciál (kodotykové zobrazenie) hladkého zobrazenia f v bode p** .

Veta: (Reťazcové pravidlo pre diferenciál) Pre ľubovoľný bod $p \in M$ máme:

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

Tvrdenie: Ak M a N sú súvislé difeomorfné C^∞ -variety, tak $\dim(M) = \dim(N)$.

Špeciálne, ak R^d a R^k sú difeomorfné, tak $d = k$.

Def: C^∞ -**krivka** na C^∞ -variете je ľubovoľné C^∞ -zobrazenie $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$.

Dotykový vektor C^∞ -krivky σ v bode $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sa definuje ako $\dot{\sigma}(t) := d\sigma_t(\frac{d}{dt}|_t)$.

Tvrdenie: Nech M^d je hladká varieta, $p \in M$, $\vec{v} \in M_p - \{\vec{0}\}$. Potom existuje krivka σ na M taká, že $\dot{\sigma}(0) = \vec{v}$.

Def: Nech M^d je C^∞ -varieta.

$$TM := \coprod_{p \in M} M_p$$

Definujeme: $\Pi : TM \rightarrow M$

$\Pi(\vec{v}) = p$, ak $\vec{v} \in M_p$.

Π je surjekcia.

Pre ľubovoľné $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$ definujeme zobrazenie $\tilde{\varphi}_U : \Pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^d$ dané predpisom $\tilde{\varphi}_U(\vec{v}) = (X_1(\Pi(\vec{v})), \dots, X_d(\Pi(\vec{v})), (dX_1)_{\Pi(\vec{v})}(\vec{v}), \dots, (dX_d)_{\Pi(\vec{v})}(\vec{v}))$. Na $\Pi^{-1}(U)$ preniesieme topológiu z $\varphi(U) \times \mathbb{R}^d$ cez bijekciu $\tilde{\varphi}_U$. Systém $\{(\Pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}_U); (U, \varphi) \in \mathcal{F}_M\}$ definuje C^∞ -štruktúru na TM .

TM je $(2d)$ -rozmerná hladká varieta a nazýva sa **dotyková(tangenciálna) varieta** variety M . ($d = \dim(M)$)

Def: Trojica (E, p, B) sa nazýva **hladká vektorová fibrácia s totálnym priestorom E bázou B a projekciou p**, ak

1. $p : E \rightarrow B$ je C^∞ -zobrazenie C^∞ -variet, surjekcia.
2. pre každé $b \in B$ existuje na $p^{-1}(b)$ štruktúra reálneho vektorového priestoru dimenzie $k \in N \cup \{0\}$.
3. pre každé $b \in B$ existuje otvorené okolie $U \ni b$ a difeomorfizmus $h : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$ taký, že:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h} & p^{-1}(U) \\ & \searrow pr_U & \downarrow p|_{p^{-1}(U)} \\ & & U \end{array}$$

komutuje, pričom $h|_{\{s\} \times \mathbb{R}^k} : \{s\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(s)$ pre každé $s \in U$ je lineárny izomorfizmus.

h sa nazýva **lokálna trivializácia**

$p^{-1}(b)$ = fiber fibrácie $\xi = (E, p, B)$ nad bodom b

Ak B je súvislý topologický priestor, tak hodnota k z definície hladkej vektorovej fibrácie je na celom B rovnaká a nazývame ju **dimenzia** hladkej vektorovej fibrácie.

Tvrdenie: Ak (E, p, B) je hladká vektorová fibrácia, tak p je otvorené zobrazenie.

Def: Nech $\xi = (E, p, B)$ a $\xi' = (E', p', B')$ sú hladké vektorové fibrácie. Potom **homomorfizmus** (stručne morfizmus) z ξ do ξ' je dvojica zobrazení $(\tilde{f}, f)$, kde $f : B \rightarrow B'$ a $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ sú hladké zobrazenia také, že diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

komutuje a $\tilde{f}|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(f(b))$ je lineárne zobrazenie pre všetky $b \in B$.

Def: Nech $\xi = (E, p, B)$ a $\xi' = (E', p', B')$ sú hladké vektorové fibrácie s tou istou bázou B . Potom **B-homomorfizmus** $\xi \rightarrow \xi'$ je homomorfizmus $(\tilde{f}, id)$ v zmysle predchádzajúcej definície.

Teda vlastne B-homomorfizmus $\xi \rightarrow \xi'$ môžeme chápať ako hladké zobrazenie $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ také, že diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ & \searrow p & \downarrow p' \\ & & B \end{array}$$

komutuje a $\tilde{f}|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(b)$ je lineárne zobrazenie.

Def: Nech $u : \xi \rightarrow \xi'$ je homomorfizmus hladkých vektorových fibrácií nad tou istou bázou. u je **B-izomorfizmus** ξ na ξ' , ak existuje homomorfizmus $v : E' \rightarrow E$ také, že $v \circ u = id_{E'}$ a $u \circ v = id_E$.

Veta: C^∞ -zobrazenie $u : E \rightarrow E'$ je B-izomorfizmus, ak $u|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(b)$ je lineárny izomorfizmus.

Def: Hladká vektorová fibrácia nad B izomorfná so súčinovou fibráciou $(B \times \mathbb{R}^n, pr_1, B)$ sa tiež nazýva **triviálna fibrácia**.

Def: Rez hladkej vektorovej fibrácie (E, p, B) je hladké zobrazenie $s : B \rightarrow E$ také, že $p \circ s = id_B$.

Veta: n -rozmerná hladká vektorová fibrácia (E, p, B) (E -súvislý) je triviálna $\Leftrightarrow$ existuje n rezov fibrácie $s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E$ takých, že $s_1(b), \dots, s_n(b) \in p^{-1}(b)$ sú lineárne nezávislé pre všetky $b \in B$. (Takéto rezy voláme lineárne nezávislé.)

Def: Rez hladkej vektorovej fibrácie (TM, Π, M) , kde M je C^∞ -varieta sa nazýva **vektorové pole** na variete M .

Def: Ak na C^∞ -variete dimenzie d existuje d vektorových polí, ktorých hodnoty v každom $x \in M$ sú lineárne nezávislé, hovoríme, že M je **paralelizovateľná** varieta.

Ekvivalentne - jej dotyková fibrácia (TM, Π, M) je triviálna.

V ďalšom budeme uvažovať len súvislé variety.

Def: Vnorenie C^∞ -variety M do C^∞ -variety N je C^∞ -zobrazenie $f : M \rightarrow N$, pre ktoré $df_x : M_x \rightarrow N_{f(x)}$ je injekcia pre každé $x \in M$.

Def: Nech existuje hladké vnorenie $f : M \rightarrow N$, ktoré je injektívne. Hovoríme, že (M, f) je **podvarieta** variety N (tiež M sa realizuje ako podvarieta N pomocou f .)

Def: Injektívne vnorenie $f : M \rightarrow N$ sa nazýva **vloženie** M do N , ak $f : M \rightarrow f(M)$ je homeomorfizmus.

Veta: (o inverznom zobrazení - euklidovská verzia) Nech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ je hladké zobrazenie, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otvorená. Ak existuje $r_0 \in U$ také, že Jacobiho matica $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r_0)) \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ je regulárna, tak potom existuje otvorené okolie $V \ni r_0$, $V \subset U$, že $f|_V : V \rightarrow f(V)$ je difeomorfizmus, pričom $f(V)$ je otvorená podmnožina v $\mathbb{R}^d$.

Veta: (o inverznom zobrazení) Nech $f : M \rightarrow N$ je C^∞ -zobrazenie a nech existuje $p \in M$ také, že $df_p : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ je lineárny izomorfizmus. Potom existuje otvorené okolie $V \ni p$ také, že $f(V) \subset N$ je otvorená podmnožina a $f|_V : V \rightarrow f(V)$ je difeomorfizmus.

Def: Nech M^d je C^∞ -varieta a nech $y_1, \dots, y_k$ sú reálne funkcie definované a hladké v nejakom okolí bodu $p \in M$. Hovoríme, že $y_1, \dots, y_k$ sú **nezávislé v bode p** ak $dy_1(p), \dots, dy_k(p)$ chápané ako prvky z M_p^* sú lineárne nezávislé.

Dôsledok 1: Nech $y_1, \dots, y_d$ sú funkcie nezávislé v bode $p \in M$, kde M^d je d -rozmerná C^∞ -varieta. Potom $y_1, \dots, y_d$ tvoria lokálny súradnicový systém na nejakom okolí bodu p .

Dôsledok 2: Nech $p \in M^d$, M je C^∞ -varieta a nech reálne funkcie $y_1, \dots, y_k$, $k \leq d$ sú nezávislé v p . Potom funkcie $y_1, \dots, y_k$ sa dajú doplniť $d-k$ hladkými funkciami tak, že dostaneme lokálny súradnicový systém okolo bodu p .

Dôsledok 3: Nech $f : M^c \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie a nech $p \in M$ je bod taký, že $df_p : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ je surjektívny (teda $c \geq d$). Ak $y_1, \dots, y_d$ sú lokálne súradnicové funkcie v okolí bodu $f(p)$, tak $y_1 \circ f, \dots, y_d \circ f$ sa dajú ($c-d$) hladkými funkciami definovanými a hladkými na nejakom okolí bodu p doplniť tak, že dostaneme lokálny súradnicový systém v bode p .

Dôsledok 4: Nech $p \in M^d$, M je C^∞ -varieta. Ak $y_1, \dots, y_k$ ($k \geq d$) sú funkcie definované a hladké na nejakom okolí bodu p , pričom $[dy_1|_p, \dots, dy_k|_p] = M_p^*$, tak vhodná d -prvková podmnožina množiny $y_1, \dots, y_k$ určuje lokálny súradnicový systém okolo bodu p .

Dôsledok 5: Nech $f : M^c \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie C^∞ -variet. Nech $p \in M$ je bod taký, že diferenciál $df_p : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ je injekcia. (Teda $c \leq d$.) Potom ak $y_1, \dots, y_d$ určuje lokálny súradnicový systém v bode $f(p)$, tak vhodná podmnožina $y_1 \circ f, \dots, y_d \circ f$ určuje lokálny súradnicový systém v p . Navyše existuje otvorené okolie $U \ni p$, že $f|_U : U \rightarrow f(U)$ je injekcia.

Def: Nech $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_{M^d}$. Nech $a = (a_1, \dots, a_d) \in \varphi(U)$, nech $0 \leq c \leq d$. Označme $S_c = \{q \in U : X_i(q) = a_i \text{ pre } i = c+1, \dots, d\}$.

Na S_c máme globálny súradnicový systém $(X_1|_{S_c}, \dots, X_c|_{S_c})$, teda S_c je C^∞ -varieta dimenzie c .

S_c sa nazýva **c -rozmerný zrez** lokálneho súradnicového systému (U, φ) .

Tvrdenie: Ak S je c -rozmerný zrez lokálneho súradnicového systému $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$, tak $(S, incl)$ je c -rozmerná podvarieta v M .

Veta: Nech $f : M^c \rightarrow N^d$ je C^∞ -vnorenie. Potom pre ľubovoľný $p \in M$ existuje otvorené okolie $U \ni p$ a lokálny súradnicový systém (V, φ) okolo $f(p)$ také, že $f(U)$ je c -rozmerným zrezom lokálneho súradnicového systému (V, φ) .

Veta: (o vzore bodu) Nech $f : M^c \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie a nech $n \in N$ je taký bod, že $P := f^{-1}(n) \neq \emptyset$, pričom nech $df|_x : M_x \rightarrow N_n$ je surjekcia pre $\forall x \in P$.

Potom na P existuje štruktúra hladkej variety taká, že $(P, incl)$ je hladká podvarieta v M , pričom $\dim(P) = c - d$.

Veta: (o vzore podvariety) Nech $f : M^b \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie C^∞ -variet.

Nech (A^c, g) je c -rozmerná podvarieta variety N .

Nech $P = f^{-1}(g(A)) \neq \emptyset$.

Nech pre $\forall m \in P$ je $N_{f(m)} = df_m(M_m) + dg_{g^{-1}(f(m))}(A_{g^{-1}(f(m))})$.

Potom na P existuje práve jedna štruktúra hladkej variety, pričom $\dim(M) - \dim(P) = \dim(N) - \dim(A)$, t.j. $\text{codim}_M(P) = \text{codim}_N(A)$.

Def: Nech $f : M^b \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie a (A^c, g) je C^∞ -podvarieta v N . Ak pre dáke $m \in f^{-1}(g(A))$ platí: $N_{f(m)} = df_m(M_m) + dg_{g^{-1}(f(m))}(A_{g^{-1}(f(m))})$, tak hovoríme, že f je **transverzálne k A v m** , $f \pitchfork_m A$. Ak $f \pitchfork_m A$ pre všetky $m \in f^{-1}(g(A))$, tak hovoríme, že f je **transverzálne k A** , $f \pitchfork A$.

Veta: (o vzore podvariety) Nech $f : M^b \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie, nech (A^c, g) je c -rozmerná hladká

podvarieta variety N a nech $f \pitchfork A$. Potom ak $P = f^{-1}(g(A)) \neq \emptyset$, tak $f^{-1}(g(A))$ je hladká podvarieta v N , pričom $\text{codim}_M(P) = \text{codim}_N(A)$.

Def: Nech (M^b, i) je podvarieta v N ; nech (A^c, i) je podvarieta v N . To, že $i \pitchfork A$, znamená, že $\forall x \in A \cap M : N_x = M_x + A_x$. Vtedy hovoríme, že M a A sú v **generickej** všeobecnej polohe, $M \pitchfork A$.

Veta: (Slabá Whitneyho veta o vnorení) Pre každú kompaktnú hladkú varietu M^d existuje $q \in N$ také, že M sa dá vložiť do $\mathbb{R}^q$.

Dá sa dokázať, že kompaktná varieta M^d sa vkladá do $\mathbb{R}^{2d+1}$ a vnára do $\mathbb{R}^{2d}$, pričom každé hladké zobrazenie $f : M^d \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}(\mathbb{R}^{2d})$ sa dá „aproximovať“ vložením (vnorením). Bez vlastnosti aproximácie: $\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d-1}$.

Def: Nech $f : M^d \rightarrow N^d$ je C^∞ -zobrazenie C^∞ -variet. Potom bod $x \in M$ je **regulárny bod**, ak df_x je lineárny izomorfizmus. (Hovoríme, že df_x je regulárny.)

$y \in N$ je **regulárna hodnota** zobrazenia f , ak f^{-1} pozostáva iba z regulárnych bodov zobrazenia f .

$x \in M$ je **kritický bod** zobrazenia f , ak df_x nie je lineárny izomorfizmus (hodnosť Jacobiho matice je $\neq d$.)

$x \in M$ je **kritická hodnota** zobrazenia f , ak $f^{-1}(y)$ obsahuje aspoň 1 kritický bod zobrazenia f .

Veta: Nech $f : M^d \rightarrow N^d$ je hladké zobrazenie a M je kompaktná. Potom ak $y \in N$ je regulárna hodnota zobrazenia f , tak buď $f^{-1}(y) = \emptyset$ alebo f^{-1} má iba konečný počet bodov.

Veta: Ak $f : M^d \rightarrow N^d$ je hladké zobrazenie a M je kompaktná množina, tak funkcia $|\cdot| : RH(f) \rightarrow \mathbb{Z}$; $|\cdot|(y) = |f^{-1}(y)|$ je lokálne konštantná. (Pre každý bod existuje okolie, v ktorom je konštantná.)

Veta: (Fundamentálna veta algebry) Nech $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ $n \geq 1, a_0 \neq 0$ je komplexný polynóm. Potom existuje $z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.

Otázky zo skúšky:

1. Definícia diferenciálu + reťazové pravidlo
2. Dotykový vektor ku krivke + veta o nich
3. Definícia difeomorfizmu + dokázať vetu o inverznom zobrazení medzi varietami (bola sformulovaná v zadaní)
4. $M_p \cong (F_p/F_p^2)^*$
 $\dim M_p = \dim M$

Doplňujúca ústna otázka:

1. vektorové pole
2. Difeomorfizmus - definícia. Prečo difeomorfizmus zachováva dimenzie?
3. S^n ako C^∞ -varieta.